Algèbre

Analyse

Aléatoire & Statistiques

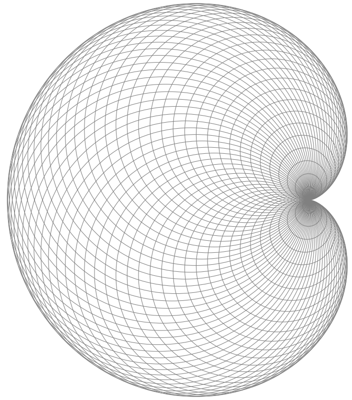
Annexes

Quelques remarques à propos de l'utilisation de ce polycopié

1. Les énoncés et faits hors-programme, mais très classiques parfois, seront indithéoqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu.
2. Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.
3. Quelques éléments[1] relatifs à l'application informatique des Mathématiques (simulations, calculs matriciels, approximations d'intégrales ou de solutions d'équations différentielles) sont indiqués par le logo ≻_ .
4. En revanche, l'Informatique (Algorithmique notamment) fera l'objet d'un polycopié séparé.
5. Une liste de questions de cours émises par le SCAV[2] est disponible en fin de polycopié, ce sont ces questions qui introduisent l'oral de Maths / Info au concours A–ENV. Les questions propres à la première année sont indiquées par le logo SUP . Ce sont elles qui nous intéresseront.

J. Harter

[1]Tous les détails sont à retrouver dans le polycopié d'Informatique
[2]Service des concours agronomiques et vétérinaires



La plupart des «Le Saviez-vous ?» apparaissant en début de chapitre proviennent du compte Twitter @AnecdotesMaths, j'en profite pour en remercier l'auteur.

Version du 4 septembre 2022

Première partie

Algèbre

Chapitre ALG1.

Logique, Rudiments ensemblistes & Raisonnements

Résumé & Plan

Vous entrez dans le monde merveilleux des Mathématiques du supérieur. Il va donc falloir dans un premier temps clarifier et peaufiner la rédaction de cette discipline. On formalise en plus dans ce chapitre les différents types de raisonnements qui peuvent apparaitre dans une démonstration mathématique.

La logique est l'hygiène des Mathématiques

— **André Weil**

Les Mathématiques sont construits à partir d'axiomes — c'est-à-dire des faits et consensus que nous ne cherchons pas à démontrer — et à partir desquels nous déduisons des propositions/théorèmes *etc.*, si possible vrais. L'objectif de ce chapitre est de formaliser les déductions de nouveaux énoncés (symboles logiques, techniques de preuve, *etc.*).

1. LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

1.1. Proposition logique

Définition 1 | Proposition

- On appelle *proposition* ou *assertion* une affirmation concernant un ou plusieurs objets mathématiques qui est, soit vraie, soit fausse.
- La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai ou le faux de cette proposition (mais pas les deux).

Définition 2 | Équivalence de propositions

Deux propositions sont dites *équivalentes* si elles ont même valeur de vérité.

Notation

On notera $P \iff Q$ lorsque deux propositions P, Q sont équivalentes.

Exemple 1

- « $3 \leqslant 4$ » est vraie, « $2^2 = 5$ » est fausse.
- « Il ne pleut jamais à Bordeaux », « Tous les élèves de la 1BC1 aiment les Mathématiques » sont équivalentes.
- « Tout nombre entier admet une racine carrée entière » est fausse.
- « Il existe un plus petit entier naturel » est vraie.

Booléens

En Python, il est très facile de faire différents tests logiques pour obtenir la valeur de vérité d'une proposition. Nous le verrons dans le cours d'Informatique, mais voici quelques exemples.

```
>>> 2**2 == 5
False
>>> 3 <= 4
True
>>> 3 < 4
True
```

Définition 3 | Conjecture
Une *conjecture* est une assertion non prouvée mais dont on pense que la valeur de vérité est vraie.

Exemple 2 La conjecture de Goldbach dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé). Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice.

Remarque 1 (Axiomatique de la logique) On a interdit depuis le début qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, mais interdit aussi qu'une proposition soit autre chose que vraie ou fausse. Ces deux principes s'appellent le principe de *non-contradiction* et le principe du *tiers exclu*.[a] Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés : en effet, en 1931 Gödel démontra que dans tout système axiomatique de logique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés indécidables : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

[a] On évitera donc les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse », qui est subjectif et peut donc être considéré comme vrai et faux en fonction du lecteur.

1.2. Quantificateurs

On se donne un ensemble E et $\mathrm{P}(x)$ une proposition dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E. On ne peut pas dire si la proposition P est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut x.

Définition 4 | Predicat
Une proposition logique $\mathrm{P}(x)$, dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E, s'appelle un *prédicat*.

Exemple 3

- $\mathrm{P}(x)$ « $x^2 = 1$ » dépendant d'un réel x. Le cours de Mathématiques nous dit que « $x^2 = 1$ » est vraie quand $x = \pm 1$ uniquement.
- $\mathrm{P}(n)$ « $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ » dépendant d'un entier n. Le cours de Mathématiques nous dit que cette proposition est toujours vraie, nous le verrons dans le Chapter ALG4.

Pour simplifier l'écriture des propositions on utilisera des symboles appelés quantificateurs.

Notation Quantificateurs
Soit $\mathrm{P}(x)$ un prédicat vrai ou non pour x dans un certain ensemble E. On appelle *quantificateur* les symboles qui abrègent les propositions ci-après :

- « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)$ vraie » qui signifie « **pour tout** x, telle que $\mathrm{P}(x)$ soit vraie »,
- « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)$ vraie » qui signifie « **il existe** x, telle que $\mathrm{P}(x)$ soit vraie »,
- « $\exists!\, x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)$ vraie » qui signifie « **il existe un unique** x, telle que $\mathrm{P}(x)$ soit vraie »,

Attention
Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».

Remarque 2 (Les quantificateurs ne sont pas toujours formellement écrits)
Le quantificateur universel est parfois implicite dans les énoncés mathéma-

tiques. Par exemple, le « soit » cache souvent un « $\forall$ ».
Par exemple, l'énoncé « Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $n(n+1)$ est pair » s'écrit :

$$\text{« } \forall n \in \mathbf{N}, \quad n(n+1) \text{ est pair ».}$$

On peut alors écrire des propositions logiques de manière plus condensée en utilisant ces symboles.

Exemple 4 Résumer en une phrase chaque proposition, et dire si elle est vraie ou fausse.

- $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y^2 = x$.
- $\forall x > 0, \exists!\, y > 0,\ y^2 = x$.
- $\forall x > 0, \exists!\, y \in \mathbf{R},\ y^2 = x$.
- $\exists n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 10$.
- $\exists!\, n \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant 2n \leqslant 3$.

Attention **Rédaction : pas de mélange mots/quantificateurs**

Quand on rédige des Mathématiques, on essaie de ne pas mélanger les mots et les symboles. Ainsi,

- « x^2 est positif $\forall x$ » est une **mauvaise** rédaction. 😭
- « x^2 est positif pour tout réel x » est une **bonne** rédaction 😍 ,
- « $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ » est une **bonne** rédaction 😍 .

De plus, les quantificateurs sont toujours placés avant la proposition à quantifier.

Ordre des quantificateurs. Il est possible, et même fréquent en analyse, d'avoir plusieurs quantificateurs en cascade. On peut échanger deux quantificateurs identiques. Il est par exemple équivalent de dire :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}^+, x+y \geqslant 0, \\ \forall y \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}^+, x+y \geqslant 0 \end{array} \quad \text{ou de manière condensée :} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^+, x+y \geqslant 0.$$

En revanche,

- L'assertion « $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y^2 = x$ » est vraie, elle signifie « tout réel positif admet une racine carrée ».
- Alors que l'assertion « $\exists y > 0, \forall x > 0,\ y^2 = x$ » est fausse, elle signifie « il existe un nombre réel qui est la racine carrée de tous les nombres réels ».

Attention **Ne pas échanger l'ordre de deux quantificateurs différents**

L'ordre dans lequel sont écrits les quantificateurs est **extrêmement** important. En particulier, un élément introduit par un symbole « il existe » ne peut dépendre que des éléments qui le précédent.

Exemple 5 Écrire la dépendance en indice de chaque quantificateur par rapport aux autres.

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.
- $\forall \mathrm{M} > 0, \exists x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x+1} > \mathrm{M}$.

Exemple 6 Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x + y = 0,$

- $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R},\ x + y = 0.$

1.3. Opérations logiques sur les propositions

Définition 5 | Négation, Ou, Et

Soient P et Q deux assertions. On définit alors les assertions suivantes.

- La *négation* de P, écrite « non P » ou bien « $\neg$P », est l'assertion qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
- L'assertion P *ou* Q, écrite « P ou Q » ou bien « $P \vee Q$ » est l'assertion qui est vraie si P est vraie ou[a] Q est vraie, *i.e.* si au moins une des deux propositions est vraie, et fausse si P et Q sont toutes les deux fausses.
- L'assertion P *et* Q, écrite « P et Q » ou bien « $P \wedge Q$ » est l'assertion qui est vraie si P est vraie et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

Remarque 3 Dans la pratique mathématique, nous n'utiliserons jamais les symboles $\vee, \wedge$. Ils le seront uniquement dans ce chapitre pour prouver des propriétés sur les symboles logiques, de manière plus concise.

Booléens

Les opérations « et » (`and`) « ou » (`or`) sur les booléens `True` et `False` existent déjà en Python, tout comme la négation (`not`). Voici quelques exemples.

[a]ou éventuellement les deux

```
>>> V_1 = 2**2 == 5
>>> V_2 = 3 <= 4
>>> V_1 and V_2
False
>>> V_1 or V_2
True
>>> not V_1
True
```

Méthode Prouver une Négation, Ou, Et

- Une proposition est vraie si et seulement si sa négation est fausse.
- Pour prouver que la proposition $P \vee Q$ est vraie, on prouve qu'au moins une des deux propositions est vraie.
- Pour prouver que la proposition $P \wedge Q$ est vraie, on prouve que les deux propositions sont vraies.

Exemple 7

- $\neg(3 \geqslant 4)$ est

  vraie puisque $3 < 4$ *est vraie,*
- $(3 \leqslant 4) \vee (2^2 = 5)$ est vraie, alors que $(2 - 1 \geqslant 0) \wedge (2^2 = 5)$ est fausse.

- Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^3 - x > 0$. Vérifier que la proposition « $x > -1$ ou $x < 0$ » est vraie.

- Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^3 - 3x \leqslant 0$. Vérifier que la proposition « $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 3$ » est fausse.

Exemple 8

- On lance deux dés à six faces. On note P : « le résultat du premier lancer est un nombre pair » et Q : « le résultat du second lancer est un nombre pair ». La proposition $P \vee Q$ est

  « on obtient au moins un résultat pair ».
- Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On pioche deux boules de l'urne. On note P : « le numéro de la première boule est impair » et Q : « le numéro de la seconde boule est impair ». Alors la proposition $P \wedge Q$ est

  « le produit des numéros des deux boules piochées est impair ».

Remarque 4 Vous noterez que le « ou » mathématique est *inclusif*, ce qui n'est pas toujours le cas dans la langue française. Par exemple dans « Fromage ou Dessert » le « ou » est exclusif, vous ne pouvez pas prendre les deux.

Représentation par tables de vérité. On peut utiliser des tables de vérité pour résumer la Définition 5 précédente. Cela revient à indiquer dans chaque cellule du tableau le résultat des opérations précédentes en fonction de la véracité ou non des propositions données en entrée.

P	V	F
$\neg P$	F	V

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Les tables de vérité permettent de démontrer efficacement des règles opératoires sur les propositions logiques. Une table de vérité peut aussi permettre de simplifier une assertion d'apparence compliquée.

Exemple 9 En construisant une table de vérité, montrer que les assertions $\neg(\neg Q \vee P)$ et $Q \wedge \neg P$ sont équivalentes.

Négation d'une proposition avec quantificateurs. Nous utiliserons la proposition ci-après.

Proposition 1 | Nier une proposition avec quantificateurs

- La négation de « Pour tout x de E, $P(x)$ est vraie » est « Il existe $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est fausse » :
$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg(P(x)).$$
- La négation de « Il existe x de E, $P(x)$ est vraie » est « Pour tout $x \in E$, $P(x)$ est fausse » :
$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

Méthode Nier une assertion avec des quantificteurs

Comment nier une assertion écrite à l'aide de quantificateurs ? On garde l'ordre des quantificateurs, on transforme tous les « $\exists$ » en « $\forall$ » et tous les « $\forall$ » en « $\exists$ » puis on nie les expressions mathématiques subséquentes.

Exemple 10 Nier les assertions suivantes.

- « Tous les professeurs de 1BC1 sont gentils ».

  « Il existe un professeur de 1BC1 méchant »
- Dans une urne contenant des boules rouges et noires, on pioche au hasard 3 boules. « On pioche 3 boules rouges », « On ne pioche aucune boule rouge ».
- « $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbf{R}, |x-1| < \alpha \implies \left|\sqrt{x}-1\right| < \varepsilon$ ».

Exemple 11 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

- $\forall x \in I, \quad f(x) \neq 0,$

  $\exists x \in I, \quad f(x) = 0$
- $\forall y \in \mathbf{R}, \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y$

  $\exists y \in \boldsymbol{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \neq y$
- $\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant M$

  $\forall M \in \boldsymbol{R}, \quad \exists x \in I, \quad |f(x)| > M$
- $\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$

  $\exists (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y, \ et \, f(x) > f(y)$

Propriétés sur les assertions logiques. Comment ces opérations logiques se comportent-elles entre elles ? C'est ce que précise la prochaine proposition.

Proposition 2 | Négation d'ou / et

Soient P et Q deux assertions.

- **(Principe de non-contradiction)** $P \wedge (\neg P)$ est fausse. Toute proposition de cette forme est appelée une *contradiction*.[a]
- **(Principe du tiers exclu)** $P \vee (\neg P)$ est vraie.
- **(Double négation)** $\neg(\neg P) \iff P$,
- **(Négation d'une conjonction)** $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$,
- **(Négation d'une disjonction)** $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$.

Proposition 3 | Lois de Morgan

Soient P et Q deux assertions.
$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q), \quad \neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Proposition 4 | Propriétés de ou / et

Soit P,Q et R trois assertions. Alors :

- **(Commutativité)** $P \vee Q \iff Q \vee P, \quad P \wedge Q \iff Q \wedge P.$

[a] Provient directement de ce qu'une proposition logique ne peut être vraie et fausse à la fois.

- **(Associativité)**

$$(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R), \quad (P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R).$$

- **(Distributivité)**

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R), \quad P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Preuve Construire les tables de vérité associées.

Remarque 5 (Retenir la distributivité : analogie) Imaginez que le symbole $\vee$ est un $+$, et le symbole $\wedge$ un $\times$. La seconde formule de distributivité se réecrit alors :

$$P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R).$$

1.4. Implication, Contraposée

Que signifie en Mathématiques la notion d'implication ? Par exemple, soit x un réel. Si x est supérieur ou égal à 2, alors x est différent de 1,ce que vous notiez peut-être déjà au lycée :

$$x \geqslant 2 \implies x \neq 1.$$

Cela nous donne une nouvelle proposition logique (une implication est soit vraie, soit fausse) formée ici à partir de « $x \geqslant 2$ » et « $x \neq 1$ ». Mais comment définir $P \implies Q$ de manière abstraite si P, Q sont deux propositions logiques ? Il faut comprendre que la négation de l'implication $P \implies Q$ sera fausse si P est vraie et Q est fausse. Ce qui se note avec nos symboles logiques de la manière suivante :

$$\neg (P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q, \text{ donc en prenant la négation : } \quad (P \implies Q) \iff (\neg P \vee Q).$$

On a notre définition de l'implication.

Définition 6 | Implication
Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition « P *implique* Q », notée $P \implies Q$, comme étant :

$$(\neg P) \vee Q.$$

Autrement dit, $P \implies Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse. On dit aussi « si P est vraie, alors Q est vraie ». De plus, lorsque $P \implies Q$,
- on dit que Q est une condition *nécessaire* pour que P soit vraie,
- et on dit que P est une condition *suffisante* pour que Q soit vraie.

Attention
- Affirmer que l'implication : $P \implies Q$ est vraie n'implique ni que P est vraie, ni que Q est vraie. Il est parfaitement vrai que : « Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- Une implication : $P \implies Q$ peut être vraie alors que P et Q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent. Par exemple, il est vrai que : « Si $0 = 0$, alors les oiseaux ont des plumes ». [1]

On peut aussi écrire la table de vérité de $P \implies Q$.

P	Q	$\neg$P	$P \implies Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

La lecture de la table nous mène tout droit à la proposition suivante, qui est évidemment très intuitive.

[1] Mais bien entendu en Mathématiques, nous nous intéresserons le plus souvent à des assertions P, Q liées entre elles.

Proposition 5
Soient P et Q deux assertions.

$$\text{Si}\quad \begin{cases} \text{P est vraie} \\ \text{P} \implies \text{Q est vraie} \end{cases} \qquad \text{alors :}\quad \text{Q est vraie.}$$

Exemple 12 Expliquer les valeurs logiques ci-après.

- L'assertion « Socrate est un homme $\implies$ Socrate est mortel » est vraie.
- L'assertion « Socrate est une table basse $\implies$ Socrate et mortel » est vraie.
- L'assertion « Socrate est une table basse $\implies$ Socrate est une chaise » est vraie.
- L'assertion « Socrate est grec $\implies$ Socrate est une chaise » est fausse.

Exemple 13

- Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors « $x > 1 \implies x^2 > 1$ » est vraie.
- La proposition « $3 > 5 \implies 1+1=8$ » est vraie.

Puisque la notation est bien choisie, on a la proposition ci-après.

Proposition 6 | Double implication
Soient P et Q deux assertions. Alors (P $\iff$ Q) est équivalente à :

$$(\text{P} \implies \text{Q}) \wedge (\text{Q} \implies \text{P}).$$

On dit aussi « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie ».

Preuve Il suffit de construire la table de vérité associée à $(\text{P} \implies \text{Q}) \wedge (\text{Q} \implies \text{P})$.

P	Q	P $\implies$ Q	Q $\implies$ P	P $\iff$ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On retrouve bien que P $\iff$ Q est vraie uniquement lorsque P, Q ont même valeur de vérité, c'était bien notre définition de l'équivalence en début de chapitre.

Méthode Prouver une équivalence de propositions
Soient P, Q, R trois assertions logiques. Alors :

$$(\text{P} \implies \text{Q}) \wedge (\text{Q} \implies \text{R}) \implies (\text{P} \implies \text{R}).$$

Remarque 6 Une implication et sa réciproque ne sont pas équivalentes. Lorsqu'une implication est vraie et que sa réciproque est vraie alors les propositions sont équivalentes : c'est la base du raisonnement par « double implication ».

Proposition 7 | Négation d'une implication

Soit P une assertion. Alors :

$$\neg(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \iff \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}.$$

Preuve C'est une conséquence directe de la définition :

$$\neg(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \iff \neg(\neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \iff \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}.$$

Exemple 14 Écrire la négation de la phrase « Si je gagne au loto, je change de voiture »

« J'ai gagné au loto et je n'ai pas changé de voiture »

Exemple 15 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

1. $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

   $\exists (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \text{ et } f(x) > f(y).$
2. $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

   $\exists (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y.$
3. $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) > 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$

   $\exists x \in \mathrm{I}, \quad f(x) > 0 \text{ et } x > 0.$

Contraposée et chaînes d'implications.

Définition/Proposition 1 | Contraposée & Réciproque d'une implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition :

- *contraposée de* $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ comme étant $(\neg \mathrm{P}) \Longrightarrow (\neg \mathrm{Q})$. Elle est équivalente à l'implication :

$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \iff ((\neg \mathrm{P}) \Longrightarrow (\neg \mathrm{Q})).$$

- On définit la *réciproque de* $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ comme étant :

$$\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}.$$

Méthode Prouver une implication de propositions

Pour montrer que deux propositions $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ est vraie, on peut :

1. Supposer que P est vraie et montrer que (nécessairement) Q est vraie aussi.
2. <u>**ou**</u> montrer la contraposée, c'est-à-dire que si Q est fausse, alors P est vraie.

Preuve *(pour la contraposée)* Construire les tables de vérité ou utiliser la définition de l'implication.

Exemple 16 Soit n un entier relatif. Démontrer par contraposition que si n^2 est impair alors n est impair.

Proposition 8 | Transitivité de l'implication

Soient P et Q deux assertions. Alors $(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q})$ est équivalente à :

$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}).$$

On dit aussi « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie ».

Exemple 17 Soit $x \in \mathbf{R}$. Si on note P « $x = 0$ », Q « x est pair », R « x est un entier relatif ». Alors $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$, $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{R}$ et donc $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{R}$.[a]

[a] Bien sûr, nullement besoin de transitivité pour prouver cela...

Corollaire 1 | Cycles d'implications
Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ trois assertions. Alors $(\mathrm{P}_1 \iff \mathrm{P}_2 \iff \mathrm{P}_3)$ est équivalente à :

$$(\mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_2) \wedge (\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_3) \wedge (\mathrm{P}_3 \implies \mathrm{P}_1).$$

Remarque 7 Ce corolaire se généralise sans difficulté à n propositions. Pour un exemple, consulter par exemple l'Exemple 23.

Preuve Montrons que $\mathrm{P}_1 \iff \mathrm{P}_2$. On a déjà $\mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_2$, de plus $(\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_3)$ et $(\mathrm{P}_3 \implies \mathrm{P}_1)$ implique par transitivité $\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_1$, on a donc prouvé $\mathrm{P}_1 \iff \mathrm{P}_2$ par double implication. On procède de-même pour $\mathrm{P}_2 \iff \mathrm{P}_3$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P}_2 \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{P}_1 \arrow[ur, Rightarrow] & \mathrm{P}_3 \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

2. BASES SUR LES ENSEMBLES

La notion d'ensemble est difficile à définir proprement, on s'appuiera plutôt sur l'intuition que l'on a de cette notion, en le qualifiant vaguement de «collection d'éléments».

2.1. Généralités

Définition 7

- Un *ensemble* E est une collection d'éléments x qui sont dits *appartenir* à l'ensemble E, ce que l'on note $x \in \mathrm{E}$. On note les éléments de cette collection entre accolades.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, on l'appelle l'*ensemble vide* et on le note $\varnothing$.
- Un ensemble ne possédant qu'un seul élément est appelé un *singleton*.

Notation
Lorsqu'un élément x n'est pas dans E, on note $x \notin \mathrm{E}$.

Modes de définition d'un ensemble. On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments, ou en *compréhension*, c'est-à-dire en donnant une propriété caractérisant de manière unique les éléments de E. Par exemple, l'ensemble ci-après est donné par extension et compréhension :

$$\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant 1, n < 5\} \underset{\textbf{(nota.)}}{=} [\![1\,,\,4]\!].$$

En résumé on a les deux modes suivants :

- **(Extension)** $\mathrm{E} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- **(Compréhension)** $\mathrm{E} = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{condition sur } x\}$.

Analogue pythonique
Ces deux modes de définition se retrouvent en Python pour construire une liste. Par exemple, avec l'ensemble E *supra*.

```
>>> E = [1, 2, 3, 4] # mode par extension
>>> E = [i for i in range(1, 10**3) if i >= 1 and i < 5] # mode par
↪ compréhension, 10**3 est ici arbitraire
```

On rappelle également à toutes fins utiles la notation ci-après.

Notation Intervalle d'entiers
Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ deux entiers. On notera

$$[\![a\,,\,b]\!] = \{n \in \mathbf{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\} = [a, b] \cap \mathbf{Z}.$$

Quand on définit un ensemble en compréhension il faut toujours le situer comme sous-ensemble d'un ensemble plus grand : on n'écrit pas[2] $\{x \mid \cos(x) \geqslant 0\}$ mais $\{x \in \mathbf{R} \mid \cos(x) \geqslant 0\}$.

Définition 8 | Inclusion, Égalité, Inclusion stricte

Soient F et E deux ensembles.

- On dit que F est un *sous-ensemble de* E ou que F *est inclus dans* E si tout élément de F est un élément de E, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad x \in \mathrm{E}.$$
On note cela $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
- Les ensembles E et F sont dits égaux si :
$$\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \text{ et } \mathrm{F} \subset \mathrm{E}.$$
Autrement dit, E et F ont exactement les mêmes éléments, c'est-à-dire :
$$x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F}.$$
On note cela $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.
- On dit que F est un *sous-ensemble strict de* E ou que F *est strictement inclus dans* E si :
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{E} \text{ et } \mathrm{F} \neq \mathrm{E},$$
autrement dit :
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{E}, \quad \exists x \in \mathrm{E}, x \notin \mathrm{F}.$$
On note cela $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$.

Exemple 18 Si $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{F} = \{1, 2\}$. Alors $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et on a aussi $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$.

[2]Ou plutôt on évitera de l'écrire

Exemple 19 Écrire un symbole entre les ensembles ci-après.

- $1 \quad \{1, 2, 3, 4\}$,
- $\{1\} \quad \{1, 2, 3, 4\}$,
- $\varnothing \quad \{1, 2, 3, 4\}$,
- $\{1\} \quad \mathscr{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

Attention

Appartenance ≠ Inclusion ! Un **élément** appartient à un ensemble, et une **partie** est incluse dans un ensemble.

Définition 9 | Ensemble des parties

Soit E un ensemble. On peut définir l'*ensemble des parties de* E, noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, comme étant l'ensemble des sous-ensembles A de E.

On a donc
$$\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{E}.$$

Remarque 8 Remarquons que l'on a toujours
$$\mathrm{E} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \text{ et } \varnothing \in \mathscr{P}(\mathrm{E}).$$

Exemple 20 Soit $\mathrm{E} = [\![1\,,\,3]\!]$, alors :
$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \mathrm{E}\}.$$

2.2. Opérations sur les ensembles

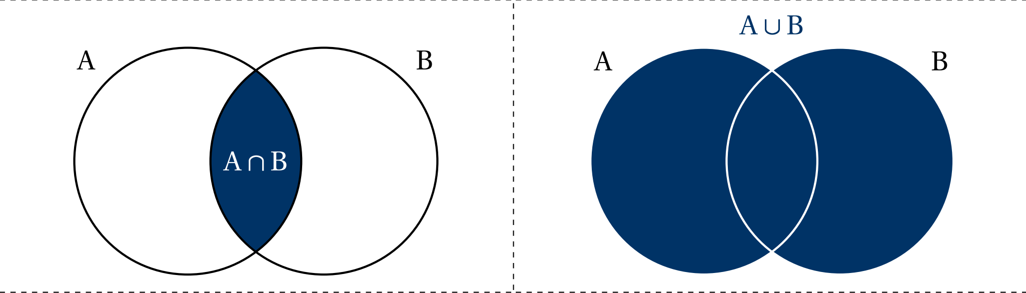
Définition 10 | Réunion & Intersection

Soit E un ensemble, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. On définit :

- l'*union de* A *et de* B, notée $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ (et lue « A union B ») par :
$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\},$$
et on a : $\quad x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}.$[a]
- L'*intersection de* A *et de* B, notée $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ (et lue « A inter B ») par :
$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}\},$$

et on a : $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$.

Réunion et Intersection



Exemple 21 Si $E = [\![1\,,\,5]\!]$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$. Alors :

$$A \cap B = \{2,3\} \quad A \cup B = \{1,2,3,4\} \quad \overline{A} = \{4,5\},$$

$$\overline{B} = \{1,5\} \quad A \backslash B = \{1\} \quad B \backslash A = \{2\}.$$

Définition 11 | Parties disjointes & Réunion disjointe

Soit E un ensemble, soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si A et B n'ont pas d'éléments en commun, on dit alors que A et B sont *disjoints*.
- La réunion $A \cup B$ est alors qualifiée de *réunion disjointe*, on la note $A \uplus B$.

Exemple 22 La réunion précédente $A \cup B$ n'est pas disjointe car $2, 3 \in A \cap B$. Cependant si l'on considère $C = \{4\}$, la réunion $A \uplus C$ l'est.

RÈGLES OPÉRATOIRES SUR L'INTERSECTION ET LA RÉUNION. Il existe un grand nombre de règles sur les symboles d'union et d'intersection. Nous en citons quelques unes, qui se constatent facilement sur un dessin au besoin, la plupart d'entre elles seront admises mais les preuves ne présentent aucune difficulté.

[a] On rappelle ici que par défaut, en Mathématiques, le « ou » n'est pas exclusif. Ainsi, un élément peut appartenir aux deux ensembles A et B.

Proposition 9 | Règles opératoires

Soit E un ensemble, et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- $A \cap B \subset A$, $\quad A \cap B \subset B$,
- $A \subset A \cup B$, $\quad B \subset A \cup B$.
- **(Commutativité)** $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$,
- **(Associativité)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- **(Distributivité)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Remarque 9 **(Retenir la distributivité : analogie)** Là encore, la distributivité est très proche de celle déjà connue. Imaginez que le symbole $\cup$ est un +, et le symbole $\cap$ un ×. La première formule de distributivité se réécrit alors :

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times B).$$

Exemple 23 Soient A et B deux ensembles, on a alors :

$$\textbf{(i)} \quad A \subset B \iff \textbf{(ii)} \quad A \cup B = B \iff \textbf{(iii)} \quad A \cap B = A.$$

- $\boxed{\textbf{(i)} \implies \textbf{(ii)}}$ Supposons d'abord que $A \subset B$.

  On sait que $B \subset A \cup B$ *De plus, si* $x \in A \cup B$ *alors* x *appartient soit à* A, *soit à* B, *et, comme* $A \subset B$, *si* $x \in A$ *alors* $x \in B$. *Ainsi* $A \cup B \subset B$. *D'où* $A \cup B = B$. *De-même on a* $A \cap B \subset A$. *De plus, si* $x \in A$ *alors, comme* $A \subset B$, $x \in B$, $x \in A \cap B$. *Ainsi* $A \subset A \cap B$. *D'où* $A \cap B = A$. *On a donc montré les implications suivantes :*

  $$A \subset B \implies A \cup B = B \quad \textit{et} \quad A \subset B \implies A \cap B = A.$$

- $\boxed{\textbf{(ii)} \implies \textbf{(iii)}}$ Supposons maintenant que $A \cup B = B$.

  Soit $x \in A$, *alors* $x \in A \cup B$, *d'où* $x \in B$. *Ainsi tout élément de* A *est un élément de* B, *c'est-à-dire* $A \subset B$. *On a donc montré l'implication*

  $$A \cup B = B \implies A \subset B.$$

- $\boxed{\textbf{(iii)} \implies \textbf{(i)}}$ Supposons que $A \cap B = A$.

  Soit $x \in A$, *alors* $x \in A \cap B$. *D'où* $x \in B$. *Ainsi* $A \subset B$. *On a donc montré l'implication*

  $$A \cap B = A \implies A \subset B.$$

Finalement on a bien prouvé les équivalences annoncées.

Complémentaire et différence. On introduit deux dernières opérations sur les ensembles.

Définition 12 | Complémentaire & Différence

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit :

- le *complémentaire de* A *dans* E ou simplement le *complémentaire de* A si le contexte est clair, noté $\overline{A}$, ou parfois $\complement_E A$, par :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- L'ensemble B *privé de* A, noté $B \setminus A$, est défini par :

$$B \setminus A = B \cap \overline{A}.$$

C'est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A.

Exemple 24

- Soient $E = [\![1, 5]\!]$, $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$. Calculer $\complement_E C$ et $\complement_A C$. Que remarque-t-on ?

$$\complement_E C = \{3, 4, 5\} \neq \complement_A C = \{3\}.$$

- Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs est l'ensemble des entiers impairs.

Attention

On portera un grande attention au fait que $\overline{A}$ dépend du sur-ensemble E, ce qui n'est pas apparent dans la notation. Quand le contexte n'est pas absolument clair, il faudra préciser dans quel ensemble on considère le complémentaire. La notation $\complement_E A$ a le mérite de mentionner cette dépendance. Regarder par exemple l'exemple précédent.

Proposition 10

Soit E un ensemble. Alors :

$$\overline{E} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = E, \quad \forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

Théorème 1 | Lois de Morgan

Soit E un ensemble et soit A et B deux sous-ensembles de E. Alors

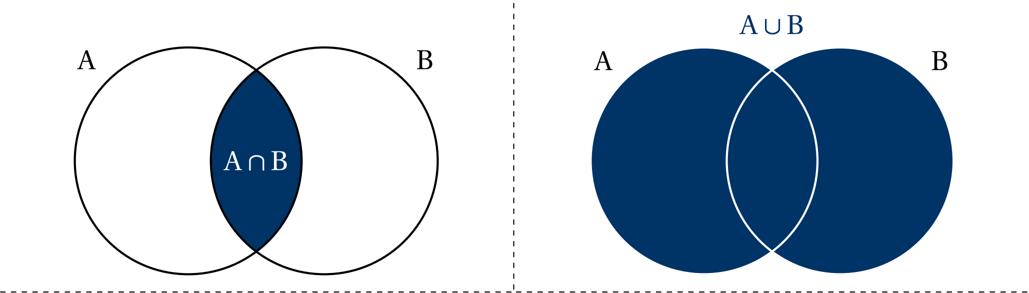
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

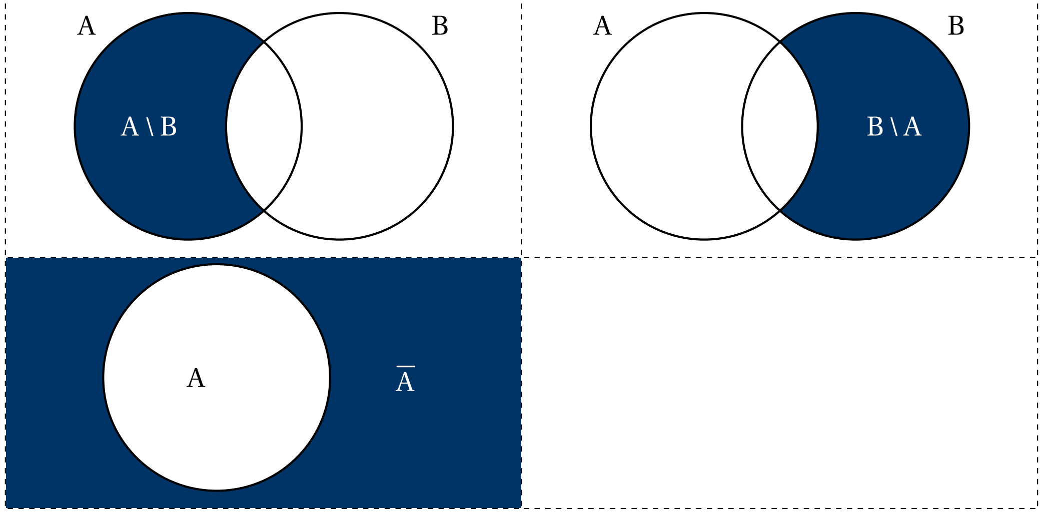
Preuve Montrons uniquement la formule pour $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, c'est-à-dire montrons que :

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

On peut résumer à présent sur des diagrammes, dits de Venn ou de manière moins pompeuse sur des « patates », les différentes notions d'ensembles rencontrées.

Diagrammes des principales opérations ensemblistes





2.3. Produit cartésien

Vous connaissez depuis le collège des produits cartésiens, mais vous n'avez jamais employé le mot. Par exemple, les vecteurs de la géométrie euclidienne peuvent être repérés par un couple abscisse/ordonnée noté (x, y) avec x, y deux réels. L'ensemble de ces couples forme l'ensemble des points du plan, et est noté $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ou encore $\mathbf{R}^2$. Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 13 | Produit cartésien
Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ une collection de n ensembles. Alors on appelle *produit cartésien de* $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ l'ensemble :

$$\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\ x_i \in \mathrm{E}_i\right\}.$$

Plus particulièrement :
- Si $\mathrm{E}_1 = \cdots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$, on note $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n = \mathrm{E}^n$.
- Si $\mathrm{E}_1 = \cdots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$ et $n = 2$ (*resp.* $n = 3$) : les éléments de E^2 (*resp.* E^3) sont appelés les *couples d'éléments de* E (*resp.* les *triplets d'éléments de* E).

Pour le moment nous allons assez peu utiliser cet objet à des fins mathématiques, mais plutôt pour introduire efficacement des variables comme le précise la remarque qui suit.

Remarque 10 (Se servir du produit cartésien pour quantifier des variables) Pour deux ensembles, la notion de produit cartésien possède une intuition géométrique, comme nous l'avons précisé en introduction. La notion de produit cartésien sert souvent aussi à quantifier efficacement des variables. Ainsi, si E, F sont deux ensembles.

écrire «soient $x \in \mathrm{E}, y \in \mathrm{F}$» = Matrice $q \times p$ = «soit $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$»

Si E = F, un abus de notation courant est «soit $x, y \in \mathrm{E}$».[a]

Exemple 25
1. Écrire le produit $\{1, 2, 3\} \times \{0, 1\}$.

2. Dessiner l'ensemble $[0, 1] \times [2, 3[$.

[a] En lieu et place de «soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$»

3. RAISONNEMENTS

3.1. Sur l'existence/unicité de propositions

Cadre
Dans toute cette sous-section, on considère un prédicat $\mathscr{P}(x)$, x appartenant à un ensemble E.

Méthode Montrer/Nier « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ »

- **(Montrer)** Il s'agit de trouver un exemple de $x \in \mathrm{E}$ qui vérifie la propriété $\mathscr{P}(x)$.
- **(Nier)** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que **pour tout** $x \in \mathrm{E}$, $\mathscr{P}(x)$ est fausse.

Exemple 26 Montrer que : $\exists x \in [0,3], \quad x^2 - 3x + 2 < 0.$

Remarque 11 Parfois, on pourra faire appel à un théorème qui prouvera l'existence d'un x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ sans pour autant donner d'expression de x (par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'un nombre x tel que $f(x) = 0$ si f est une fonction).

Méthode Montrer/Nier « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ »

- **(Montrer)**
  1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. La rédaction type est donc : « *Soit x un élément de* E, *montrons* $\mathscr{P}(x)$ ».
  2. On démontre que $\mathscr{P}(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent *toutes* par « Donc » ou « Or » (ou des connecteurs logiques).
     — Une phrase qui commence par « Donc » signifie qu'on fait une déduction.
     — Une phrase qui commence par « Or » signifie qu'on rappelle :
       — soit une hypothèse de l'énoncé,
       — soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.
  3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : « En conclusion, $\mathscr{P}(x)$ est vraie. ».
- **(Nier)** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer qu'**il existe** $x \in \mathrm{E}$, telle que $\mathscr{P}(x)$ soit fausse.

Exemple 27 Montrer que : $\forall x \geqslant 1, \quad x^2 \geqslant x.$

Méthode Montrer/Nier « $\exists ! x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ »

- **(Montrer)**
  1. Existence On montre l'existence d'un x vérifiant la propriété comme précédemment.
  2. Unicité
     — Soit on montre que la manière dont on a construit l'élément x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre choix.
     — Soit on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $\mathscr{P}(x_1)$ et $\mathscr{P}(x_2)$ sont vraies, et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ». La rédaction type est donc : « *Soient* x_1, x_2 *deux éléments de* E, *montrons que* $x_1 = x_2$ ».
- **(Nier)** Soit on justifie que l'existence est en défaut (voir les méthodes précédentes), soit que l'unicité est en défaut : auquel cas, on se cherche $x_1, \neq x_2 \in \mathrm{E}$ de sorte que $\mathscr{P}(x_1), \mathscr{P}(x_2)$ soient vraies.

Remarque 12 L'existence et l'unicité peuvent aussi être démontrés d'un coup. Par exemple, en invoquant le théorème de la bijection pour les fonctions (voir cours de Terminale), on arrive à justifier l'existence et l'unicité de solutions à une équation.

Les exemples de ce type de preuve seront nombreux en fin d'année (notamment en Algèbre linéaire).

3.2. Sur les ensembles

Cadre

Dans toute cette sous-section, on considère deux ensembles A, B inclus dans un ensemble E.

Méthode Montrer/Nier « $A \subset B$ »

- **(Montrer)** Pour montrer que $A \subset B$, on se fixe $a \in A$ quelconque et on montre que $a \in B$. Autrement dit, on montre que tout élément de A est élément de B. La rédaction type est donc « Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$ ».
- **(Nier)** Il s'agit de montrer qu' **il existe** $a \in A$, tel que $a \notin B$.

Méthode Montrer/Nier « $A = B$ »

- **(Montrer)** On a deux possibilités.
  — **(Par double inclusion)** On montre souvent *via* deux étapes, avec une *double inclusion*, que $A \subset B$ et $B \subset A$.
  — **(Par équivalences)** On montre parfois l'équivalence ci-après :

$$x \in A \iff x \in B.$$

- **(Nier)** Il s'agit de montrer $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$ (voir la méthode précédente).

Exemple 28 Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y = 0, z = 0\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0, x - y + 3z = 0\}$. Montrer que : $A = B$.

Exemple 29 On note $A = \{x \in \mathbf{R} \longmapsto \lambda x \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ l'ensemble des fonctions linéaires, et B l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que $A \subsetneq B$.

3.3. Démonstration par disjonction de cas

Méthode Disjonction de cas

On sépare la démonstration d'une propriété en sous-cas, chacun de ces sous-cas (qui doivent, bien sûr, recouvrir l'ensemble des possibilités) permettant d'exploiter des informations supplémentaires débloquant le raisonnement.

Exemple 30 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Exemple 31 Montrer que : $\forall a, b \in \mathbf{R}, \quad \max(a, b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.[a]

3.4. Sur les liens logiques entre propositions

Cadre
Dans toute cette sous-section, on considère deux propositions logiques P, Q.

3.4.1. Implication

Rappel 1 Rappelons que nous avions montré que $P \implies Q$ est équivalente à $\neg Q \implies \neg P$. Nous avions appelé cette implication l'« implication contraposée ».

Méthode Démontrer par contraposée
Pour montrer $P \implies Q$, on peut aussi montrer $\neg Q \implies \neg P$. La rédaction type est donc « Supposons Q fausse, montrons que P est fausse ».

[a] On rappelle que pour $x \in \mathbf{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$ Par exemple, $|2| = 2$ et $|-3| = 3$ (car $-3 < 0$ et $-(-3) = 3$). Par ailleurs, étant donnés a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand élément entre a et b. Par exemple : $\max(1, 3) = 3$.

Exemple 32 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. Qu'en déduit-on ?

Une autre rédaction du raisonnement par contraposition (où la propriété P n'est pas explicitée au départ) est le raisonnement *par l'absurde*.

Méthode Démontrer par l'absurde
On veut montrer une proposition Q. On suppose que Q est fausse, et on montre que cela implique une proposition qui est fausse (ou « absurde »), notée P'. Cela prouve que Q était vraie.

En effet, si on montre $\neg Q \implies P'$ alors par contraposition $\neg P' \implies Q$. Puisque $P = \neg P'$ est vraie et que $P \implies Q$, cela prouve bien que Q est vraie.

Exemple 33 Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}, \quad \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Méthode **Montrer/Nier** «$P \Longrightarrow Q$»

- **(Montrer)**
  - **(1ère méthode)** Par preuve directe,
  - **(2ème méthode)** ou par l'absurde ou contraposée.
- **(Nier)** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que P est vraie alors que Q est fausse.

Exemple 34 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.

Méthode **Montrer/Nier** «$P \Longleftrightarrow Q$»

- **(Montrer)**
  - **(1ère méthode)** par double implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$,
  - **(2ème méthode)** ou par équivalences successives $P \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow Q$.
- **(Nier)** Il s'agit de montrer que l'une des deux implications est fausse.

Exemple 35 Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que : $(4x(x-1) = -1) \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Exemple 36 Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Démontrer que :

$$f \text{ est paire et impaire } \Longleftrightarrow f \text{ est la fonction nulle.}$$

Considérons P_1, P_2, P_3 trois propositions logiques.

Méthode **Montrer** $P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow P_3$

Il faut et il suffit de montrer :

$$P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow P_3 \Longrightarrow P_1.$$

3.5. Par récurrence

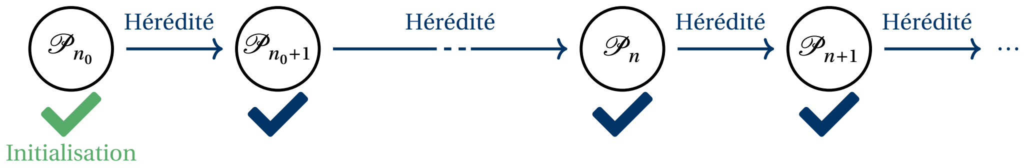
Il en existe différents types, l'objectif étant de démontrer des prédicats dépendant d'un entier n, naturel ou même relatif. Les raisonnements par récurrence seront principalement fondés sur la propriété de transitivité de l'implication $\Longrightarrow$.

Attention
On ne fait **jamais** de récurrence pour prouver une propriété qui dépend d'un nombre réel.

Théorème 2 | Principe de récurrence simple
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. Supposons que :

- **(Initialisation)** $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,
- **(Hérédité)** $\forall n \geqslant n_0, \quad \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.



Remarque 13

- Le principe de récurrence peut être vu comme le jeu qui consiste à faire tomber des dominos en cascade : pour que cela fonctionne, il faut s'assurer que chaque domino soit placé de sorte qu'il entraîne le suivant dans sa chute, c'est l'hérédité, et il faut aussi faire tomber le premier domino, c'est l'initialisation.
- Le raisonnement par récurrence est adapté à tous les objets mathématiques définis par récurrence (suites récurrentes par exemple). Le plus souvent, on vérifiera l'initialisation au rang $n_0 = 0$.

Exemple 37 **(Terme général de suite récurrente à 1 pas)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par récurrence par

$$u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n): \quad u_n = 1 - 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

Initialisation.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = 1$.

Exemple 38 **(Divisibilité)** Montrons que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $13^n - 4^n$ est un multiple de 9, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathscr{P}(n): \quad \text{« } \exists k_n \in \mathbf{Z}, \quad 13^n - 4^n = 9k_n \text{ » est vraie.}$$

Initialisation. $13^0 - 4^0 = 0 = 0 \times 9$, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie en choisissant $k_0 = 9$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $13^n - 4^n = 9k_n$ pour un certain $k_n \in \mathbf{Z}$, et on va montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $k_{n+1} \in \mathbf{Z}$ tel que : $13^{n+1} - 4^{n+1} = 9k_{n+1}$. Or,

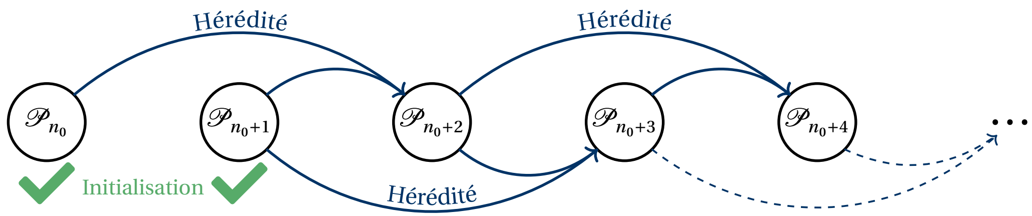
$$\begin{aligned} 13^{n+1} - 4^{n+1} &= (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= 9 \times 13^n + 4 \times \left(13^n - 4^n\right) \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= 9 \times 13^n + 4 \times 9k_n \\ &= 9\,\underbrace{(13^n + 4k_n)}_{:=k_{n+1}}. \end{aligned}$$

Il est clair que 9×13^n est un multiple de 9 et, par hypothèse $13^n - 4^n$ est un multiple de 9. Ainsi $13^{n+1} - 4^{n+1}$ est bien un multiple de 9.

On a donc montré que $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$.
Par récurrence on ainsi montré que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $13^n - 4^n$ est un multiple de 9.

Méthode Rédaction d'une récurrence simple

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbf{N}$.
1. Initialisation : montrer $\mathscr{P}(n_0)$.
2. Hérédité : « Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. »
[…] « Alors : par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ ».



Attention à la rédaction d'une récurrence

- Dans l'hérédité, on n'écrit **surtout pas** « Supposons que pour tout n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie » — sinon la récurrence est terminée, c'est justement ce que l'on veut montrer.
- Une erreur moins grave à présent, mais c'est incorrect : « Supposons $\mathscr{P}(n)$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$. » Le problème est que la bonne traduction de « pour un certain $n \in \mathbf{N}$ » est « $\exists n$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie », ce qui ne correspond pas au principe de récurrence.

Théorème 3 | Principe de récurrence double

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. Supposons que :
- **(Initialisation double)** $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **(Hérédité)** $\forall n \geqslant n_0+1, \quad \mathscr{P}(n-1) \wedge \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.

Remarque 14
- Dans cette seconde version de la récurrence, on « gagne » finalement dans l'hérédité (on peut supposer en hypothèses deux propriétés) mais on y « perd » dans l'initialisation puisqu'il faut montrer deux propriétés.
- On peut aussi très bien supposer dans l'hérédité $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ et montrer $\mathscr{P}(n+2)$, à voir en fonction du contexte ce qui est le plus intuitif.

Exemple 39 **(Terme général de suite récurrente à 2 pas)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Initialisation.
Les propriétés $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont manifestement vraies par définition de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que les propriétés $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et on va monter qu'alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
On sait que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, or, par hypothèse de récurrence, $u_n = 1$ et $u_{n+1} = 1$, ainsi :

$$u_{n+2} = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

La propriété $\mathscr{P}(n+2)$ est donc vraie.
Par principe de récurrence double, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$.

Remarque 15 Une récurrence double peut aussi être rédigée avec une récurrence simple sur $\mathbf{P}(n)$ « $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ », mais cela paraît moins naturel. Voir l'exemple ci-après.

Exemple 40 **(Récurrence doubles ↔ Récurrence simple)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

<table>
<tr><th>Récurrence double</th><th>Récurrence simple</th></tr>
<tr><td>
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\mathscr{P}_n : \quad u_n = 3^n.$$

Initialisation. On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1}$ sont vérifiées.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\boxed{\mathscr{P}_n, \mathscr{P}_{n+1}}$ sont vérifiées, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ &= (2+1) \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+2}$ est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
</td><td>
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\mathbf{P}_n : \quad u_n = 3^n, u_{n+1} = 3^{n+1}.$$

Initialisation. On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathbf{P}_0}$ est bien vérifiée.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\boxed{\mathbf{P}_n}$ est vérifiée, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ &= (2+1) \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbf{P}_{n+1}$ est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
</td></tr>
</table>

Exemple 41 Rédiger l'Exemple 39 précédent à l'aide d'une récurrence simple.

Théorème 4 | Principe de récurrence forte

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$, et $n_0 \in \mathbf{N}$. Supposons que :

- **(Initialisation)** $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies.
- **(Hérédité)** $\forall n \geqslant n_0, \left(\mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1) \wedge \ldots \wedge \mathscr{P}(n)\right) \implies \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.

Remarque 16 Finalement, on peut toujours utiliser une récurrence forte en lieu et place d'une double. Dans le cas d'une récurrence forte, on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang ambiant alors que dans le cas d'une récurrence double on la suppose vraie aux deux rangs précédents.

Exemple 42 **(Suite définie par tous ses termes précédents)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n) : \quad u_n = 2^{n-1}$, pour $n \in \mathbf{N}^\star$.

Initialisation.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on suppose que les propriétés $\mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies et on va monter qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence forte, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.

Dans tous ces exemples, nous avons introduit une notation pour les différentes propriétés. Avec un peu plus d'expérience, vous ne le ferez plus. Notez le point ci-après, qui est très important.

4. EXERCICES

4.1. Logique et quantificateurs

Exercice ALG1.1 | (Solution : 31) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geq 0.$
2. $\exists y \in \mathbf{R},\ y \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \exists y \in \mathbf{R},\ x = y^2.$
4. $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}^+,\ x = y^2.$
5. $\exists x \in \mathbf{R}^+,\ \forall y \in \mathbf{R},\ x = y^2.$
6. $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ x + y > 0.$
7. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x + y > 0.$
8. $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ x + y > 0.$

Exercice ALG1.2 | **Propositions sur les suites** (Solution : 31) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par $m \in \mathbf{R}$.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée.

Exercice ALG1.3 | **Propositions sur les fonctions** (Solution : 31) Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application f est croissante.
2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f ne s'annule jamais.
5. La fonction f est inférieure à la fonction g.
6. La fonction f est périodique.

Exercice ALG1.4 | (Solution : 31) Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leqslant x < y$.
2. $(x^2 = 1, x \in \mathbf{R}^+) \Longrightarrow x = 1$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall x' \in \mathbf{R}$, $(x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

4.2. Ensembles

Exercice ALG1.5 | (Solution : 31) Montrer que

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 2x+y=1\right\} = \{(x, 1-2x),\ x \in \mathbf{R}\}.$$

Représenter graphiquement cet ensemble.

Exercice ALG1.6 | (Solution : 32) On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$:

$$\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x-y=2\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, (3x+y+2)(x+2y+4) \geq 0\right\}.$$

Montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. A-t-on égalité ?

Exercice ALG1.7 | (Solution : 32) Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \iff \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}.$$

Exercice ALG1.8 | (Solution : 32) Soit E un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante :

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}, \quad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \Longrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

Exercice ALG1.9 | (Solution : 32) Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \iff \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{C}.$$

Exercice ALG1.10 | (Solution : 33) Soit $\mathrm{E} = \{1\}$. Déterminer $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathrm{E}))$.

4.3. Raisonnements : implication, équivalence

Exercice ALG1.11 | (Solution : 33) On considère les deux propositions suivantes :

- A : « m et n sont deux entiers pairs », et
- B : « $m+n$ est un entier pair ».

A-t-on : $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$? $\mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{A}$? $\mathrm{A} \iff \mathrm{B}$?

Exercice ALG1.12 | (Solution : 33) Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0,\ y = 0.$$

Exercice ALG1.13 | (Solution : 33) Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x+y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice ALG1.14 | (Solution : 33) Soit $x \in \mathbf{R}^+$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad x \leqslant \varepsilon \Longrightarrow x = 0.$$

Exercice ALG1.15 | (Solution : 33) On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, si n^2 est pair alors n pair. En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

4.4. Raisonnement par récurrence

Exercice ALG1.16 | (Solution : 34) Soit $a \in \mathbf{R}^+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Exercice ALG1.17 | (Solution : 34) Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $n^2 \leqslant 2^n$.

Exercice ALG1.18 | (Solution : 34) On définit une suite (u_n) par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Exercice ALG1.19 | (Solution : 35) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par ses termes impairs et pairs :

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\, u_{2n} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\, u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}.$$

Conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, puis l'établir par récurrence.

4.5. Solutions des exercices

Solution (exercice ALG1.1)

(Énoncé : 28) Étude de chaque assertion :

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x = -1$.
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R},\ x < 0$.
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y = 1$.
   Négation : $\forall y \in \mathbf{R},\ y < 0$.
3. Vrai : soit $x \in \mathbf{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R}^+,\ \forall y \in \mathbf{R},\ x \neq y^2$.
4. Faux : soit $y \in \mathbf{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R}^+,\ x \neq y^2$.
5. Faux : soit $x \in \mathbf{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \exists y \in \mathbf{R},\ x \neq y^2$.
6. Faux : soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$ est faux. Il suffit pour cela de prendre y tel que $x + y \leqslant 0$ c'est-à-dire $y \leqslant -x$. Prenons par exemple $y = -x - 1$. On a alors $x + y = -1 \leqslant 0$. Donc on a bien un contre-exemple.
   Négation : $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$.
7. Vrai : soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$, c'est-à-dire $y > -x$. Prenons par exemple $y = -x + 1$. On a bien alors $x + y = 1 > 0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$.
8. Faux : on peut prendre comme contre-exemple $x = -1$ et $y = -2$. Alors $x + y = -3 < 0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$.

Solution (exercice ALG1.2)

(Énoncé : 28) Étude de chaque propriété :

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
   Négation : $\exists n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} < u_n$.
2. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} < u_n$
   Négation : $\exists n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
3. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0$
   Négation : $\exists n \in \mathbf{N},\ u_n \neq u_0$
4. $\exists \mathrm{M} \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$
   Négation : $\forall \mathrm{M} \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n > \mathrm{M}$.
5. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq m$
   Négation : $\exists n \in \mathbf{N},\ u_n < m$.
6. $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq m$
   Négation : $\forall m \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ u_n < m$.

Solution (exercice ALG1.3)

(Énoncé : 28) Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2\ \left(a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)\right)$
   Négation : $\exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a \leqslant b$ et $f(a) > f(b)$.
2. $\exists x \in \mathbf{R}^+, f(x) \geq 0$
   Négation : $\forall x \in \mathbf{R}^+, f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, f(-x) \neq f(x)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leqslant g(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) > g(x)$.
6. $\exists \mathrm{T} \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x + \mathrm{T}) = f(x)$
   Négation : $\forall \mathrm{T} \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x + \mathrm{T}) \neq f(x)$.

Solution (exercice ALG1.4)

(Énoncé : 28)

1. L'inégalité $1 \leqslant x < y$ correspond à $1 \leqslant x$ et $x < y$. Or la négation de (A et B) est (non A) ou (non B). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x < 1 \text{ ou } x \geq y.}$
2. La négation de P $\Longrightarrow$ Q est (P et (non Q)). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x^2 = 1, x \in \mathbf{R}^+ \text{ et } x \neq 1.}$
3. La négation est : $\boxed{\exists x \in \mathbf{R}, \exists x' \in \mathbf{R} : x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x').}$

Solution (exercice ALG1.5)

(Énoncé : 29) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Ainsi, par définition de $\mathbf{Q}$, il existe $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^\star$, tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible. On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbf{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible. Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}}$.

Solution (exercice ALG1.6)

(Énoncé : 29)

- Montrons que $A \subset B$: soit $(x,y) \in A$, montrons que $(x,y) \in B$. Par définition de l'ensemble A, on sait que $y = x-2$. Pour montrer que $(x,y) \in B$, vérifions que : $(3x+y+2)(x+2y+4) \geq 0$. On a :
$$(3x+y+2)(x+2y+4) = (3x+x-2+2)(x+2x-4+4) = 4x \times 3x = 12x^2 \geq 0.$$
Ainsi on a bien que $(x,y) \in B$ et on vient de montrer que $\boxed{A \subset B}$.
- On veut montrer que l'on n'a pas égalité. Il suffit de trouver un couple $(x,y) \in B$ tel que $(x,y) \notin A$. Par exemple $(1,0)$ est bien dans l'ensemble B mais il n'est pas dans l'ensemble A.

Solution (exercice ALG1.7)

(Énoncé : 29) Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin C$. On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. On doit étudier deux cas :

- Si $x \in A$: on a alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Donc : $A \cap B \neq A \cap C$.
- Soit $x \notin A$: on a alors $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$. Donc : $A \cup B \neq A \cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Par contraposée, on a donc montré que : $\boxed{(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C}$.

Solution (exercice ALG1.8)

(Énoncé : 29) Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin C$. On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. On doit étudier deux cas :

- Si $x \in A$: on a alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Donc : $A \cap B \neq A \cap C$.
- Soit $x \notin A$: on a alors $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$. Donc : $A \cup B \neq A \cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Par contraposée, on a donc montré que : $\boxed{(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C}$.

Solution (exercice ALG1.9)

(Énoncé : 29) On doit montrer une équivalence, on raisonne donc par double implication.

- On commence par exemple par supposer que $B \subset A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$. Comme $B \subset A$, on a : $A \cup B = A$ (faire un dessin pour le voir). De même, comme $A \subset C$, on a : $A \cap C = A$. Ainsi, on a : $A \cup B = A = A \cap C$. Ainsi on a montré l'implication directe.
- On suppose alors que $A \cup B = A \cap C$. Montrons que $B \subset A \subset C$:

— On montre d'abord que $B \subset A$: Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in A$. On a bien montré que $B \subset A$.

— On montre ensuite que $A \subset C$: Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in C$. On a bien montré que $A \subset C$.

Ainsi on a montré que $B \subset A \subset C$ et on a démontré l'implication réciproque.

Par double implication, on a bien montré que $\boxed{(A \cup B = A \cap C) \iff B \subset A \subset C.}$.

Solution (exercice ALG1.10)

(Énoncé : 29) oit $E = \{1\}$. On a $\boxed{\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}}$. Puis, on obtient : $\boxed{\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{1, \emptyset\}\}}$.

Solution (exercice ALG1.11)

(Énoncé : 29) On a $\boxed{A \implies B}$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc $m + n = 2k + 2k' = 2(k + k')$, ce qui implique $m + n$ pair.

Le sens réciproque est faux, $\boxed{\text{B n'implique pas A}}$. Pour contre exemple on peut choisir $m = 3$ et $n = 5$. On a $3 + 5 = 8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.

On en déduit donc que $\boxed{\text{l'équivalence est fausse}}$.

Solution (exercice ALG1.12)

(Énoncé : 29) On montre l'équivalence par double implication. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. On a alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. Ainsi, on a montré que $(x = 0 \text{ et } y = 0) \implies (x^2 + y^2 = 0)$.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ On raisonne par contraposée. On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
  — Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2 > 0$, et de plus $y^2 \geq 0$. Donc par somme $x^2 + y^2 > 0$, et donc $x^2 + y^2 \neq 0$.
  — Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2 + y^2 \neq 0$.
  Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : on a bien démontré que

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0).}$$

Solution (exercice ALG1.13)

(Énoncé : 29) On cherche à montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x + y > 2 \implies x > 1 \text{ ou } y > 1).$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Par contraposée, on suppose que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x + y \leqslant 2$. Donc non$(x + y > 2)$ est vérifiée.

Conclusion : par contraposée, on a bien démontré

$$\boxed{(x + y > 2) \implies (x > 1 \text{ ou } y > 1.)}$$

Solution (exercice ALG1.14)

(Énoncé : 29) Soit $x \in \mathbf{R}^+$, on raisonne par contraposée. On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x > 0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$.

En faisant un dessin, on remarque qu'il suffit de prendre (par exemple) $\varepsilon = \frac{x}{2}$. En effet, on a alors bien $\varepsilon > 0$ car $x > 0$ et $x > \frac{x}{2}$ (car $x > 0$) donc on a aussi $x > \varepsilon$. D'où par contraposition :

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0, \, x \leqslant \varepsilon) \implies x = 0.}$$

Solution (exercice ALG1.15)

(Énoncé : 29) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Ainsi, par définition de $\mathbf{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^{\star}$, tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible. On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbf{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible. Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}}$.

Solution (exercice ALG1.16)

(Énoncé : 29)

Initialisation. Pour $n = 0$, la propriété est $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1$, elle est donc vérifiée.

Hérédité. Supposons-là vraie au rang n, c'est-à-dire $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. Alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) && \textit{hypothèse de réc}\\ &= (1+a)(1+na)\\ &\geqslant 1 + na + a + na^2 && na^2 \geqslant 0\\ &\geqslant 1 + (n+1)a + 0.\end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na}.$$

Solution (exercice ALG1.17)

(Énoncé : 29)

Initialisation. Pour $n = 4$, la propriété est $4^2 = 16 \leqslant 2^4 = 16$. Elle est donc vérifiée.

Hérédité. Supposons-là vraie en un rang $n \geqslant 4$, c'est-à-dire que $n^2 \leqslant 2^n$. Alors en multipliant l'hypothèse de récurrence par 2, on déduit :

$$2n^2 \leqslant 2^{n+1}.$$

Il suffit alors d'établir que $(n+1)^2 \leqslant 2n^2$, cela impliquera que $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Mais

$$\begin{aligned}(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant 2n^2 &\iff 2n + 1 \leqslant n^2\\ &\iff 0 \leqslant n^2 - 2n - 1.\end{aligned}$$

De plus, le discriminant de $x \longmapsto x^2 - 2x - 1$ est 8, donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - 2x - 1 = \left(x - (1+\sqrt{2})\right)\left(x - (1-\sqrt{2})\right).$$

Mais, $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$, le trinôme précédent est positif à l'extérieur des racines, et $n \geqslant 4$ donc $n^2 - 2n - 1$ est positif. C'est terminé. Par principe de récurrence, on a établi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad n^2 \leqslant 2^n}.$$

Solution (exercice ALG1.18)

(Énoncé : 29) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété : $\mathscr{P}(n) : u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Initialisation. pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

- D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^1 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^2 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n et $n+1$, vérifions que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$. Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2^{n+2}+(-1)^{n+1}+2(2^{n+1}+(-1)^n) \\ &= 2^{n+2}+(-1)^{n+1}+2^{n+2}+2(-1)^n \\ &= 2^{n+2}(1+1)+(-1)^n(-1+2) \\ &= 2^{n+3}+(-1)^n. \end{aligned}$$

Or $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n$. Ainsi on a : $u_{n+2}=2^{n+3}+(-1)^{n+2}$, et $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad u_n=2^{n+1}+(-1)^n.$$

Solution (exercice ALG1.19)

(Énoncé : 29)

- $A=\dfrac{7!}{6!}=\dfrac{7\times 6!}{6!}=\boxed{7}$
- $B=\dfrac{3\times 4!}{(3!)^2}=\dfrac{3\times 4\times 3!}{3!\times 3\times 2}=\boxed{2.}$
- $C=\dfrac{n!}{(n-1)!}=\dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!}=\boxed{n.}$
- $D=\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}=\dfrac{(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{(n-3)!}=\boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E=\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}+\dfrac{n!}{(n-1)!}=(n+1)n(n-1)+n=n(n^2-1+1)=\boxed{n^3.}$

Chapitre ALG2.

Nombres Réels & Trigonométries

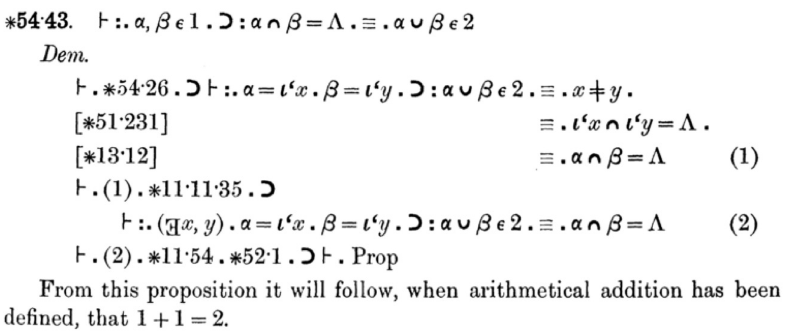
Résumé & Plan

Ce chapitre consiste essentiellement en des rappels des notions vues par le passé. Afin de ne pas se limiter à des exemples simplistes on sera parfois amené à utiliser des notions et propriétés vues au lycée qui ne seront rappelées qu'après.

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

— Galilée

Nous supposerons construit l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ainsi que les sous-ensembles usuels des rationnels, entiers *etc.*. Mais tout ceci cache des difficultés auxquelles les mathématiciens se sont frottées pendant longtemps : celle de la construction de ces ensembles. Par exemple, qu'est-ce que l'entier 1, 2 *etc.* ? Dans le livre *Principia Mathematica* (1910), il faut environ 300 pages à WHITEHEAD et RUSSEL pour démontrer que $1+1=2$.



$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Nous ne nous poserons évidemment pas de telles questions ici.

1. OPÉRATIONS DE BASES

1.1. Addition & Multiplication

L'ensemble $\mathbf{R}$ est muni de deux *lois internes* : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$. Pourquoi les qualifier d'internes ? Car elles prennent en argument deux réels et elles renvoient un autre réel, on reste donc « dans l'ensemble $\mathbf{R}$ » :

$$+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad \times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Rappelons quelques propriétés de la loi additive.

Proposition 1 | Propriétés de l'addition

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$. Alors :

- **(Interne)** $x + y \in \mathbf{R}$,
- **(Associativité)** $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- **(Commutativité)** $x+y = y+x$.
- **(Élément neutre)** $x+0 = 0+x = x$. On dit que 0 est un *élément neutre* pour l'addition.
- **(Élément opposé)** $x+(-x) = 0$. On dit que $-x$ est *l'élément opposé de x* pour l'addition.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$. Alors :

- $x \times y \in \mathbf{R}$,
- **(Associativité)** $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- **(Commutativité)** $x \times y = y \times x$.
- **(Élément neutre)** $x \times 1 = 1 \times x = x$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication.
- **(Élément inverse)** Si $x \neq 0$, alors $x \times \frac{1}{x} = 0$. On dit que $\frac{1}{x}$ est *l'élément inverse de x* pour la multiplication.
- **(Distributivité)** $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

Remarque 1 Il existe un vocabulaire — mais [H.P] en BCPST — pour les ensembles munis de lois. Ici, avec les propriétés précédentes :

- $(\mathbf{R}, +)$ est qualifié de *groupe commutatif*,
- $(\mathbf{R}, +, \times)$ est qualifié de *corps commutatif*.

1.2. Rappels de calcul fractionnaire

Personne dans la classe n'a envie de commettre des erreurs de calculs de fractions, mais on rappelle certaines règles par précaution. Ceci sera repris dans le formulaire de calcul en annexe.

Proposition 3 | Calcul fractionnaire

Soient $((a,c),(b,d)) \in \mathbf{Z}^2 \times (\mathbf{N}^*)^2$. Alors :

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$,
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$,
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,
- si $c \neq 0$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$.

Exemple 1

1. $\dfrac{13}{28} + \dfrac{5}{42} = \dfrac{13}{2\times 14} + \dfrac{5}{3 \times 14} = \dfrac{49}{2\times 3\times 14} = \dfrac{7}{12}$.
2. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x+e^x}{x} = \dfrac{x\left(1+\frac{e^x}{x}\right)}{x \times 1} = 1 + \dfrac{e^x}{x}$.
3. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x^3 + x\ln(x) - 2}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{x\ln(x)}{x} + \dfrac{-2}{x} = x^2 + \ln(x) - \dfrac{2}{x}$.
4. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2 e^x}{x} = \dfrac{x^2}{x} e^x = xe^x$.
5. Pour tout $t \neq 0$, $\dfrac{\frac{1}{2}\left(t+\frac{3}{t}\right)}{t} = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{3}{t}\right)\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{t^2}\right)$.

On rappelle également les grossières erreurs ci-après, à ne plus commettre bien sûr.

Attention

$\dfrac{a+c}{b+c} \neq \dfrac{a}{b}$: on ne simplifie **PAS** dans le cas d'une addition, $\dfrac{a}{b+c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$: on ne sépare **PAS** une somme au dénominateur.

De plus certaines fractions possèdent une forme particulière, dite *irréductible*.

Théorème 1 | Forme irréductible d'un rationnel

Tout nombre rationnel non nul peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$ et p et q premiers entre eux (*i.e.* qui ont 1 pour seul diviseur commun). Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbf{Q}^*, \exists!\,(p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*,\ x = \frac{p}{q} \text{ et } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}^{a}$$

Dans la pratique, pour obtenir la forme irréductible, on divise numérateur et dénominateur par le plus grand diviseur commun.

Exemple 2 Mettre sous forme irréductible $\dfrac{495}{60}$.

$\dfrac{5\times 99}{60} = \dfrac{33}{4}$.

1.3. Rappels sur les égalités et inégalités

Notation

On note $x \leqslant y$ lorsque $x - y \leqslant 0$, et $x < y$ lorsque $x - y < 0$. On définit de manière analogue $x \geqslant y, x > y$.

Pour comparer deux quantités, on peut faire leur différence et étudier son signe, sauf si la comparaison est évidente. De plus, deux réels se comparent toujours : on dit que $\mathbf{R}$ est *totalement ordonné*.

Proposition 4 | Propriétés de $\leqslant$

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$. Alors :

- **(Réflexivité)** $x \leqslant x$.
- **(Anti-symétrie)** $x \leqslant y,\quad y \leqslant z \iff x = y$.
- **(Transitivité)** $x \leqslant y,\quad y \leqslant z \implies x \leqslant z$.

Manipulation d'égalités et d'inégalités. On va rappeler dans ce paragraphe les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et inégalités sur $\mathbf{R}$ vues dans les classes antérieures.

[a] On rappelle que cela signifie qu'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1

Proposition 5 | Manipulations d'égalités & d'inégalités

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$.

- **(Additionner/ $=$)** $x = y \iff x + z = y + z$.
- **(Multiplier $=$)** Si de plus $z \neq 0$, alors $x = y \iff xz = yz$.
- **(Équation produit)** $xy = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0$.
- **(Signe d'un produit)**

$$xy \geqslant 0 \quad (\textit{resp.} \leqslant 0) \iff \left\{ \begin{array}{ll} x, y & \text{sont de même signe} \\ & (\textit{resp.}\ \text{signe opposé}) \end{array} \right. .$$

- **(Additionner/ $\leqslant$)** $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$.
- **(Multiplier $\leqslant$)** Si de plus $z > 0$, alors :

$$x \leqslant y \iff xz \leqslant yz.$$

Si de plus $z < 0$, alors :

$$x \leqslant y \iff xz \geqslant yz.$$

- **(Multiplier/Additionner des inégalités)** Soit de plus $t \in \mathbf{R}$. Alors :

$$x \leqslant y, \quad z \leqslant t \implies x + y \leqslant y + t.$$

$$0 \leqslant x \leqslant y, \quad 0 \leqslant z \leqslant t \implies 0 \leqslant xy \leqslant yt.$$

- On peut donc multiplier une égalité **par une quantité strictement positive**, et ajouter/soustraire par le même terme de chaque côté.
- Le signe d'un produit de deux éléments permet de caractériser le signe de chaque terme du produit.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement positive**.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement négative en inversant le sens de l'inégalité**.
- On peut donc additionner deux inégalités, et les multiplier sous réserve qu'elles ne fassent intervenir que des nombres réels positifs.

Bien entendu, toutes ces propriétés s'adaptent à des inégalités strictes. Un récurrence évidente permet alors d'aboutir à la proposition ci-après.

Proposition 6 | Sommer des inégalités

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels, et $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant y_i \implies \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Exemple 3 Soit $n \geqslant 1$. Montrer, en utilisant la proposition précédente, que : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 1$.

Attention

- On ne soustraie pas des inégalités. Si on veut encadrer $x - y$, on peut encadrer x et encadrer y puis sommer. Par exemple $-1 \leqslant 1 \leqslant 2$, $\quad 0 \leqslant 1 \leqslant 2$ et on a clairement pas $-1 - 0 \leqslant 2 - 1 \leqslant 0$!
- Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens aussi, puisque diviser par un négatif revient à multiplier par son inverse (qui sera négatif).

Composition d'inégalités par une fonction monotone. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Rappelons que :

- f est dite *croissante* (*resp. strictement*) sur D si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \leqslant y, \quad \implies \quad f(x) \leqslant (\textit{resp.} <) f(y).$$

Autrement dit si on peu appliquer f à une inégalité en conservant l'ordre.

- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur D si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \leqslant y, \quad \implies \quad f(x) \geqslant (\textit{resp.} >) f(y).$$

Autrement dit si on peu appliquer f à une inégalité en inversant l'ordre.

Ainsi, la monotonie d'une fonction permet de manipuler des inégalités.

Exemple 4

- $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \leq y \iff e^x \leq e^y.$
- $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \iff \ln(x) \leq \ln(y).$
- $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+)^2, \quad x \leq y \iff x^2 \leq y^2.$
- $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}.$

Attention

Il est **faux** de dire que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \leq y \implies x^2 \leq y^2$$

car $a \mapsto a^2$ n'est pas monotone sur $\mathbf{R}$. En revanche, il est **juste** de dire :

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^+)^2, \quad x \leq y \implies x^2 \leq y^2.$$

On termine enfin avec une notation qui sert parfois.

Définition 1 | Max / Min

Soient $x, y \in \mathbf{R}$, on définit alors

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant y, \\ y & \text{sinon} \end{cases} \qquad \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geqslant y, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4. Puissances (entières)

Définition 2 | Puissances entières

Soit $x \in \mathbf{R}$, on note x^2 le réel $x \times x$. Pour $n \in \mathbf{N}$ on définit par récurrence le réel x^n par :

$$x^0 = 1 \quad x^1 = x \quad x^{n+1} = x \times x^n.$$

Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}$ on définit x^{-n} par : $\quad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}.$

De manière plus explicite, on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}, \quad x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}}.$$

De manière générale, nous serons capable de définir ultérieurement x^α avec $x > 0, \alpha \in \mathbf{R}$ mais il faudra attendre les rappels sur la fonction exponentielle et le logarithme. Étudions quelques propriétés du carré d'un nombre réel.

Proposition 7 | Règles sur les puissances

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et $(n,p) \in \mathbf{Z}^2$ de sorte que les puissances ci-après soient définies. Alors :

- $x^{n+p} = x^n \times x^p \quad (x^n)^p = x^{n \times p} \quad (x \times y)^n = x^n \times y^n.$
- Si on a de plus $y > 0$, alors :
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$
- Si on a de plus $x > 0$, alors :
$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}}.$$

Exemple 5 Simplifier $3^4 \times 6^4, \dfrac{2^8}{2^{-4}}, \dfrac{(x^2y^3)^{-2}}{(xy^2)^3}.$

Les puissances de -1 sont très faciles à calculer, elle dépend simplement de la parité de la puissance.

Proposition 8 | Puissances de -1
Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Proposition 9 | Identités remarquables
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b).$$

Preuve Elles se démontrent directement à l'aide de la définition et des règles usuelles de développement.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

De-même pour les deux autres.

Exemple 6 (Un peu plus loin) Développer $(a+b)^3$.

Remarque 2 (Généralisations possibles)
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ seront généralisées dans le Chapter ALG4 en la formule dite du *binôme de* N*ewton*.
- $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ possède elle aussi une généralisation à toute expression de la forme $a^n-b^n, n \in \mathbf{N}$. On l'appelle l'*identité de* B*ernoulli* mais hors-programme en BCPST.

Encadrements et puissances entières. Ce paragraphe sera reformulé facilement dans le chapitre sur les fonctions, à l'aide du langage sur la monotonie (croissance/décroissance) d'une fonction. Pour l'instant, nous le voyons uniquement sous forme d'une proposition.

Proposition 10 | Puissances et encadrements
- Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier impair. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement, c'est-à-dire :
$$\forall x,y \in \mathbf{R}, \quad x \leqslant (<) y \implies x^n \leqslant (<) y^n.$$
- Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier pair. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement **positif**, c'est-à-dire :
$$\forall x,y \in \mathbf{R}, \quad 0 \leqslant x \leqslant (<) y \implies 0 \leqslant x^n \leqslant (<) y^n.$$

Attention
L'entier précédent doit être un entier **positif**. Les autres cas seront examinés plus tard.

1.5. Racines carrées & cubiques

On sait élever au carré des réels, ou à une puissance plus grande. On peut aussi se poser la question inverse : est-ce que tout réel peut être vu comme le carré d'un autre ? le cube d'un autre ? Pour la racine carrée la réponse est clairement non pour les négatifs (un carré est forcément positif), et oui pour les positifs. Pour les cubes, il y a toujours existence et unicité.

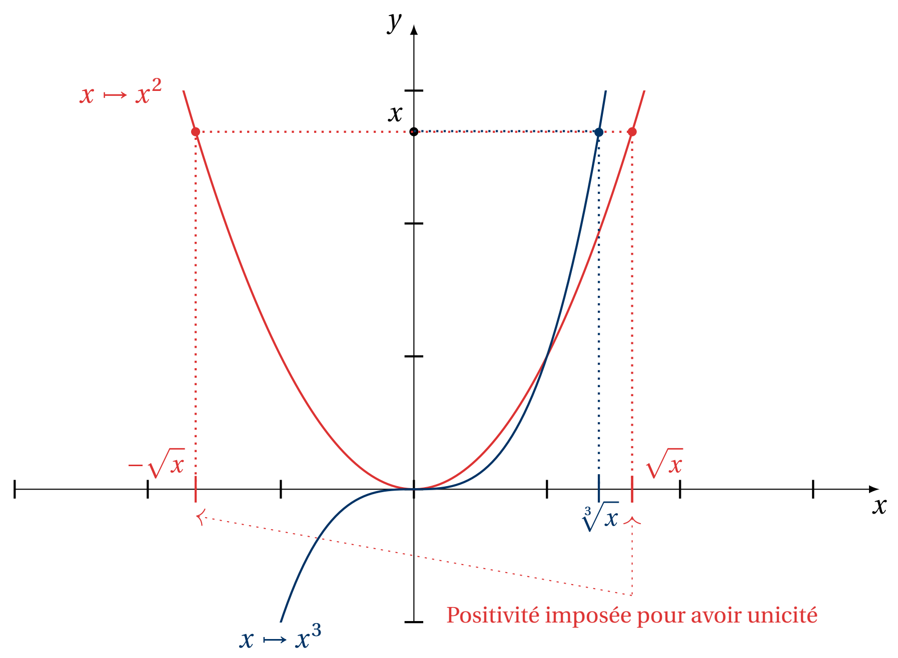
Définition/Proposition 1 | Racine carrée & Cubique
- **(Racine carrée)** Soit $x \in \boxed{\mathbf{R}^+}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt{x} \geqslant 0$, ou encore $x^{\frac{1}{2}}$, tel que :
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x. \quad \text{On appelle ce réel } \underline{\textbf{la}} \textit{ racine carrée} \text{ de } x.$$
- **(Racine cubique)** Soit $x \in \mathbf{R}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt[3]{x} \geqslant 0$, ou

encore $x^{\frac{1}{3}}$, tel que :

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x. \quad \text{On appelle ce réel } \underline{\textbf{la}} \textit{ racine cubique} \text{ de } x.$$

Remarque 3 **(Comment comprendre ces deux propriétés ?)** En anticipant légèrement sur le chapitré dédié aux fonctions, traçons les graphes des fonctions $x \longmapsto x^2, x \longmapsto x^3$. On voit qu'il existe :

- un unique antécédent de $x \in \mathbf{R}$ pour la fonction cube, et ce pour tout x.
- En revanche, pour la fonction carrée, les négatifs n'ont pas d'antécédent, et les positifs en ont deux.



Par ailleurs, les notations $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$.

Attention

La quantité $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ puisque $x^2 \geqslant 0$. En revanche, sur $\mathbf{R}^-$, nous n'avons pas $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. Nous reverrons cela dans la partie sur la valeur absolue.

Exemple 7 Déterminer $\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{-27}$.

Proposition 11 | Règles sur les racines carrées

Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^+)^2$. On a :

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Proposition 12 | Règles sur les racines cubiques

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

- $\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$.
- Si on a de plus $y \neq 0$, alors : $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$.
- $\sqrt[3]{x}^3 = x, \qquad \sqrt[3]{x^3} = x$.

Attention

On ne peut rien dire de la racine d'une somme. Par exemple, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1 + 1 = 2$.

Attention

Le symbole $\sqrt{\ }$ est réservé à cet usage, on n'écrira jamais de racine carrée d'autre chose qu'un réel positif.

1.6. Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est le même nombre réel mais dont on aurait enlevé le signe devant. Ainsi, si ce réel est positif il n'y a rien à faire, c'est sa valeur absolue. En revanche, s'il est négatif, il suffit d'ajouter un signe « - » devant ledit réel. Cela nous mène tout droit à la définition ci-après.

Définition 3 | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbf{R}$, la *valeur absolue de* x, notée $|x|$, est le réel défini par :

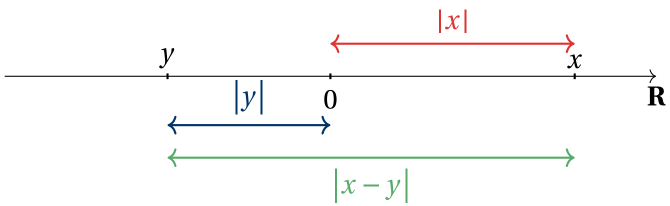
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Définition 4 | Distance entre deux réels

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On définit la *distance de* x *à* y comme étant le réel noté $\mathrm{d}(x, y)$ et défini par :

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|.$$

Les réels peuvent se représenter sur une droite dite « numérique ».



Pour tous réels x, y, la valeur absolue correspond à l'écart (sans signe) entre x et y, et $|x|$ représente donc la distance entre x et 0.

Proposition 13 | Propriétés de la valeur absolue et de la distance

On a : $|0| = 0$, et pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:

- $|x| \geqslant 0$, $|x| = \max\{x, -x\}$.
- **(Séparation)** $|x| = 0 \iff x = 0$, $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$.
- **(Parité / Symétrie)** $|x| = |-x|$, $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
- **(Encadrement et valeur absolue)** $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. Plus généralement :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad |x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M.$$

- $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x|^2 = x^2$.
- **(Produit)** $|xy| = |x| \times |y|$.

Toutes ces propriétés seront plus intuitives dans le Chapter ANA12 où la valeur absolue sera vue comme une fonction.

Preuve

- La positivité est élémentaire et découle de la définition en séparant les cas. Passons à la seconde partie.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ est évident.
  $\boxed{\Longrightarrow}$
-
-

- Si $x \leqslant 0$ alors
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x = |x|.$$
Si $x < 0$ alors $-x \geqslant 0$ et on a
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x)} \times \sqrt{(-x)} = \sqrt{(-x)}^2 = -x = |x|.$$
- On peut par exemple utiliser la propriété idoine déjà démontrée pour la racine.
$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x| \times |y|.$$

Théorème 2 | Inégalité triangulaire
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors :
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

La partie de droite sert beaucoup plus souvent que le membre de gauche, mais les deux sont bien à connaître.

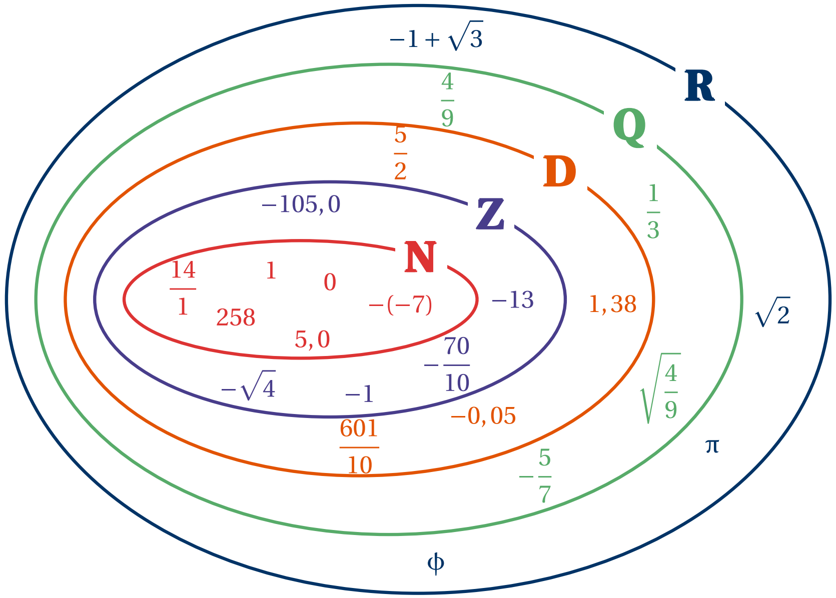
Preuve On a
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$\big(|x| + |y|\big)^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy|y^2$$

Or $xy \leqslant |xy|$, d'où $x^2 + y^2 + 2xy \leqslant x^2 + 2|xy|y^2$, c'est-à-dire
$$|x+y|^2 \leqslant \big(|x| + |y|\big)^2$$
*Et, comme $|x+y| \geqslant 0$ et $|x| + |y| \geqslant 0$, la proposition **??** nous permet de conclure que :*
$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

De manière similaire, on a
$$\big||x| - |y|\big|^2 = |x|^2 - 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$$
Or $xy \geqslant -|xy|$, d'où $x^2 + y^2 + 2xy \geqslant x^2 - 2|xy|y^2$, c'est-à-dire
$$|x+y|^2 \geqslant \big||x| - |y|\big|^2.$$
Et, comme $|x+y| \geqslant 0$ et $\big||x| - |y|\big| \geqslant 0$, la proposition **??** nous permet de conclure que
$$|x+y| \geqslant \big||x| - |y|\big|.$$

2. SOUS-ENSEMBLES USUELS DE R

On rappelle brièvement quelques sous-ensembles de réels connus depuis le collège.



Sur ce dessin :

- $\mathbf{R}$ désigne les *réels*,
- $\mathbf{D}$ désigne les *décimaux*, c'est-à-dire les nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule,
- $\mathbf{Z}$ désigne les *entiers relatifs* (parfois appelés simplement *entiers*),
- $\mathbf{Q}$ désigne les *rationnels*,
- $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ désigne les *irrationnels*,
- $\mathbf{N}$ désigne les *entiers naturels*.

Comme le dessin le rappelle, on a alors la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{D} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R} \subsetneq \mathbf{C}.$$

Notation Partie positive, négative, étoilée d'un sous-ensemble de R

Soit $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}$ un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Alors on note en général :
- $\mathrm{E}^\star = \{x \in \mathrm{E} \mid x \neq 0\}$,
- $\mathrm{E}^+ = \{x \in \mathrm{E} \mid x \geqslant 0\}$,
- $\mathrm{E}^- = \{x \in \mathrm{E} \mid x \leqslant 0\}$.

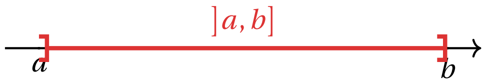
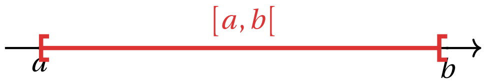
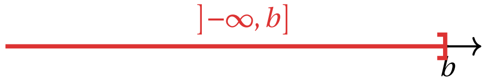
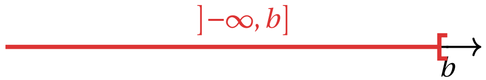
On peut aussi combiner les deux conditions :

$$\mathrm{e}^{+\star} = \{x \in \mathrm{E} \mid x > 0\}, \quad \mathrm{e}^{-\star} = \{x \in \mathrm{E} \mid x < 0\}.$$

Intervalles et lien avec la valeur absolue. On passe à présent à une classe d'ensembles qui nous offrira un cadre commode pour définir toute sorte de notions sur les fonctions : les intervalles.

Définition 5 | Intervalles

Soient a et b deux réels avec $a < b$, on définit alors les sous-ensembles ci-dessous, que l'on appelle *intervalles de* $\mathbf{R}$[a]

le *segment* $[a, b]$: $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a, x \leqslant b\}$	
l' *intervalle semi-ouvert en a*, $[a, b] :]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a,\ x \leqslant b\}$	
$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a,\ x < b\}$	
$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a,\ x < b\}$	
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$	
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$	
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$	
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$	

Remarquons que lorsque $a = b$ alors on définit de manière naturelle :

$$[a, b] = \{a\}, \quad [a, b[=]a, b] =]a, b[= \varnothing.$$

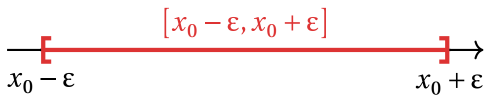
Les intervalles centrés autour d'un point peuvent être reformulés à l'aide de la valeur absolue, puisque rappelons que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$:

$$|x| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon \iff x \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

ou encore pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$\left|x - x_0\right| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x - x_0 \leqslant \varepsilon \iff x \in \left[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right].$$

[a] On indique sous la définition mathématique la lecture de l'ensemble.



On arrive alors à la prochaine proposition.

Proposition 14
Soient $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\left\{x \in \mathbf{R},\ |x-x_0| < \varepsilon\right\} =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$$

$$\left\{x \in \mathbf{R},\ |x-x_0| \leqslant \varepsilon\right\} = [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon].$$

Exemple 8 **(Écriture avec valeurs absolues d'intervalles plus généraux)**
Montrer que si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \leqslant b$, alors

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}\right\},$$

$$]a,b[= \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\}.$$

Illustrer ces formules sur un dessin.

En résumé, la valeur absolue est une quantité très efficace pour traduire des conditions d'appartenance à un certain intervalle. Nous utiliserons régulièrement ce genre de choses en analyse.

3. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

3.1. Principes généraux de raisonnement

Rien de bien nouveau dans cette partie par rapport aux classes antérieures. On formalise simplement différents types de raisonnements rencontrés jusqu'alors pour résoudre des équations et inéquations, à l'aide des rudiments de logique développés dans le Chapter ALG1. Commençons par rappeler des erreurs cruciales à ne pas commettre :

Attention **Au sujet des divisions / factorisations**

- Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle.
- Si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ alors l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$. Mais, on rédige la condition en utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \iff a^2 - b^2 = 0 && \textit{identité remarquable} \\ &\iff (a-b)(a+b) = 0 && \textit{équation produit-nul} \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

Comment procéder pour résoudre une équation? Plusieurs méthodes s'offrent à nous.

Méthode **Résolution d'une équation ou inéquation**

Considérons deux équations ou inéquations (EQ_1), (EQ_2) en une inconnue notée x.

1. **(Ensemble de définition)** On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans l'ensemble de définition** de l'équation (ou inéquation).
2. On note $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions (éventuellement vide) respectif de (EQ_1), (EQ_2).
   - **(Travailler par équivalence)** On arrive à transformer l'équation (ou inéquation) initiale en (EQ_2) équivalente à la première, c'est-à-dire :

$$x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_1) \iff x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_2).$$

Ou encore :

$$x \in \mathscr{S}_1 \iff x \in \mathscr{S}_2, \quad \text{en d'ensembles de solutions : } \boxed{\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2}.$$

- **(Travailler par implication)** On arrive à transformer l'équation (ou inéquation) initiale en (EQ_2) mais à partir d'implications à partir de la première, c'est-à-dire :

$$x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_1) \implies x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_2).$$

Ou encore :

$$x \in \mathscr{S}_1 \implies x \in \mathscr{S}_2, \quad \text{en d'ensembles de solutions : } \boxed{\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2}.$$

Ainsi, des solutions « parasites » (de (EQ_2) mais pas de (EQ_1)) peuvent apparaître. Il faut donc vérifier *a posteriori* lesquelles sont effectivement des solutions de (EQ_1).

- **(Technique spécifique aux inéquations)** Pour résoudre $f(x) \geqslant g(x)$ avec $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Attention **Ensemble de définition**

Quand on parle d'ensemble de solutions $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ cela sous-entend naturellement ensemble de définition <u>et</u> de solution. On commence donc toujours pas préciser l'ensemble de définition de l'équation ou l'inéquation considérée.

La rigueur de la rédaction mathématique demande qu'une fois que l'on a commencé à utiliser des symboles d'implications ($\implies$) dans une suite d'assertions on ne réutilise plus de symboles d'équivalence ($\iff$) — une fois que l'on a perdu une équivalence, c'est donc perdu jusqu'au bout du calcul !

Attention

Il ne suffit pas d'écrire sur sa feuille un symbole « $\iff$ » pour prouver ladite équivalence ! Si certaines ne sont pas évidentes, une justification précise est attendue.

3.2. Techniques spécifiques de résolution

3.2.1. Avec des produits et des quotients

On intègre les réflexes suivants lorsqu'on cherche à résoudre une (in)équation :

- tout passer du même côté pour comparer à 0,
- tout mettre sur le même dénominateur le cas échéant,
- factoriser au maximum.

Méthode **Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient**

Soient A et B deux réels.

- $\mathrm{AB} = 0 \iff \mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$.
- $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0 \iff \mathrm{A} = 0$ (et $\mathrm{B} \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient, on dresse un tableau de signe pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.

3.2.2. Type polynomial

Étude de $ax + b$, $a \neq 0$. Tout se cache dans le tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	

Exemple 9 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

- $x(x+2) = 2x(3x-4)$

  $x(x+2) = 2x(3x-4) \iff 5x(2-x) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2}$.
- $(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3)$.

- $\dfrac{2}{x} \geq \dfrac{4}{x+4}$

Étude de ax^2+bx+c, $a \neq 0$. On reprend les formules vues au lycée pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels. Elles seront généralisées dans le Chapter ALG3 aux cas de coefficients complexes.

Considérons un trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en mettant le trinôme sous forme « canonique »[1]. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, puisque $a \neq 0$:

[1] C'est-à-dire sans facteur en x

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right)\right]. \end{aligned}$$

forme canonique

Le terme entre crochet ressemble à une identité remarquable de la forme « a^2-b^2 ». Deux cas se présentent, en notant $\Delta = b^2-4ac$:

- si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= 0 \iff x \in \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}. \end{aligned}$$

identité remarquable

- Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2 \\ &= 0 \iff x = \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

- si $\Delta < 0$, alors

$$-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right) = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0, \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \implies ax^2+bx+c > 0.$$

  Donc il n'y a pas de solution (dans $\mathbf{R}$).

On arrive tout droit au théorème suivant.

Théorème 3 | Résolution sur R des équations du second degré à coefficients réels

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ avec $a \neq 0$. On cherche les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x. On appelle *discriminant* la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta \geqslant 0$ l'équation $ax^2 + b + x + c = 0$ admet deux solutions $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si en particulier $\Delta = 0$ alors les deux solutions sus-mentionnées sont confondues. Il n'y a qu'une solution définie par $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbf{R}$.

Exemple 10 Soit $m \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{P}(x) = 2x^2 + (2m + 2)x + m^2 - 1$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet-elle une unique solution ? Quelle est alors cette solution ?

$\Delta_m = 4m^2 - 8m - 12 = 0$, *dont on souhaite à présent étudier le signe en* m. *On calcule donc le discriminant en* m : $\Delta' = 256 = 16^2$

Donc $\Delta_m = 0 \iff m = m_1$ *ou* m_2 *avec* $m_1 = -1$ *et* $m_2 = 3$.

- *Donc si* $m = 3$ *ou* $m = -1$, *l'équation* $\mathrm{P}(x) = 0$ *admet une unique solution.*
- *Si* $m = -1$, 0 *est l'unique solution.*
- *Si* $m = 3$, -2 *est l'unique solution.*

Exemple 11 Résoudre selon les valeurs de $m \in \mathbf{R}$: $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ puis $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 < 0$.

- *si* $m = -2$, *l'expression devient* $4x - 1$, *une expression affine. Donc* $\boxed{4x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4} \text{ et } 4x - 1 < 0 \iff x < \frac{1}{4}}$.
- *si* $m \neq -2$, $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3$ *est un trinôme du second degré dont le discriminant vaut*

$$\Delta = -4(m^2 + 7m + 6).$$

L'expression $m^2 + 7m + 6$ *est un trinôme du second degré d'inconnue* m *dont les racines sont* -1 *et* -6.

— *si* $m \in]-\infty; -6[\cup]-1; +\infty[$: $m^2 + 7m + 6 > 0$ *donc* $\Delta < 0$ *et l'équation* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ *n'admet pas de solutions réelles.*
Par ailleurs, $m + 2 < 0$ *si* $m \in]-\infty; -6[$ *donc dans ce cas,* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 < 0$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\mathbf{R}$*).*
En revanche, $m + 2 > 0$ *si* $m \in]-1; +\infty[$ *donc dans ce cas,* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\emptyset$*).*

— *si* $m = -6$, $\Delta = 0$ *donc l'équation* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ *admet une unique solution réelle :* $\frac{3}{2}$.
Par ailleurs, $-6 + 2 < 0$ *donc* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 < 0$ *pour tout* $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$*).*

— *si* $m = -1$, $\Delta = 0$ *donc l'équation* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ *admet une unique solution réelle :* 1.
Par ailleurs, $-1 + 2 > 0$ *donc* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\emptyset$*).*

— *si* $m \in]-6; -1[$: $m^2 + 7m + 6 < 0$ *donc* $\Delta > 0$ *et l'équation* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes*

$$x_1 = \frac{2m - \sqrt{-4(m^2 + 7m + 6)}}{2(m+2)} = \frac{m - \sqrt{-(m^2 + 7m + 6)}}{m+2} \text{et} x_2 = \frac{m + \sqrt{-(m^2 + 7m + 6)}}{m+2}.$$

Par ailleurs, si $m \in]-6; -2[$, $m + 2 < 0$ *donc* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 < 0 \iff x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.
Enfin, si $m \in]-2; -1[$, $m + 2 > 0$ *donc* $(m+2)x^2 - 2mx + 2m + 3 < 0 \iff x \in]x_1; x_2[$.

Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3 Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).

Sinon, on cherche à factoriser l'expression $\mathrm{A}(x)$ pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :

- soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
- soit on trouve une **racine évidente** x_0 et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $\boxed{A(x) = (x - x_0)B(x)}$ où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Remarque 4 Tout ce qui précède deviendra plus limpide lorsque nous traiterons les polynômes dans le Chapter ALG9.

Exemple 12 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^3 + x + 2 = 4x^2$

$x^3 + x + 2 = 4x^2 \iff x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$. 1 est une racine évidente. Donc

$$\exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3, x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

En identifiant, cela donne $a = 1$, $b = -3$ et $c = -2$.
D'où $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0$.
Or les racines du trinôme $x^2 - 3x - 2$ sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{2}$.
L'équation admet ainsi trois solutions : $1, -\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{2}$.

2. $x^4 - x < 0 \iff x(x^3 - 1) < 0 \iff x(x-1)(x^2 + x + 1) < 0$ *(la factorisation de $x^3 - 1$ s'obtient comme précédemment).*
Comme $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ (discriminant strictement négatif),

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) < 0 \iff x(x-1) < 0$$

ce qui est le cas lorsque $x \in]0;1[$.

3. $x^4 - x < 0$

$\dfrac{-2x^2 + 3x - 10}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8} \geq 0 \iff \dfrac{-2x^2 + 3x - 10}{(x-1)(-x^2 + 6x - 8)} \geq 0$ *(après factorisation du dénominateur comme précédemment).*
Comme $\forall x \in \mathbf{R}$, $-2x^2 + 3x - 10 < 0$ (discriminant strictement négatif),

$$\frac{-2x^2 + 3x - 10}{(x-1)(-x^2 + 6x - 8)} \geq 0 \iff \frac{1}{(x-1)(-x^2 + 6x - 8)} \leq 0$$

ce qui est le cas lorsque $x \in]1;2[\cup]4;+\infty[$ (les racines du trinôme $-x^2 + 6x - 8$ étant 2 et 4).

3.3. Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

UTILISER LES PROPRIÉTÉS DE ln, exp. L'idée est d'essayer d'appliquer ln, ou exp de chaque côté afin de simplifier l'équation.

Exemple 13 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

$2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$ *est bien définie lorsque $x > 1$. Alors*

$$\begin{aligned} & 2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1) \\ \iff & \ln((x+1)^2) = \ln((x-1)(2x-1)) \\ \iff & (x+1)^2 = (x-1)(2x-1) \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \\ \iff & (x = 0 \text{ ou } x = 5) \text{ et } x > 1 \\ \iff & x = 5. \end{aligned}$$

2. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$

ÉLEVER AU CARRÉ. L'idée est d'essayer d'élever au carré afin de supprimer d'éventuelles racines. Attention : on rappelle qu'on ne peut élever au carré n'importe comment une inégalité! Il faut toujours prendre la précaution de savoir si les membres sont positifs.

Exemple 14 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation suivante : $x = \sqrt{2-x}$.

L'équation est définie sur $]-\infty, 2]$. *On a pour* $x \in]-\infty, 2]$:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2-x} &\implies x^2 = 2-x \\ &\implies x^2 + x - 2 = 0 \\ &\implies (x-1)(x+2) = 0 \\ &\implies x \in \{1, -2\}. \end{aligned}$$

On voit ainsi que les solutions de notre équation sont incluses dans l'ensemble $\{1, -2\}$. *En réinjectant ensuite ces valeurs dans l'équation on constate que* $\boxed{\text{seul } 1 \text{ est solution}}$.

Exemple 15 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x^2+2x} < x+1$.

$\sqrt{x^2+2x} < x+1$ *n'est bien définie que si* $x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.
Par ailleurs, comme $\sqrt{x^2+2x} \geq 0$ *on a aussi* $x+1 > 0$ *par transitivité donc on sait que* $x > -1$.
Pour tout $x \in [0; +\infty[$, *on a alors*

$$\sqrt{x^2+2x} < x+1 \iff x^2+2x < (x+1)^2 \iff 0 < 1$$

ce qui est toujours vrai donc $\sqrt{x^2+2x} < x+1$ *pour tout* $x \in [0; +\infty[$. *L'ensemble des solutions est* $\boxed{[0; +\infty[}$.

Utiliser un changement de variable. Il s'agit de poser un changement de variable du type $X = e^x$ ou $X = \ln(x)$ ou $X = x^2$ ou $X = \sqrt{x}$... pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre (en général polynomiale). Dans les exercices, le changement de variable éventuel à réaliser sera toujours donné.

Attention

Attention, une fois les valeurs possibles de X trouvées, il ne faut pas oublier de revenir aux solutions en x pour conclure.

Exemple 16 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ et $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

   Posons $X = x^2$. *On a alors* $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff X^2 - 3X + 2 = 0$ *et* $X = x^2$.
   Les racines du trinôme $X^2 - 3X + 2 = 0$ *étant* 1 *et* 2,

   $$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 2 \iff x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}.$$

   Pour l'inéquation, $X^2 - 3X + 2 < 0 \iff X \in]1; 2[$ *donc*

   $$x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \iff 1 < x^2 < 2 \iff x \in]-\sqrt{2}; -1[\cup]1; \sqrt{2}[$$

2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$

   $e^x + e^{1-x} = e+1 \iff e^{2x} + e = (e+1)e^x \iff (e^x)^2 - (e+1)e^x + e = 0.$
   Posons $X = e^x$. *On a alors* $e^x + e^{1-x} = e+1 \iff X^2 - (e+1)X + e = 0$ *et* $X = e^x$.
   Le discriminant du trinôme $X^2 - (e+1)X + e$ *est* $\Delta = (e-1)^2 > 0$ *donc*

   $$X^2 - (e+1)X + e = 0 \iff X = \frac{e+1-(e-1)}{2} = 1 \text{ ou } X = \frac{e+1+(e-1)}{2} = e.$$

   Ainsi,

   $$e^x + e^{1-x} = e+1 \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = e \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1.}$$

Enlever les valeurs absolues. Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qu'il y a à l'intérieur. On peut donc étudier le signe de l'expression dans la valeur absolue puis faire une disjonction de cas pour résoudre l'(in)équation obtenue sans la valeur absolue dans chacun des cas possibles.

Exemple 17 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x-4| = 2x+10$

   Si $x-4 \geq 0 \iff x \geq 4$, *l'équation s'écrit* $x-4 = 2x+10$ *i.e.* $x = -14 \notin [4; +\infty[$

donc l'équation n'a pas de solution dans cet intervalle. Finalement, $|x-4| = 2x+10 \iff \boxed{x=-2}$.

2. $|3-x| > |x+2|$

- *si* $x \in]-\infty;-2]$*, l'inéquation devient* $3-x > -x-2 \iff 3 > -2$ *ce qui est toujours vrai donc l'inéquation est vérifiée pour tout* $x \in]-\infty;-2]$.
- *si* $x \in [-2;3]$*, l'inéquation devient* $3-x > x+2 \iff x < \frac{1}{2}$ *donc l'inéquation est vérifiée pour tout* $x \in [-2;\frac{1}{2}[$.
- *si* $x \in [3;+\infty[$*, l'inéquation devient* $x-3 > x+2 \iff -3 > 2$ *ce qui est toujours faux donc l'inéquation n'est vérifiée pour aucun* $x \in [3;+\infty[$.

Finalement, $|3-x| > |x+2| \iff]-\infty;\frac{1}{2}[$.

Résolution d'inéquations par une étude de fonction. Si on souhaite montrer qu'une inéquation est vraie pour tout x dans un certain sous-ensemble E (de $\mathbf{R}$), ou même vraie sur $\mathbf{R}$ tout entier, et que l'on n'y parvient pas par inégalités successives, on peut essayer d'étudier les variations d'une certaine fonction.

Méthode Pour montrer « $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) \leqslant ($ ou $\geqslant) g(x)$ »

Soient $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$.
- On définit la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

Commençons par un exemple complet.

Exemple 18 Résoudre sur $\mathbf{R}$: $\quad e^x \geqslant x+1$.

Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x - 1 \end{array} \right.$. *La fonction* f *est dérivable car somme de fonctions dérivables.*
Pour tout $x \in \mathbf{R}$*, on a* $f'(x) = \exp(x) - 1$. *Ainsi, si* $x > 0$ *alors* $f'(x) > 0$ *et si* $x < 0$ *alors* $f'(x) < 0$. *On obtient donc le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variations f *admet* 0 *pour minimum sur* $\mathbf{R}$ *et l'atteint en* 0. *On a donc montré que, pour tout réel* $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant 0$ *et, par suite,* $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathbf{R}}$.

Exemple 19 Montrer que : $\quad \forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.

On pose f *la fonction définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :*

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \ln(1+x) - x.$$

La fonction f *est dérivable sur* $]-1;+\infty[$ *et :*

$$\forall x > -1, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

On dresse alors le tableau des variations de f *:*

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Comme $f(0) = 0$*, on a que pour tout* $x > -1, \quad f(x) \leq 0$. *Ainsi :*

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

4. PARTIES MAJORÉES, MINORÉES DE R & PARTIE ENTIÈRE

4.1. Minorant, majorant, borne inférieure/supérieure

Définition 6 | Majorant, minorant

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$.

- On dit que A est *majoré* s'il existe un réel M tel que
$$\forall a \in A, \quad a \leqslant M.$$
On dit alors que M est ***un*** *majorant* de l'ensemble A.
- On dit que A est minoré s'il existe un réel m tel que
$$\forall a \in A, \quad a \geqslant m.$$
On dit alors que m est ***un*** *minorant* de l'ensemble A.
- Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit *borné*.

Attention

Un ensemble majoré (*resp.* minoré) admet une infinité de majorant (*resp.* de minorants). En effet, si M est un majorant, alors $M+1$ en est un aussi.

Exemple 20 **(Négation)** Écrire la négation de «A est minoré», puis «A est majoré».

Proposition 15 | Partie bornée et valeur absolue

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$. Alors :
$$A \text{ est borné} \iff \exists M \in \mathbf{R}^+, \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M.$$

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons d'abord que A est borné, soit alors M un majorant de A et m un minorant de A. Alors, pour $x \in A$ on a
$$x \leqslant M \leqslant |M|, \quad x \leqslant m \leqslant -|m|.$$
Posons $R = \max\{|M|, |m|\}$, on a alors $|M| \leqslant R$ et $-|m| \geqslant -R$.
Ainsi, pour tout $x \in A$ on a $-R \leqslant -|m| \leqslant x \leqslant |M| \leqslant R$, c'est-à-dire $|x| \leqslant R$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement supposons qu'il existe $R \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant R$. Alors, pour $x \in A$ on a
$$x \leqslant |x| \leqslant R, \quad x \geqslant -|x| \geqslant -R.$$
Le réel R est donc un majorant de A et $-R$ est un minorant de A, l'ensemble A est ainsi borné.

Exemple 21

- L'ensemble $]1,3]$ est *borné*.
- L'ensemble $]-\infty,4]$ est *majoré mais n'est pas minoré*.
- $\mathbf{N}$ est *minoré mais n'est pas majoré*.
- $\mathbf{Q}$ *n'est ni majoré, ni minoré.*

Considérons l'intervalle $A = [0,2[$. Ici, les réels 0 et 2 jouent un rôle particulier.

- 0 est un minorant, et il ne semble pas y en avoir de plus grand, et il **est dans** A. On dira que 0 est la «borne inférieure de A», et même un «minimum de A» car il appartient à l'snsemble.
- 2 est un majorant, et il ne semble pas y en avoir de plus petit, et il **n'est pas** dans A. On dira que 2 est la «borne supérieure de A».

Formalisons cela dans la définition/proposition qui suit.

Définition/Proposition 2 | Borne supérieure/inférieure

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$.

- **(Borne supérieure)** Si A est majorée, alors : A admet un plus petit majorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus petit de ces majorants, noté

$\sup A$.

- **(Borne inférieure)** Si A est minorée, alors : A admet un plus grand minorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus grand de ces minorants, noté $\inf A$.

Nous admettons l'existence d'un plus petit/grand majorant/minorant sous les hypothèses mentionnées.

Définition 7 | Maximum / Minimum

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$.

- Si A est majorée **et** $\sup A \in A$, alors on dit que A admet un *maximum*, et on note $\max A = \sup A$.
- Si A est minorée **et** $\inf A \in A$, alors on dit que A admet un *minimum*, et on note $\min A = \inf A$.

Un minimum ou un maximum est appelé un *extremum*.

Attention

Un ensemble n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Mais, pour nous, toujours une borne supérieure ou inférieure car nous travaillerons avec des parties non vides majorées ou minorées.

Remarque 5 **(Un peu d'orthographe)** L'Académie Française recommande d'utiliser le pluriel «à la française» pour les mots latins finissant en «- um» comme «maximum», «minimum» ou «extremum». En revanche, en Mathématiques, nous utiliserons des pluriels latins c'est-à-dire : «maxima», «minima» et «extrema».

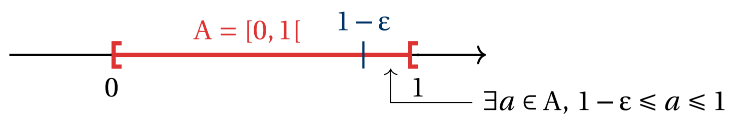
Exemple 22 On considère les ensembles suivants

$$A = [1, 2], \quad B =]-\infty, 3], \quad C =]0, 4[, \quad D =]1, +\infty[, \quad E = \mathbf{N}, \quad F = \mathbf{R}^{+\star}.$$

Préciser si ces ensembles admettent un maximum ou minimum, et donner sa valeur le cas échéant.

- A *admet comme maximum* 2 *et comme minimum* 1.
- B *admet comme maximum* 3 *et n'est pas minoré et n'admet donc pas de minimum.*
- C *est borné mais n'admet ni maximum, ni minimum.*
- D *est minoré mais n'est pas majoré,* D *n'admet ni maximum, ni minimum.*
- E *admet* 0 *comme minimum et n'est pas majoré et n'admet donc pas de maximum.*
- F *est minoré mais n'est pas majoré,* F *n'admet ni maximum, ni minimum.*

Pour terminer, on souhaite traduire mathématiquement (à l'aide de quantificateurs) les portions d'assertions «plus petit majorant» et «plus grand minorant» apparaissant dans la Définition/Proposition 2. Reprenons l'exemple de $A = [0, 1[$. On a $1 = \sup A$, mais comment traduire que c'est le plus petit majorant ?



Si on se fixe $\varepsilon > 0$, alors $1 - \varepsilon$ ne sera pas un majorant, c'est-à-dire il existe $a \in A$ de sorte que $1 - \varepsilon \leqslant a \leqslant 1$. On peut traduire de la même façon le fait d'avoir un plus grand majorant, ce qui nous mène au théorème suivant, que nous admettons.

Théorème 4 | Caractérisation de la borne supérieure/inférieure

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$.

- **(Borne supérieure)** Si A est majoré, alors :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & M \text{ est un majorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ M - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant,} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ M - \varepsilon \leqslant a \leqslant M. \end{cases}$$

- **(Borne inférieure)** Si A est minoré, alors :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & m \text{ est un minorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ m + \varepsilon \text{ n'est pas un minorant,} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ m \leqslant a \leqslant m + \varepsilon. \end{cases}$$

4.2. Partie entière

La notion de borne supérieure va nous permettre de définir proprement la notion de «partie entière» d'un réel, qui est connue depuis bien longtemps mais peut-être pas sous ce nom. Ainsi, on souhaite définir mathématiquement l'action d'ôter la partie décimale d'un nombre réel, c'est-à-dire transformer par exemple 1.1 en 1. Comment faire cela ? Une idée serait l'écriture de tout réel x de la manière suivante :

$$x = k + y, \quad k \in \mathbf{N}, \quad y \in [0,1[.$$

Puis on poserait que la partie entière de x est l'entier k, mais encore faudrait-il prouver d'abord l'existence et l'unicité de x. Par exemple $1.1 = 1 + 0.1$ donc la partie entière de 1.1 est 1. En revanche, ce n'est pas la définition classique qui consiste à dire qu'il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in [k, k+1[$, c'est-à-dire que x se trouve dans un unique intervalle de deux entiers consécutifs. Dans notre exemple, $1.1 \in [1,2[$.

Définition/Proposition 3 | Partie entière

Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle *partie entière de* x l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z}$, tel que :

$$x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[\quad (\iff \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1).$$

Attention

Attention aux confusions entre $\leqslant, <$.

- Si vous confondez les deux symboles, alors on change complètement la notion. [2]
- Si vous oubliez d'utiliser une inégalité stricte, c'est pire, il n'y a plus unicité !

Exemple 23 Calculer les parties entières ci-après.

- $\lfloor 3.1 \rfloor$

  $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ *car* $3 \leqslant 3.1 < 3$,
- $\lfloor -4.5 \rfloor$

  $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$, *car* $-5 \leqslant -4.5 < -4$,
- $\lfloor 12 \rfloor$

  $\lfloor 12 \rfloor = 12$, *car* $12 \leqslant 12 < 13$,
- $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$

  $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$, *car* $2 \leqslant \frac{7}{3} < 3$.

[2]Par exemple, si on avait pris comme définition $\lfloor x \rfloor < x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, alors on aurait $\lfloor 5 \rfloor = 4$... curieux non ?

Preuve Nous devons maintenant justifier l'existence et l'unicité de la partie entière. Soit $x \in \mathbf{R}$.

Existence. (très partielle) Considérons $N_x = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant x\}$ l'ensemble des entiers inférieurs à x. Nous admettons que N_x est non vide, cet ensemble est majoré par x. Il admet donc une borne supérieure que l'on note $\lfloor x \rfloor = \sup(N_x)$. On admet que cette quantité convient.

Unicité. Supposons que $m, n \in \mathbf{Z}$ conviennent pour la partie entière de x. Alors :

$$n \leqslant x < n+1, \quad m \leqslant x < m+1.$$

On peut supposer que $n < m$, sinon on inverse les rôles. Alors en combinant les deux encadrements, on a :

$$n < m \leqslant x < n+1 < m+1.$$

En particulier, $n < m < n+1$. On aurait donc qu'un entier m serait compris strictement entre deux entiers consécutifs $n, n+1$ — absurde.

Proposition 16 | Reformulation de la définition

Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors :

- $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, *i.e.* :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant x\}.$$

- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, tel que :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

De manière générale, lorsque l'on ne sait plus si on doit ouvrir ou fermer l'encadrement, on vérifie ce que l'on écrit avec un exemple, par exemple tester avec $x = 1.1$.

5. TRIGONOMÉTRIE

On rappelle dans cette section la définition géométrique du cosinus, sinus et de la tangente. Leur étude en tant que fonction sera faite dans le Chapter ANA12.

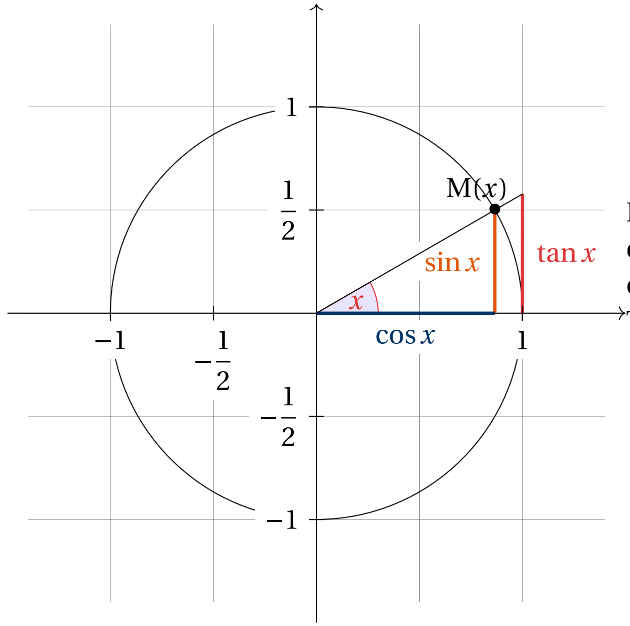
5.1. Définitions

Définition 8 | Cercle trigonométrique
Le *cercle trigonométrique* est le cercle du plan de rayon 1 et de centre O.

D'après le cours de géométrique, c'est le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$.

Définition 9 | Cosinus, sinus et tangente
Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. Soit x un réel et $\mathrm{M}(x)$ le point de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

- On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point $\mathrm{M}(x)$.
- On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point $\mathrm{M}(x)$.
- Lorsque $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$, on appelle *tangente de* x, notée $\tan x$, la quantité : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.



Pourquoi indiquer $\tan x$ à cet endroit ? Ceci est une simple conséquence du théorème de Thalès. En effet, il donne

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Remarque 6 Pour la tangente, la condition $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ garantit que $\cos x$ ne s'annule pas, donc que la fraction est bien définie. Nous le reconstaterons lors de la résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 17 | Conséquences directes de la définition

- **(Inégalités fondamentales)**
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |\cos(x)| \leqslant 1, \\ |\sin(x)| \leqslant 1. \end{cases}$$
- **(Théorème de Pythagore)**
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$
- **(Parité)** Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

- **(Périodicité)** Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x, \quad \tan(x+k\pi) = \tan x.$$

Remarque 7 Dans la proposition précédente $\cos^2(x)$ désigne $(\cos(x))^2$. Autrement dit, la fonction $\cos^2$ évaluée en x.

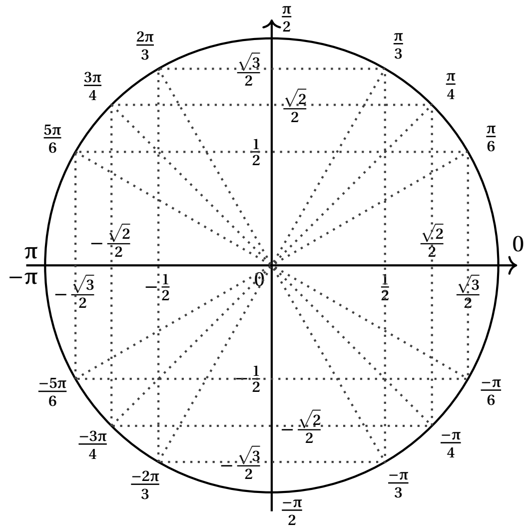
Remarque 8 **(Et le collège?)** Ces définitions sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été vues au collège et au lycée. Dans votre enfance, on vous avait expliqué qu'en considérant un angle x d'un triangle rectangle, on avait :

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

Ici, le triangle rectangle sous-jacent est celui dessiné sur le cercle trigonométrique précédent, avec la longueur de l'hypoténuse qui vaut 1 (la distance $\mathrm{OM}(x)$). Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de Thalès. Il en est de même pour le sinus.

5.2. Valeurs remarquables

On rappel également ici un certain nombre de valeurs remarquables utiles.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Pour la tangente, à savoir retrouver rapidement plutôt que de les apprendre :					
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

5.3. Formules trigonométriques

Il existe de nombreuses formules en trigonométrie, seules quelques unes sont à notre programme, ce sont celles figurant dans les énoncés ci-après. Toutes les autres sont hors-programme, certaines d'entre elles seront vues néanmoins dans des exemples. On commence par les principales : les formules d'addition, qui seront admises (voir vos cours de lycée sur le produit scalaire).

Proposition 18 | Formules d'addition

Soient $x, y \in \mathbf{R}$.

- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$.

Attention au sinus

Pour le cosinus, le signe est inversé dans le résultat. $\pm \rightsquigarrow \mp$.

Exemple 24 (Autre formule : anti-linéarisation) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. À l'aide des formules précédentes, établir une formule pour $\cos x \cos y$, $\sin x \sin y$, $\sin x \cos y$.

Corollaire 1 | Multiples de π

Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors :

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0.$$

Preuve Montrons tout d'abord la formule pour $n \in \mathbf{N}$, en faisant une récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

En prenant différentes valeurs de x, y, et en utilisant les valeurs remarquables, on déduit les formules ci-après facilement.

Corollaire 2 | Formules de transformation d'angles associés

Soit $x \in \mathbf{R}$.

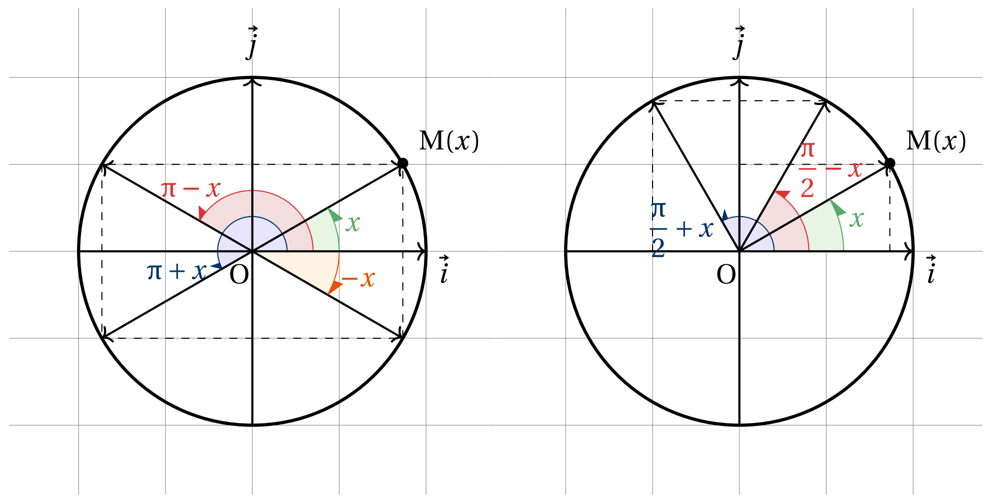
- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Remarque 9 Naturellement, des formules similaires peuvent s'obtenir pour la tangente. Mais on les retrouve facilement à l'aide de celles énoncées précédemment.

Exemple 25 À l'aide des valeurs remarquables et de propriétés sur cos, sin, déterminer les valeurs ci-après.

- $\cos \frac{2\pi}{3}$
- $\sin \frac{3\pi}{4}$

- $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$



Et enfin, les cas particuliers $x = y$ dans les formules d'addition fournissent les formules dites de duplication.

Corollaire 3 | Formules de duplication / anti-linéarisation
Soit $x \in \mathbf{R}$.
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Ou encore, de manière équivalente, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 4 | Formules de linéarisation
Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Remarque 10 (Retenir les formules d'angles associés de manière géométrique) Les relations entre les cosinus et sinus des angles associés ne s'apprennent pas par coeur ! Mémoriser comment construire les angles $\frac{\pi}{2} \pm x$ et $\pi \pm x$ sur le cercle trigonométrique.

Combinaison linéaire d'expressions trigonométriques. Une dernière conséquence des formules d'addition est la transformation d'expressions trigonométriques en cos ou sin.

Méthode Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée »

Soient $a, b, x \in \mathbf{R}$. On souhaite transformer l'expression

$$\mathrm{E}(x) = a\cos x + b\sin x$$

en $\rho\cos(x+\varphi)$, avec $\rho \in \mathbf{R}^+, \varphi \in \mathbf{R}$, ou la forme $\rho\sin(x+\varphi)$. On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. Mettre $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ en facteur, de sorte que

$$\mathrm{E}(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$

2. Comme $\left(\frac{a}{\rho}, -\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(-\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$,

il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \quad -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

3. Alors $E(x) = \cos x \cos\varphi - \sin x \sin\varphi = \cos(x+\varphi)$ d'après les formules d'addition.

Une méthode analogue existe si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Remarque 11 L'angle φ peut ne pas être explicite, en fonction des valeurs de a, b.

Exemple 26 Écrire sous forme d'un sinus puis d'un cosinus l'expression $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

5.4. Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 19 | Résolution d'équations

- Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\cos(x) = \cos(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + 2k\pi) \text{ ou } (x = -y + 2k\pi).$$

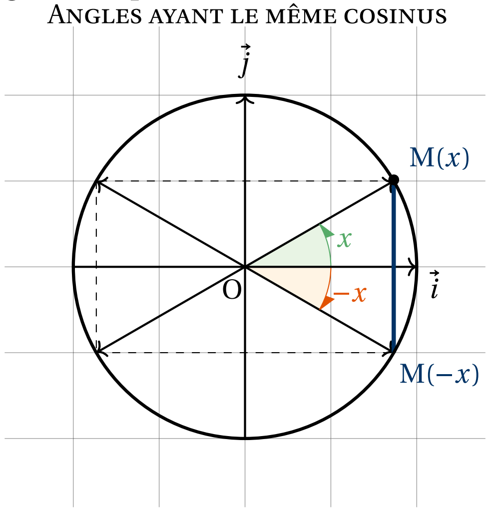
- Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

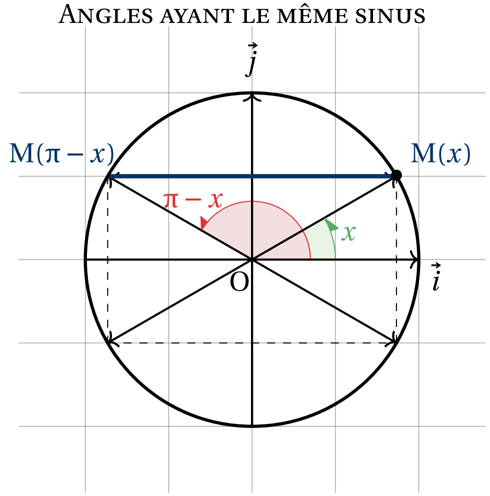
$$\sin(x) = \sin(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + 2k\pi) \text{ ou } (x = \pi - y + 2k\pi).$$

- Soit $(x, y) \in \mathscr{D}_{\tan}^2$,

$$\tan(x) = \tan(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + k\pi).$$

Remarque 12 **(Retenir les solutions d'équations trigonométriques de manière géométrique)**





Exemple 27

- Résoudre $\sin x = 2$ en $x \in [0, 2\pi[$.

- Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ en $x \in]-2\pi, 0]$.

- Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en $x \in [0, 2\pi[$.

- Résoudre $\sin x = \cos x$ en $x \in \mathbf{R}$.

Exemple 28 **(Avec phase à trouver)** Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ en $x \in \mathbf{R}$.

⋆⋆⋆ Fin du chapitre ⋆⋆⋆

6. EXERCICES

6.1. Trigonométrie

Exercice ALG2.1 | (Solution : ??) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \theta \in [0, \pi], \left|\sin(n\theta)\right| \leqslant n \sin \theta.$$

Chapitre ALG3.

Nombres Complexes

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de revoir certaines propriétés de première année sur les nombres complexes. Quelques compléments seront présentés en fin de chapitre, notamment sur les solutions de l'équation $z^n = 1$ avec $n \in \mathbf{N}$ appelées *Racines n-ièmes de l'unité.*

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XV ieme siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de Cardan, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle «sophistiqué». C'est Raphaël Bombelli qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors impossibles avant de leur donner le nom d'imaginaires.

— Le saviez-vous ?

Chapitre ALG4.

Calculs de sommes et produits

Résumé & Plan

Vous avez peut-être déjà rencontré la notation $\sum$ dans les classes antérieures. Nous allons la revoir dans ce chapitre, et en complément voir son analogue pour les produits. Enfin on termine avec les sommes doubles ainsi qu'une généralisation des identités remarquables : la formule du binôme de NEWTON.

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$$

— Le saviez-vous ?

Pour commencer, nous allons introduire diverses notations et règles de calculs.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle que pour tout couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \leqslant b$, l'ensemble $[\![a, b]\!]$ contient $b - a + 1$ éléments.

1. NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

1.1. Sommes

Au lycée, vous avez peut-être déjà rencontré des formules de ce type. « Pour $q \neq 1$, on a :

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.»$$

L'utilisation des points de suspension pour écrire cette somme rend l'écriture assez lourde et potentiellement compliquée à manipuler. Ce chapitre introduit une notation plus concise. En lieu et place de la formule précédente, nous noterons plutôt :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n.$$

Il faut la comprendre ainsi : on additionne tous les q^k avec k parcourant tout l'intervalle entier $[\![0\,,\,n]\!]$.

Notation — Symbole $\sum$

- Soit $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ avec $n \leqslant m$ et $(a_n, \dots, a_m) \in \mathbf{K}^{m-n+1}$. On appelle *somme des* $a_k, n \leqslant k \leqslant m$, la quantité notée $\sum_{k=n}^{m} a_k$ ou encore $\sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k$, $\sum_{k\in[\![m,n]\!]} a_k$ et définie par :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + \cdots + a_m.$$

- On appelle *bornes de la somme* les entiers relatifs n, p, *indice de la somme* la variable k et $a_k, n \leqslant k \leqslant m$ le terme général d'ordre k.
- **(Convention)** [1] Soit $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $n > m$ et $(a_n, \dots, a_m) \in \mathbf{K}^{n-m+1}$, alors on pose :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = 0.$$

[1] Pour des bornes mal ordonnées

Ainsi, lorsque les bornes ne sont pas dans le bon ordre, la somme est décrétée être égale à zéro.

Attention — L'indice d'une somme est « muet »

En effet, il n'apparaît que dans la notation $\sum$ et non dans ce qu'elle représente. On peut donc écrire :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{i=n}^{m} a_k = \sum_{j=n}^{m} a_k.$$

L'indice n'a de sens qu'à l'intérieur de la somme ; en dehors, il n'est plus défini. S'il vous reste un indice dans l'expression après le calcul de la somme, c'est que vous vous êtes trompé ![2]

Remarque 1 (Définition plus rigoureuse : par récurrence) L'usage des points de suspension pour définir la notation somme n'est pas parfaitement satisfaisante. D'un point de vue purement formel, on préfèrerait donc une définition qui s'appuie sur le caractère récursif de la somme. En effet, si on sait définir une somme jusqu'au rang n, alors il suffit de rajouter un seul élément pour avoir une somme jusqu'au rang $n+1$. Ainsi, on peut formuler une définition équivalente de la somme à l'aide du principe de récurrence : avec les mêmes notations qu'avant, on définit $\sum_{k=n}^{m} a_k = u_m$ où $(u_k)_{k\geqslant m}$ est la suite vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k < m,\ u_k = 0, \quad \forall k \geqslant m,\ u_{k+1} = u_k + a_{k+1}.$$

Exemple 1

1. $\sum_{k=3}^{5} a_k =$
2. $\sum_{k=10}^{20} a_k =$
3. $\sum_{k=103}^{103} a_k =$
4. $\sum_{k=0}^{10} k =$
5. $\sum_{k=1}^{n} 1 =$
6. $\sum_{k=n+1}^{n-1} \ln\left(1 + (\cos k - \sin k)^2\right) =$

[2] Ce n'est pas le cas en Python où on peut récupérer la valeur du dernier indice d'une boucle `for` après la fin de la boucle, nous le verrons en Informatique.

Propriétés et techniques de calcul. Les propriétés ci-après découlent directement de la définition de la somme, on peut les établir sans difficulté par récurrence.

Proposition 1 | Propriétés des sommes

Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $n \geq p$, $c, \lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$, $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$.

- **(Nombre de termes dans une somme)** Une somme dont les bornes sont p et n contient $n-p+1$ termes. En particulier une somme allant de 1 à n contient n termes, et une somme allant de 0 à n en contient $n+1$.
- **(Somme d'une constante)**
$$\sum_{k=p}^{n} c = c \times (n-p+1).$$
- **(Linéarité de la somme)** Soit $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \mu \sum_{k=p}^{n} b_k.$$
- **(Relation de Chasles)** Soit de plus $r \in \mathbf{N}$, $p \leqslant r \leqslant n$. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k.$$

Attention

Dans la relation de Chasles, attention à bien recommencer à l'indice $p+1$, et non à l'indice p pour ne compter qu'une seule fois le terme d'indice p.

Exemple 2 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(3^k - 2^k\right)$.

Passons maintenant à une technique très importante pour calculer une somme : celle du changement d'indice. Commençons par un exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2.$$

On a constaté que lorsque $k \in [\![0,n]\!]$, $(k+1)^2$ décrit $\mathscr{E} = \left\{1^2, \dots, (n+1)^2\right\}$. Mais lorsque $\ell \in [\![1\,,\,n+1]\!]$, ℓ^2 décrit ce même ensemble $\mathscr{E}$. En résumé, nous avons posé :

$$k \in [\![0,n]\!] \quad \overset{\ell=k+1}{\Longleftrightarrow} \quad \ell \in [\![1,n+1]\!].$$

Méthode **Changement d'indice de translation « $\ell = k+1, \ell = k+?$ »**

- **(Décalage d'un rang)**
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+1}^{n+1} a_{\ell-1}.$$
« On pose $k = \ell - 1$ »
« On pose $\ell = k + 1$ »
- **(Décalage de plusieurs rangs)** Soit N un entier. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} a_{\ell-\mathrm{N}}.$$
« On pose $k = \ell - \mathrm{N}$ »
« On pose $\ell = k + \mathrm{N}$ »

Pour justifier la formule de changement d'indice, simplement écrire la définition d'une somme. Nous verrons parfois des changements d'indice plus compliqués. Ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale, mais qu'on a juste changé le nom de l'indice.

Attention **On ne peut pas « poser n'importe quoi »**

Dans $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$, on ne **peut pas** poser : « $k = \ell^2$ » (dans ce cas on oublierait les indices qui ne sont pas des carrés), ou encore « $k = 2\ell + 1$ » (dans ce cas on oublierait les indices qui ne sont pas des carrés) *etc.*. Seuls les changements d'indices de la proposition précédente sont admissibles.

Exemple 3 Déterminer une expression de $G_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $q \neq 1$ pour $n \geqslant 0$ sans symbole somme.

Méthode Changement d'indice de renversement « $\ell = n - k$ »

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell}.$$

« On pose $k = n - \ell$ »

« On pose $\ell = n - k$ »

À droite, on doit conserver une borne de début de somme qui est inférieure à la borne de fin de somme pour ne pas avoir une somme vide (gardez à l'esprit la convention d'ordre des bornes).

Exemple 4 Déterminer une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$ pour $n \geqslant 0$ sans symbole somme.

Passons maintenant à un type de somme particulier qui se calculent par simplifications successives des termes : les sommes téléscopiques.

Proposition 2 | Somme téléscopique décalée de 1

Soit $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $n \geq p$ et $(a_p, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

La somme $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k)$ est appelée *somme téléscopique*.

Preuve

- Une première preuve peut utiliser directement la définition d'une somme.

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - \cancel{a_n} + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + \cdots + \cancel{a_{p+1}} - a_p = a_{n+1} - a_p.$$

- Une seconde preuve consiste à utiliser un changement d'indice.

Exemple 5 Établir une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

Exemple 6 Déterminer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, pour $n \geqslant 1$.

Exemple 7 **(Téléscopage généralisé)**

1. Avec les mêmes notations que dans la proposition précédente, proposer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+2} - a_k)$.
   - **(1ère Méthode : en se ramenant à un téléscopage classique)**
   - **(2ème Méthode : en utilisant un changement d'indice)**

2. Même question avec $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+3}-a_k)$.

Méthode **Séparation de somme en indices pairs/impairs**

Lorsque le signe change en fonction de la parité de l'indice, il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs.

Exemple 8 **(Somme alternée)** Établir une expression de $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$ pour $n \in \mathbf{N}$.

SOMMES USUELLES. Vous devez connaître certaines sommes usuelles qui figurent dans le programme, les voici.

Proposition 3 | Sommes usuelles

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $q \in \mathbf{K}\backslash\{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La première et la troisième formule seront généralisées dans le Chapter ANA14, car elles sont des cas particuliers des formules de sommation de termes de suites arithmétiques et géométriques.

Preuve

- Soit $n \in \mathbf{N}$, notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$, notons $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

- La somme des cubes se démontre encore par récurrence sur n.
- Soit $n \in \mathbf{N}$, notons $G_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On calcule $(1-q)G_n$.

Exemple 9 Calculer $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.

Sommes trigonométriques. Les nombres complexes, grâce à l'exponentielle complexe et la formule de sommation de termes géométriques, fournissent une méthode très efficace afin de calculer diverses sommes trigonométriques, comme le montrent les exemples ci-après.

Méthode Calculs de sommes trigonométriques

1. Écrire $\cos, \sin$ comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\mathrm{Re}\,(\dots), \mathrm{Im}\,(\dots)$, *i.e.* : $\mathrm{Re}\left(\sum \dots\right) = \sum \mathrm{Re}\,(\dots)$, $\mathrm{Im}\left(\sum \dots\right) = \sum \mathrm{Im}\,(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

Exemple 10 Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$ les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Exemple 11 Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right)}{(\cos x)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k}\right) && (\cos x)^k \textit{ est réel} \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right) && \textit{la partie réelle est linéaire} \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}\right) && \textit{somme de termes d'une suite géométrique, car } \cos x \neq e^{ix} \textit{ pour les } x \textit{ qui nous intéressent} \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{\frac{\cos x - e^{ix}}{\cos x}}\right) && \textit{réduction au même dénominateur} \\
&= \frac{1}{\cos^n x} \mathrm{Re}\left(\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}}\right) && \frac{1}{\cos^n(x)} \in \mathbf{R} \\
&= \frac{1}{\cos^n x} \mathrm{Re}\left(\frac{\cos^{n+1} x - (\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x)}{\cos x - (\cos x + i \sin x)}\right) && \textit{forme algébrique des nombres complexes} \\
&= \frac{1}{\cos^n x} \mathrm{Re}\left(\frac{(\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x) - i\sin(n+1)x}{-i \sin x}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}}.
\end{aligned}$$

Identité de Bernoulli. Nous pouvons généraliser sans difficulté la formule de sommation de termes géométriques. En effet, nous avons pour $q \in \mathbf{R}$ (y compris pour $q = 1$) :

$$1 - q^{n+1} = 1^{n+1} - q^{n+1} = (1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Proposition 4 | Formule de Bernoulli

Soient $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

Preuve

- **(Méthode 1 : par téléscopage)**

- **(Méthode 2 : en utilisant la formule de somme géométrique)**

Codage informatique d'une somme. Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole somme.

Calculer informatique $\sum_{k=p}^{n} a_k$

```python
def somme(p, n):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += a_k # le terme a_k est à taper à la main en fonction
        ↪ de la somme
    return S

def a(k):
    return k
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbf{R}$.

```python
def somme(p, n, x):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S = S + ma.cos(k*x)
    return S

>>> somme(0, 10, 1)
-0.4174477464559059
>>> somme(0, 10, 0) # résultat attendu car on somme 1, onze fois
11.0
```

1.2. Produits

Notation **Notation $\prod$**

- Soit $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ avec $n \leqslant m$ et $(a_n, \dots, a_m) \in \mathbf{K}^{m-n+1}$. On appelle *produit des* $a_k, n \leqslant k \leqslant m$, la quantité notée $\prod_{k=n}^{m} a_k$ ou encore $\prod_{m \leqslant k \leqslant n} a_k$, $\prod_{k \in [\![m,n]\!]} a_k$ et définie par :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = a_n \times \cdots \times a_m.$$
- On appelle *bornes du produit* les entiers relatifs n, p, *indice de la somme* la variable k et $a_k, n \leqslant k \leqslant m$ le terme général d'ordre k.
- **(Convention)** [3] Soit $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $n > m$ et $(a_n, \dots, a_m) \in \mathbf{K}^{n-m+1}$, alors on pose :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = 1.$$

Remarque 2 **(Définition plus rigoureuse : par récurrence)** Comme pour les sommes, une définition équivalente plus rigoureuse du produit serait : avec les mêmes notations qu'avant, on définit $\prod_{k=n}^{m} a_k = u_m$ où $(u_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est la suite vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall k < m,\ u_k = 1, \quad \forall k \geqslant m,\ u_{k+1} = u_k \times a_{k+1}.$$

Remarque 3 **(À propos des conventions)** Lorsqu'une somme est vide, elle vaut 0, cela correspond à l'élément neutre pour le +. En effet, additionner 0 ne change pas la valeur d'un nombre. De même, lorsqu'un produit est vide, il vaut l'élément neutre de ×, c'est-à-dire 1 car si on multiplie un nombre par 1, il est inchangé. Parfois, l'utilisation d'une somme ou d'un produit vide peut simplifier l'expression de certaines propriétés en évitant de traiter des cas particuliers à part.

[3] Pour des bornes mal ordonnées

Exemple 12 Calculer

- $\prod_{k=5}^{8} k$,

- $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$.

Attention **L'indice d'un produit est « muet »**

Comme pour les sommes, il n'apparaît que dans la notation $\prod$ et non dans ce qu'elle représente. On peut donc écrire :

$$\prod_{k=n}^{m} a_k = \prod_{i=n}^{m} a_k = \prod_{j=n}^{m} a_k.$$

Proposition 5 | Propriété des produits

Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $n \geq p$, $c \in \mathbf{K}$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$, $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$.

- $\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$, $\quad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_k}{\prod_{k=p}^{n} b_k}$.
- $\prod_{k=p}^{n} c = c^{n-p+1}$
- $\prod_{k=p}^{n} (c \times a_k) = c^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$.
- $\forall m \in \mathbf{Z}$, $\prod_{k=p}^{n} (a_k^m) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^m$.
- **(Relation de Chasles)** Soit de plus $r \in \mathbf{N}$, $p \leqslant r \leqslant n$. Alors :

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{r} a_k \times \prod_{k=r+1}^{n} a_k.$$

Exemple 13 Calculer $\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3)$ pour $n \geqslant 1$.

Remarque 4 Les changements d'indice se réalisent de la même façon qu'avec les sommes, nous ne revenons pas dessus.

Proposition 6 | Produits téléscopiques

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $n \geq p$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n-p+1}$ non nuls. Alors :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

Le produit $\prod_{k=p}^{n}$ est appelée *produit téléscopique.*

Preuve

- Une première preuve peut utiliser directement la définition d'un produit.

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \times \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \times \cdots \times \frac{\cancel{a_{p+1}}}{a_p} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

- Une seconde preuve consiste à utiliser un changement d'indice.

Exemple 14 Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k}$ pour $n \geqslant 1$.

Remarque 5 Les téléscopages plus généraux se traitent comme ceux des sommes, nous n'y revenons pas ici.

Attention Il n'existe pas de formule pour ....

$$\prod_k (a_k + b_k) = ?, \quad \sum (a_k \times b_k) = ?, \quad \sum (a_k^2) = ?.$$

Autrement dit :

- On sépare facilement une somme en deux s'il y a une somme ou une soustraction entre les termes.
- On sépare facilement un produit en deux s'il y a un produit ou une division entre les termes.

On termine par une grandeur qui va nous intéresser dans la suite.

Définition 1 | Factorielle d'un entier positif
Soit $n \geqslant 0$. Alors on appelle *factorielle de* n, notée $n!$, la quantité suivante :

$$n! = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Exemple 15 Calculer $n!$ pour $n \in [\![0\,,7]\!]$.

Proposition 7 | Par récurrence
La suite $(n!)_{n\in\mathbf{N}}$ est l'unique suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation :

$$a_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n.$$

Remarque 6 C'est cette proposition qui légitime la convention $0! = 1$.

Exemple 16 Simplifier les expressions suivantes.

1. $\dfrac{8!}{6!}$
2. $\dfrac{11!}{9!2!}$,
3. $\dfrac{13!-12!}{12!}$,
4. $\dfrac{4}{12!} - \dfrac{4}{11!} + \dfrac{4}{10!}$.

La factorielle est une suite qui grandit très vite, plus que les suites exponentielles ! Pour l'exemple, le nombre d'arbres phylogénétiques théoriquement possibles grandit en fonction du nombre d'espèces considérées comme une factorielle.

Codage informatique d'un produit. Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole produit.

Calculer informatique $\prod_{k=p}^{n} a_k$

```python
def produit(p, n):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= a_k # le terme a_k est à taper à la main en fonction
        ↪ du produit
    return P
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbf{R}$.

```python
def produit(p, n, x):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= ma.exp(k*x)
    return P

>>> produit(0, 10, 1)
7.694785265142015e+23
>>> produit(0, 10, 0) # résultat attendu
1.0
```

2. COEFFICIENTS BINOMIAUX ET FORMULE DU BINÔME

2.1. Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux seront revus dans le Chapter ALG5 dans un contexte de dénombrement. Pour le moment, nous nous intéressons qu'à l'aspect calculatoire et analytique.

Définition 2 | Coefficients binomiaux
Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$. On définit alors :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 17 (Quelques coefficients binomiaux) Soit $n \in \mathbf{N}$.

- $\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{-1} = 0.$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. En effet,
  $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!}$
- $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. En effet,
  $\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{6(n-3)!}.$

Proposition 8 | Propriété des coefficients binomiaux
Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$, $k \leqslant n$.

- **(Forme simplifiée)** Si $0 \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}.$$
- **(Valeurs remarquables)**
$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$
- **(Symétrie)**
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$
- **(Formule d'absorption)**
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
- **(Formule de Pascal)**
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Preuve Pour simplifier, faisons la preuve dans le cas où k, n sont positifs. La convention $k \leqslant 0$ ne posant pas de difficultés supplémentaires.

- Immédiat par définition.
- Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors on a $0 \leqslant n-k \leqslant n$ à l'aide d'opérations élémentaires sur l'encadrement. On a alors :
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$
- Nous faisons uniquement la preuve dans le cas $0 \leqslant k < n$, les autres ne posent pas de problème.

- Nous faisons uniquement la preuve dans le cas $0 \leqslant k < n$, les autres ne posent pas de problème.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+(n-k)}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\,\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Visualisation à l'aide du triangle de Pascal. La formule de Pascal permet aussi de calculer la valeurs des premiers coefficients binomiaux, de manière « récursive » (*i.e.* en utilisant les valeurs calculées précédemment). Dans le tableau suivant, les cases contiennent les valeurs de $\binom{n}{k}$. D'après la formule ci-dessus, chaque case est la somme de celle directement au dessus, et de celle au dessus à gauche.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

La formule de Pascal permet aussi de démontrer un fait qui pour l'instant n'était pas évident : les coefficients binomiaux sont des entiers.

Corollaire 1
Les coefficients binomiaux sont des entiers.

Preuve Montrons la propriété $\mathscr{P}(n)$« $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} \in \mathbf{N}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ par récurrence sur n.

Théorème 1 | Formule du binôme de Newton

Soient $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ et $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Initialisation. On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \textit{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \textit{en posant } i = k+1\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} && \textit{formule de Pascal}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

Corollaire 2 | Deux cas particuliers

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

Preuve

Dans la formule du binôme de Newton, que nous utiliserons pour l'instant seulement dans des cas où n a une valeur précise (et petite) :

1. Tous les termes sont des produits d'une puissance de a et d'une puissance de b, de telle sorte que la somme de ces puissances redonne n. Et toutes les possibilités apparaissent.
2. Le coefficient binomial devant le terme $a^k b^{n-k}$ est $\binom{n}{k}$ ou (c'est pareil) $\binom{n}{n-k}$, autrement dit c'est la puissance de a ou de b parmi la puissance totale n.
3. En particulier les coefficients devant $a^k b^{n-k}$ et devant $a^{n-k} b^k$ sont les mêmes. La formule est donc symétrique par rapport au « milieu » de la somme.
4. Quand n est petit, il suffit donc souvent de calculer jusqu'à $\binom{n}{2}$, au pire des cas jusqu'à $\binom{n}{3}$ et ceci peut se faire facilement avec la formule avec la factorielle ou le triangle de Pascal.

Exemple 18 Développer, pour a et b deux éléments de $\mathbf{K}$, $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5$.

3. SOMMES DOUBLES

Dans cette dernière section, on s'intéresse à la notion de somme double, *i.e.* de termes possédant deux indices et notés $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$ avec $n, p \geqslant 0$. Afin d'alléger la présentation, on suppose donc que les indices i, j sont définis à partir de 1, mais naturellement ces notions peuvent être étendues à des sommes doubles plus générales, comme pour les sommes simples.

$i \backslash j$	1	2	3	…	p
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	…	$a_{1,p}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	…	$a_{2,p}$
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	…	$a_{3,p}$
⋮	⋮			…	
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	…	$a_{n,p}$

On peut alors imaginer que les termes sont regroupés dans un tableau à deux entrées. La zone sur fond rouge correspond alors ce que nous appellerons dans la suite la *surdiagonale du tableau*.

3.1. Sommes doubles libres

Commençons par une propriété qui nous servira dans la suite : on peut toujours permuter deux sommes simples.

Proposition 9 | Permuation de sommes simples

Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbf{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

La formule se justifie sans trop de difficultés en revenant à la définition de somme simple. Mais de manière plus visuelle, constatons qu'elle signifie qu'il revient au-même de sommer tous les termes du tableau en le parcourant ligne après ligne ou colonne après colonne. Logique ! Plus précisément,

- pour i fixé, $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}$ correspond à la somme des coefficients sur la ligne i,
- pour j fixé, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}$ correspond à la somme des coefficients sur la colonne j.

L'ordre de sommation n'a pas d'importance et on peut adopter la notation compacte :

Notation Somme double libre

Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbf{K}^{np}$. On appelle *somme double des* $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$, la quantité notée $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$ ou encore $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$, définie par :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Et lorsqu'on somme sur la même plage d'indices, c'est-à-dire $n = p$, on note :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque 7 Même si ci-dessus il n'y a qu'un symbole somme, on a bien deux sommes simples cachées derrière.

Exemple 19 Calculer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (j-i)^2$.

3.2. Sommes doubles sous contrainte

L'idée est ici de définir la somme sur le triangle supérieur du tableau (en rouge clair). Cela consiste à instaurer une contrainte entre les deux indices. Regardons la seconde ligne du tableau, pour $i = 2$, alors j parcourt $2, 3, \dots, p$, on a donc ligne par ligne la relation $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$.

Proposition 10 | Permuation de sommes simples
Soient $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbf{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=\mathbf{i}}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\mathbf{j}} a_{i,j}.$$

Attention
Contrairement à la somme sur un rectangle, les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure.

Méthode Permuter des sommes simples à indices liés
Pour retenir

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j},$$

toujours garder à l'esprit l'encadrement entre les indices : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. Ainsi, pour $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$:

- Si i n'existe pas, j se balade entre 1 et p, ce qui explique la somme extérieure en j.
- Si j est fixé entre 1 et n, alors i se balade entre 1 et j, ce qui explique la somme intérieure en i.

Notation Somme double sous contrainte
Soient $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbf{K}^{np}$. On appelle alors :

- *somme double sur le triangle inférieur* la somme

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$$

- *somme double sur le triangle inférieur strict* la somme

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{p}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$$

Exemple 20 Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Calculer $\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)^2$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$.

3.3. Sommes doubles à indices séparables

Proposition 11 | Permutation de sommes simples

Soient $(n,p)\in(\mathbf{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathbf{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_ib_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p}b_j\right).$$

Preuve On a : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}a_ib_j=a_i\left(\sum_{j=1}^{p}b_j\right)$ par linéarité de la somme (a_i est une constante par rapport à la somme en j).

Or, $\mathrm{B}=\displaystyle\sum_{j=1}^{p}b_j$ est une constante par rapport à i, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{j=1}^{p}b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{B}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\mathrm{B}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p}b_j\right).$$

Exemple 21 Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2^{i+j}}$ pour $n\geqslant 1$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du chapitre** ⋆ ⋆ ⋆

4. EXERCICES

4.1. Factorielles

Exercice ALG4.1 | (Solution : 85) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!}, \quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad C = \frac{n!}{(n-1)!}, \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!}, \quad E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

4.2. Calculs de sommes

Exercice ALG4.2 | (Solution : 85) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$, pour $x \in \mathbf{R}$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$,
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)$,
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$,
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} \left(1 - a^2\right)^{2k+1}$,
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^k + 1)$,
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$,
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$,
9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j$ avec $a \in \mathbf{R}$,
10. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i$,
11. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$,
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$.

Exercice ALG4.3 | **Coefficients binomiaux** (Solution : 85) Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle S_1 = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}$
2. $\displaystyle T = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, puis $\displaystyle S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1) + k$).
3. $\displaystyle S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

Exercice ALG4.4 | **Sommes télescopiques**

1. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ des nombres réels avec $n \in \mathbf{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_{i-1})$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$.

Exercice ALG4.5 | **Sommes télescopiques**

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que :
$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}.$$
En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+3}.$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
4. Retrouver ce dernier résultat par récurrence : montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice ALG4.6 | Sommes trigonométriques Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(kx)$,
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(kx)$, $S_2' = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)$,
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx)$, $a, x \in \mathbf{R}$,
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$,
5. $S_5 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$, $x \in \mathbf{R}$,
6. $S_6 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(2k)}{3^k}$,
7. $S_7 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(y+kx)$, pour $(x,y) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice ALG4.7 | Sommes et dérivation (Solution : 86) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. On souhaite calculer S en utilisant une méthode par dérivation *terme à terme* d'une certaine fonction.

1. On pose, pour tout x dans $\mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.
2. En déduire, pour tout x dans $\mathbf{R}$, la valeur de $g(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, puis en déduire S.

Exercice ALG4.8 | Sommes et dérivation géométrique (Solution : 86) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, et en déduire $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.
3. Calculer de la même façon : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Exercice ALG4.9 | Par récurrence (Solution : 86) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

–

Exercice ALG4.10 | Par récurrence (Solution : 87) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ (somme des nombres impairs).

–

Exercice ALG4.11 | Par récurrence (Solution : 87) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ et $n \geq 2$, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \dfrac{1}{3} n(n-1)(n+1)$.

Exercice ALG4.12 | Sommes d'indices pairs et impairs (Solution : 87) Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n.

4.3. Calculs de produits

Exercice ALG4.13 | Soit $(n, p, i) \in \mathbf{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} k$ et $\prod_{k=i}^{i+n} k$,
2. $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\dfrac{k}{n}\right)$
3. $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k}{2k+1}$
4. $\prod_{k=1}^{n} (4k-2)$
5. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$
6. $\prod_{k=0}^{p-1} \dfrac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice ALG4.14 | (Solution : 88) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \ \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$.

4.4. Calculs de sommes doubles

Exercice ALG4.15 | Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$,
3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$,
4. $\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} \frac{k}{\ell+1}$,
5. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$,
6. $\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} k i^2$,
7. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$,
8. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

4.5. Python

Exercice ALG4.16 | Coder une première fonction permettant le calcul de $\sum_{p\leq i,j\leq n}(j-i)^2$ puis une seconde fonction permettant le calcul de $\prod_{p\leq i\leq j\leq n} 2^{\frac{i}{j}}$.

4.6. Solutions des exercices

Solution (exercice ALG4.1)

(Énoncé : 82)

- $A = \dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7\times 6!}{6!} = \boxed{7}$
- $B = \dfrac{3\times 4!}{(3!)^2} = \dfrac{3\times 4\times 3!}{3!\times 3\times 2} = \boxed{2.}$
- $C = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n.}$
- $D = \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E = \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n(n^2-1+1) = \boxed{n^3.}$

Solution (exercice ALG4.2)

(Énoncé : 82)

1. Soit $E = \{1\}$. On a $\boxed{\mathscr{P}(E) = \{\emptyset,\{1\}\}}$. Puis, on obtient : $\boxed{\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{1\},\{1,\emptyset\}\}}$.
2. $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$
3. Soit $E = \{a,b\}$. On a : $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Puis :

Solution (exercice ALG4.3)

(Énoncé : 82)

1. **Calcul de $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}$:** On peut déjà remarquer que : $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = 0\times\binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$.

   Ici on ne sait pas calculer la somme sans transformation car il y a le j. On utilise d'abord une propriété des coefficients binomiaux, et on obtient :

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}$$

   car n est alors indépendant de l'indice de sommation donc on peut le sortir de la somme. Pour se ramener à du binôme de Newton, on commence par poser le changement d'indice : $i = j-1$ et on obtient $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$ (c'est ici qu'il est mieux d'être passé au début d'une somme allant de 0 à n à une somme allant de 1 à n car sinon on aurait un indice commencant à -1. Si on n'a pas changé la somme au début, une autre méthode est alors de faire ici une relation de Chasles afin d'isoler l'indice -1). On reconnaît alors un binôme de Newton et on obtient $\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.}$

2. **Calcul de $T = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$:** Il s'agit ici d'appliquer deux fois de suite la propriété sur les coefficients binomiaux : $T = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$ en reprenant les calculs faits au-dessus. On pourra aussi remarquer que la somme T peut être commencée à 2. Puis en réappliquant la propriété sur les coefficients binomiaux : $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$, on obtient que : $T = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. On effectue alors le changement d'indice $j = k-2$ et on obtient $T = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}$. Donc en utilisant le binôme de Newton, on a : $\boxed{T = n(n-1)2^{n-2}.}$ **Calcul de $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$:** Comme $k^2 = k(k-1)+k$ et par linéarité de la somme, on obtient que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T + S_1 = \boxed{n(n+1)2^{n-2}.}$

3. Calcul de $\mathbf{S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}}$: Là encore, il faut commencer par utiliser la propriété sur les coefficients binomiaux. Comme $(i+1)\binom{n+1}{i+1} = (n+1)\binom{n}{i}$, on obtient que : $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$. Ainsi, la somme devient : $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}$ car $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de l'indice de sommation i. On fait le changement d'indice $j = i+1$ et on utilise aussi la relation de Chasles pour faire apparaître le binôme de Newton. On obtient $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right]$. Ainsi, on obtient $\boxed{S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right]}$.

Solution (exercice ALG4.7)

(Énoncé : 83) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)!-1$.

- **Initialisation.** pour $n=0$: on a $\sum_{k=0}^{0} k\,k! = 0$ et $1!-1=0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On a, en mettant à part le dernier terme de la somme :
  $$\sum_{k=0}^{n+1} k\,k! = \sum_{k=0}^{n} k\,k! + (n+1)(n+1)!.$$
  Par hypothèse de récurrence, on a
  $$\sum_{k=0}^{n+1} k\,k! = \quad (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! = \quad (n+1)!(n+2)-1 = \quad (n+2)!-1.$$
  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)!-1}$.

Solution (exercice ALG4.8)

(Énoncé : 83) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

- **Initialisation.** pour $n=0$: D'un côté, on a : $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2\times 0+1 = 1$. De l'autre côté, on a : $(0+1)^2 = 1$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On, en mettant à part le dernier terme de la somme : $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1$.
  : Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :
  $$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = (n+1)^2+2n+3 = n^2+2n+1+2n+3 = n^2+4n+4 = (n+2)^2.$$
  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2}$.

Solution (exercice ALG4.9)

(Énoncé : 83) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)!-1$.

- **Initialisation.** pour $n=0$: on a $\sum_{k=0}^{0} k\,k! = 0$ et $1!-1=0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On a, en mettant à part le dernier terme de la somme :
  $$\sum_{k=0}^{n+1} k k! = \sum_{k=0}^{n} k k! + (n+1)(n+1)!.$$
  Par hypothèse de récurrence, on a
  $$\sum_{k=0}^{n+1} k k! = \quad (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = \quad (n+1)!(n+2) - 1 = \quad (n+2)! - 1.$$
  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} k k! = (n+1)! - 1}$.

Solution (exercice ALG4.10)

(Énoncé : 83) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

- **Initialisation.** pour $n = 0$: D'un côté, on a : $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1$. De l'autre côté, on a : $(0+1)^2 = 1$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On, en mettant à part le dernier terme de la somme : $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + 2(n+1) + 1$.
  : Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :
  $$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$
  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2}$.

Solution (exercice ALG4.11)

(Énoncé : 83) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ la propriété : $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

- **Initialisation.** pour $n = 2$. On a : $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 2$ et : $\frac{1}{3} \times 2 \times 1 \times 3 = 2$. Ainsi $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a, en mettant à part le dernier terme de la somme : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + n(n+1)$.
  Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :
  $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) + n(n+1) = n(n+1)\left(\frac{n-1}{3} + 1\right) = n(n+1)\frac{n+2}{3}.$$
  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)}$.

Solution (exercice ALG4.12)

(Énoncé : 83) Raisonnement par récurrence :

- $$\mathscr{P}(n) : \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$$
- **Initialisation.** pour $n = 1$:
  On a $\prod_{k=1}^{1}(4k-2) = 2$ et $\frac{(2n)!}{n!} = \frac{2!}{1!} = 2$.
  Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On a
  $$\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(4k-2) \times (4(n+1)-2).$$
  En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors
  $$\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!} \times (4n+2).$$
  Or, on a
  $$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!} = (4n+2) \times \frac{(2n)!}{n!}.$$
  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée.
- Il résulte du principe de récurrence que :
  $$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Solution (exercice ALG4.14)

(Énoncé 83) Raisonnement par récurrence :

- $$\mathscr{P}(n) : \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$$
- **Initialisation.** pour $n = 1$:
  On a $\prod_{k=1}^{1}(4k-2) = 2$ et $\frac{(2n)!}{n!} = \frac{2!}{1!} = 2$.
  Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On a
  $$\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(4k-2) \times (4(n+1)-2).$$
  En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors
  $$\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!} \times (4n+2).$$
  Or, on a
  $$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!} = (4n+2) \times \frac{(2n)!}{n!}.$$
  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée.
- Il résulte du principe de récurrence que :
  $$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Chapitre ALG5.

Compléments sur les ensembles, Dénombrement

Résumé & Plan

-

Chapitre ALG6.

Applications

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est l'introduction du vocabulaire élémentaire des applications, ce qui inclut les fonctions. On s'intéresse aux différentes notions afférentes au nombre d'antécédents d'un élément de l'espace d'arrivée. En BCPST, les exemples de ce chapitre seront le plus souvent puisés dans l'ensemble des fonctions de **R** dans **R** afin d'avoir une notion très visuelle des définitions.

Du paradis créé pour nous par CANTOR *personne ne nous chassera.*

— David HILBERT

1. COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du chapitre** ⋆ ⋆ ⋆

2. EXERCICES

2.1. Solutions des exercices

Chapitre ALG7.

Matrices

Résumé & Plan

Le calcul matriciel est un puissant outil pour traiter de nombreux problèmes. En analyse les suites récurrentes linéaires ou de systèmes différentiels linéaires, en algèbre il permet l'étude efficace des applications linéaires ou encore des systèmes d'équations linéaires. L'objectif de ce chapitre est de développer les notions du calcul matriciel qui nous permettront de traiter les problèmes précédents plus tard dans l'année.

Être visionnaire c'est regarder le monde au delà du temps. Mais on ne voit pas plus loin, que les choix que l'on ne peut pas comprendre.

— L'Oracle dans *The Matrix*

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n, p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

Commençons par introduire une notation importante que nous utiliserons dans le chapitre.

Notation Symbole de Kronecker

Soient x, y deux éléments d'un ensemble E, alors le *symbole de Kronecker de* x, y est défini par :

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1 Soit $E = [\![1\,,\,n]\!]$ avec $n \in \mathbf{N}^\star$, et $i, j, k \in [\![1\,,\,n]\!]$.

- $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $1-\delta_{i,j} = \begin{cases} 1-0 & \text{si } i\neq j, \\ 1-1 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } i\neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $\delta_{i,j}\times\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. MATRICES & OPÉRATIONS

1.1. Généralités

Définition 1 | Matrice
On appelle *matrice $n\times p$ à coefficients dans* $\mathbf{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbf{K}$ indexée par $[\![1\,,\,n]\!]\times[\![1\,,\,p]\!]$, c'est-à-dire une application $[\![1\,,\,n]\!]\times[\![1\,,\,p]\!]\longrightarrow\mathbf{K}$. On note une telle matrice :

- sous la forme $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, ou plus simplement $(A_{i,j})_{i,j}$ si le contexte est clair.
- Ou encore sous la forme d'un tableau entre parenthèses à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}.$$

- Pour $(i,j)\in[\![1\,,\,n]\!]\times[\![1\,,\,p]\!]$, on appelle $A_{i,j}$ *coefficient de la ligne i et de la colonne j*.
- Si $p=1$, on parle de *vecteur colonne*, et

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix}.$$

- Si $n=1$, on parle de *vecteur ligne*, et

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \end{pmatrix}.$$

- Si $n=p$, on dit que la matrice est *carrée*.

Remarque 1 (Lignes avec ou sans virgules ?) En toute rigueur les éléments de $\mathbf{K}^p$ sont notés $(x_1,\ldots,x_p)$ alors que ceux de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ sont notés $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$. Mais dans les deux cas, ces éléments sont définis comme des applications de $[\![1\,,\,p]\!]$ dans $\mathbf{K}$, on s'autorisera donc à écrire :

$$(x_1,\ldots,x_p) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}.$$

Attention
- De même qu'on ne confond pas une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (une famille) avec son n-ième terme u_n (pour $n\in\mathbf{N}$, un nombre réel),
- on ne confondra pas une matrice $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ (une famille) avec son coefficient (i,j) noté $A_{i,j}$ (un élément de $\mathbf{K}$).

Notation
- On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices $n\times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- Lorsque $n=p$, on note plus simplement $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ au lieu de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ et on note plus simplement $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ au lieu de $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

Dans les notations précédentes, le premier indice désignera toujours le numéro de ligne, et le second le numéro de colonne.

Exemple 2
- $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \subset \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{C})$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 & i \\ 1+2i & 8 & e^{i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{C})$,

- $$\left(2^i+3j\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 2}} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6\\ 4+3 & 4+6\\ 8+3 & 8+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8\\ 7 & 10\\ 11 & 14\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbf{R}).$$

Exemple 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 2\end{pmatrix}$. Écrire le coefficient (i,j) de la matrice A en fonction de $\delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$.

Définition 2 | Égalité matricielle

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux matrices de-même taille. On dit que A et B sont *égales* et on note $A = B$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!], \quad A_{i,j} = B_{i,j}.$$

Exemple 4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos(0) & e^{i\pi}\\ \tan(0) & 2\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On a $A = B$ mais $A \neq C$ et $B \neq C$.

Notation Écriture en lignes/colonnes d'une matrice

Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors on notera en ligne ou en colonnes de la manière suivante :

$$A = \left(C_1(A) \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, C_p(A) \right) = \begin{pmatrix} L_1(A)\\ \hline \vdots \\ \hline L_n(A)\end{pmatrix}.$$

Exemple 5 Pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, on a :

$$C_1(A) = \begin{pmatrix} -2\\ 3\end{pmatrix}, \quad C_2(A) = \begin{pmatrix} 0\\ 2\end{pmatrix}, \quad C_3(A) = \begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix},$$

$$L_1(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad L_2(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

MATRICES USUELLES. Pour terminer, définissons quelques matrices usuelles. La terminologie associée aux deux premières n'est pas anodine, il y a un lien avec les applications linéaires identiques et les homothéties définies dans les Chapters ALG10 et ALG11, ce lien sera explicité plus tard dans ce chapitre.

Définition 3 | Matrice nulle

On appelle *matrice nulle de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice $n \times p$ ayant tous ses coefficients égaux à zéro :

$$0_{n,p} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Définition 4 | Matrice identité
On appelle *matrice identité de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\boldsymbol{K})$ la matrice $n \times n$ n'ayant que des uns sur la diagonale, et des zéros ailleurs :

$$\mathrm{I}_n = \left(\delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 | Matrice homothétique
On appelle *matrice homothétique de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\boldsymbol{K})$ *de rapport* $\lambda \in \boldsymbol{K}$ la matrice $n \times n$ suivante :

$$\lambda\mathrm{I}_n = \left(\lambda\delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Définition 6 | Matrice Attila
On appelle *matrice* Attila *de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\boldsymbol{K})$ la matrice $n \times n$ suivante :

$$\mathrm{J}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 7 | Matrices élémentaires (ou base canonique)
Pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, et $\ell \in [\![1\,,\,p]\!]$, on appelle *matrice élémentaire d'indice* (k,ℓ), notée $\mathrm{E}_{k,\ell}$, la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ constituée de zéros partout sauf pour le coefficient en ligne k et colonne ℓ, qui vaut un.

Exemple 6 (pour $n = 2, p = 3$) Dans $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, on a :

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2 (Réécriture avec le symbole de Kronecker) Autrement dit,

$$\mathrm{E}_{k,\ell} = \left(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

En effet, tous les coefficients sont nuls, sauf si $\delta_{i,k}$ et $\delta_{j,\ell}$ valent 1, c'est-à-dire si le coefficient considéré est sur la ligne k et la colonne ℓ.

Nous reparlerons plus largement des matrices usuelles quand nous traiterons des espaces-vectoriels, plus tard dans l'année.

1.2. Opérations sur les matrices

Commençons par définir quelques opérations sur les matrices, en commençant par l'addition.

Addition et multiplication externe. On commence par deux opérations très intuitives sur les matrices.

Définition 8 | Somme matricielle
Soient $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On note $\mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice *définie* par :

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \left(\mathrm{A}_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ sont obtenus en sommant ceux de A avec ceux de B.

On peut également multiplier une matrice par un scalaire, et ainsi définir une opération externe sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Définition 9 | Multiplication par un scalaire d'une matrice

Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors la matrice λA est définie par :

$$\lambda A = \left(\lambda A_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de λA sont obtenus en multipliant ceux de A par λ.

En particulier, pour $\lambda = -1$, on arrive à la définition suivante.

Définition 10 | Matrice opposée

Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle *matrice opposée de* A la matrice $-A$.

Exemple 7

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}, \text{ alors } 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & -3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 6 & 3 & 3 & 6 & -6\end{pmatrix}.$$

Les opérations $+, .$ sur les matrices possède des propriétés similaires à celles des nombres réels déjà rencontrées, dont la vérification ne présente pas de difficulté.

Proposition 1 | Propriétés de la somme

Soient $(A, B, C) \in\in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})^3$.

- **(Associativité)** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **(Commutativité)** $A + B = B + A$.
- **(Élément neutre)** $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$. On dit que $0_{n,p}$ est un *élément neutre* pour l'addition matricielle.
- **(Élément opposé)** $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication externe

Soient $(A, B) \in\in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors :

- **(Associativité)** $(\lambda\mu).A = \lambda.(\mu.A)$.
- **(Élément neutre)** $1.A = A$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication externe.
- **(Distributivité)** $(\lambda + \mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A, \quad \lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$.

Multiplication interne. Passons à présent à une troisième opération : celle du produit matriciel. Nous allons chercher cette fois-ici à multiplier deux matrices entre elles. La définition ci-après peut paraître parachutée pour le moment, mais elle trouvera tout son sens dans le Chapter ALG11 où nous utiliserons les matrices pour traiter des problèmes d'applications linéaires. Pour l'instant l'objectif n'est donc pas de comprendre pourquoi on définit le produit matriciel ainsi, mais de savoir les calculer.

Définition 11 | Produit matriciel

Soient $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{p},q}(\mathbf{K})$, donc telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Alors on appelle *matrice produit de* A *par* B, notée $A \times B$ ou plus simplement AB, la matrice de format $n \times q$ définie par :

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} A_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}, \quad \text{autrement dit :}$$

$$\forall (i, j) \in [\![1\,,\,p]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Remarque 3 (Sur le format des matrices) On remarque que le nombre de colonnes de A doit obligatoirement être égal au nombre de lignes de B. On pourra retenir le schéma suivant type « relation de Chasles » pour connaître le format de la matrice produit :

$$\text{Matrice } n \times \cancel{q} \quad \times \quad \text{Matrice } \cancel{q} \times p \quad = \quad \text{Matrice } n \times p$$

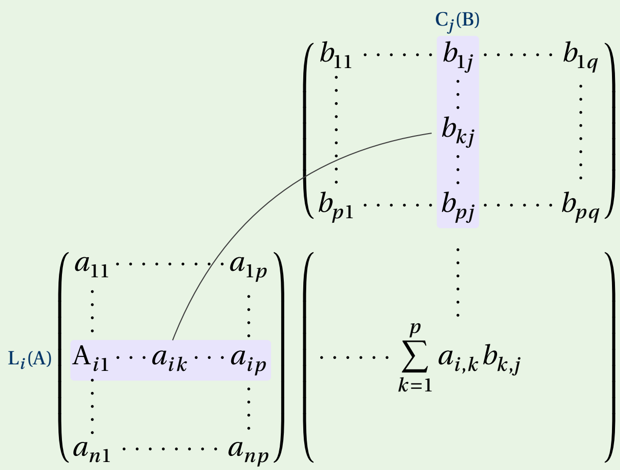
En particulier, le produit de deux matrices carrées de taille n est encore une matrice carrée de taille n.

Attention Existence du produit matriciel

Toujours vérifier les formats des matrices avant de calculer le produit matriciel des deux.

Méthode Visualisation du produit matriciel

Le produit matriciel peut être illustré, **au brouillon**, de la façon suivante.



C'est l'image précédente qu'il faut avoir en tête, mais dans la pratique on écrira toujours les deux matrices sur une seule ligne. On retiendra en particulier que pour calculer le coefficient (i, j) du produit, on a besoin de regarder la i-ième ligne de la première et la j-ième colonne de la deuxième.

Remarque 4 (Produit et écriture en colonne) Il peut être parfois utile de retenir le produit matriciel de la manière suivante, lorsque la matrice de droite est écrite en colonne.

$$AB = A \times \left(C_1(B) \middle| \dots \middle| C_q(B) \right) = \left(A \times C_1(B) \middle| \dots \middle| A \times C_q(B) \right).$$

Les $A \times C_i(B), i \in [\![1\,,\,q]\!]$ sont des vecteurs colonnes par définition du produit matriciel, qui forment les colonnes de la matrice produit AB.

Attention Non commutativité du produit matriciel

Le produit matriciel n'est pas commutatif (sauf pour $n = 1$). D'une part, cela n'a aucun sens en raison des tailles des matrices dès qu'elles ne sont pas carrées. D'autre part, même avec des matrices carrées, on peut calculer par exemple $A \times B$ et $B \times A$ pour :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 9 Calculer, si c'est possible, les produits AB et BA dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 10 Pour $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, calculer J_2AJ_2.

Définition 12 | Matrices qui commutent

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ deux matrices carrées. On dit que A *et* B *commutent* si

$$AB = BA.$$

Attention **Pas de résultat sur les équations-produit**

Vous avez vu au collège qu'un « un produit (de nombres réels) est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul ». Ceci est **faux** pour les matrices. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC :

En résumé, on ne peut simplifier par A :[1]

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

De-même, pour tout vecteur colonne X :

$$AX = 0 \not\Rightarrow X = 0.$$

Proposition 3 | Propriétés de la multiplication

Soient n, q, p, r trois entiers non nuls et $(A, A') \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $(B, B') \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :

- **(Linéarité à gauche)** $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$,
- **(Linéarité à droite)** $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$.
- **(Associativité)** $A \times (BC) = (AB)C$.
- **(Neutre)** Si $n = p$, c'est-à-dire si A est une matrice carrée, alors :

$$I_n \times A = A \times I_p = A.$$

Preuve

-
- Identique à la précédente.
- Admis.
-

Les propriétés précédentes sont analogues à celles déjà rencontrées sur les nombres réelles dans le Chapter ALG2, avec une exception très importante : la non-commutativité du produit matriciel.

[1]En revanche, ce sera le cas dans la suite si A est inversible

Transposition matricielle. L'opération de transposition est une opération qui réalise une « symétrie d'axe $i = j$ » dans les coefficients de la matrice, c'est-à-dire un échange entre les lignes et les colonnes. Voyons une définition plus formelle.

Définition 13 | Transposée

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice. On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, notée $A^\top$, telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$A^\top{}_{i,j} = A_{j,i}.$$

Autrement dit, le coefficient $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$ de la matrice $A^\top$ est le coefficient (j, i) de A.

En particulier, le nombre de lignes de $A^\top$ est le nombre de colonnes de A, et le nombre de colonnes de $A^\top$ est le nombre de lignes de A.

Attention

Parfois certains livres ou sujets de concours notent la transposée à gauche, c'est-à-dire ${}^\top A$, mais cette notation a tendance à disparaitre au profit de la notation anglo-saxonne de ce cours (et du programme).

Exemple 11 On a : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^\top = (1 \ \dots \ 1)$.

Proposition 4 | Propriétés de la transposition

- **(Linéarité)** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors :

$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

- **(Involutivité)** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors : $(A^\top)^\top = A$.
- **(Transposée d'un produit)** Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, alors :

$$(A \times B)^\top = B^\top A^\top.$$

Attention **À la formule d'un produit**

La transposition **échange** l'ordre d'un produit.

Preuve

-
-
-

Exemple 12 **(« Forme quadratique » associée à une matrice diagonale réelle)**

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $x_i \in \mathbf{K}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$. Quel est le format de $X^\top.X$? de $X.X^\top$? Exprimer le coefficient général de chacune des matrices.

En nota

2. On se place dans le cas $n = 2$ et $\underline{\mathbf{K} = \mathbf{R}}$. On considère $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. On a l'équivalence :

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^+ \iff \forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \quad q(X) \underset{\textbf{(défi.)}}{=} X^\top D X \geqslant 0.$$

3. Établir la même équivalence, mais en remplaçant D par $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Les éléments précédents s'étendent naturellement à des matrices de taille $n \times n$.

1.3. Et en Python ?

Un TP sera consacré aux manipulations de matrices en Python, et aux principales fonctions existantes. Un outil est dédié pour cela : le module numpy, qui crée notamment des objets appelés *tableaux* numpy et qui permettent de traiter toute sorte de calculs matriciels.

Nous faisons une brève synthèse ci-dessous, observez les résultats.

Quelques manipulations matricielles en Python

```
>>> import numpy as np
>>>
>>> # Création
>>> A = np.array([[1,2,3], [4,5,6]])
>>> B = np.array([[2,3,4], [5,6,7]])
>>> type(A)
<class 'numpy.ndarray'>
>>> #on accède aux éléments comme on le ferait avec des listes de
↪ listes classiques
>>> A[1][2]
6
>>> #Mais on peut aussi utiliser une notation plus « mathématique
↪ » et se passer des doubles crochets
>>> A[1, 2]
6
>>>
>>> # Récupérer le format d'une matrice
>>> n,p = A.shape
>>>
>>> #Extraction : fonctionnement identique aux listes. Les :
↪ signifient que l'on impose aucune condition sur la position où
↪ il est placé (ici, cela signifie « peu importe la ligne »,
↪ donc on renvoie une colonne)
>>> A[:, 2]
array([3, 6])
>>> #Somme
>>> C = A + B
>>> C
array([[ 3,  5,  7],
       [ 9, 11, 13]])
>>>
>>> #Transposition
>>> np.transpose(C)
```

```
array([[ 3,  9],
       [ 5, 11],
       [ 7, 13]])
>>>
>>> #Produit
>>> A @ np.transpose(B)
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>>
>>> # Ou encore np.dot(A, np.transpose(B))
>>> #le symbole @ est d'utilisation plus aisée que la fonction
    np.dot
>>>
>>> #Matrices usuelles
>>> np.zeros((1, 4))
array([[0., 0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2, 1)) #Attention : des tuples sont requis pour ces
    deux fonctions
array([[1.],
       [1.]])
>>> np.eye(3, 3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> #Mais cela fonctionne aussi :
>>> np.eye(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

2. MATRICES CARRÉES

Dans cette section, nous discutons de résultats très spécifiques aux matrices carrées. Elles seront donc le plus souvent de format $n \times n$ avec $n \geqslant 1$.

2.1. Matrices remarquables

Définition 14 | Matrice diagonale, triangulaire

Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Alors :

- on appelle *coefficients diagonaux* de la matrice A les coefficients de la forme $A_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ce sont ceux sur la diagonale de A (colorés en bleu *infra*) :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On dit que A est une *matrice diagonale* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ si $A_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Autrement dit, si tous les coefficients de A sont nuls sauf peut-être ceux de la diagonale, A est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On dit que A est une *matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ si $A_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$ (*resp.* $i < j$). Autrement dit, si tous les coefficients de A situés en-dessous (*resp.* au-dessus) de la diagonale sont nuls, A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \textit{resp.} \quad A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Elle est dite *strictement triangulaire supérieure* (*resp. strictement triangulaire inférieure*) si elle est triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) à coefficients diagonaux nuls.

Notation

Si A est diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$, on note généralement $\mathrm{A} = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.

Proposition 5 | Stabilité

- Le produit et la somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
- Le produit et la somme de deux matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure).
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) est une matrice triangulaire inférieure (*resp.* supérieure).

Définition 15 | Matrice symétrique/antisymétrique

Soit $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. On dit que :

- A est *symétrique* si $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$, *i.e.* si :
$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad \mathrm{A}_{i,j} = \mathrm{A}_{j,i}.$$
- A est *antisymétrique* si $\mathrm{A}^\top = -\mathrm{A}$, *i.e.* si :
$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad \mathrm{A}_{i,j} = -\mathrm{A}_{j,i}.$$

Exemple 13 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 5 Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En effet, d'après la définition, $\mathrm{A}_{i,i} = -\mathrm{A}_{i,i}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]^2$ si $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ est antisymétrique. Donc $\mathrm{A}_{i,i} = 0$.

Exemple 14 Parmi les matrices suivantes, préciser leur nature diagonale, triangulaire, symétrique *etc.* : $\mathrm{I}_n, \mathrm{J}_n$ et $\mathrm{X} = \mathrm{U}^\top \mathrm{U}$ où $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbf{K})$.

2.2. Puissances & Nilpotence

Définition 16 | Puissance p-ième

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$. On définit par récurrence la matrice A^p pour tout $k \in \mathbf{N}$ comme étant :
$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{A}^{p+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^p = \mathrm{A}^p \times \mathrm{A}.$$
De manière plus explicite, il s'agit d'un produit de k matrices, toutes égales à A :
$$\mathrm{A}^p = \underbrace{\mathrm{A} \times \cdots \times \mathrm{A}}_{k\text{-fois}}.$$

Le calcul des puissances itérées d'une matrice est généralement difficile, nous verrons dans cette section quelques techniques pour y parvenir.

Définition 17 | Matrice nilpotente

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Alors :

- A est dite *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{A}^k = 0_{n,n}$.
- Dans ce cas, l'*indice de nilpotence* est le plus petit exposant k vérifiant $\mathrm{A}^k = 0_{n,n}$.

L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.

Les matrices nilpotentes ne font pas l'objet d'un travail particulier dans le programme, mais elles sont primordiales dans l'étude générale des matrices, nous en reparlerons plus tard. En outre, ce symbole puissance jouit des mêmes propriétés ci-après que celui sur les nombres réels.

Proposition 6

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ et $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on a :

$$A^p \times A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}.$$

Attention

En revanche, en règle générale :

$$(AB)^p \neq A^p B^p,$$

sauf si les matrices A et B commutent.

Exemple 15 Calculer les puissances de I_n, J_n.

Exemple 16 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

De manière générale, pour les matrices diagonales nous avons le résultat suivant.

Proposition 7 | Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, c'est-à-dire :

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$D = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Cette proposition parait anecdotique, et pourtant elle servira très régulièrement en 2ème année.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** k)*

Théorème 1 | Binôme de Newton pour les matrices

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})^2$ deux matrices carrées **qui commutent**, *i.e.* telles que : $AB = BA$. Alors :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Attention

L'hypothèse de commutativité est cruciale. En effet, $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$, sauf si A, B commutent. [2]

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** p)*

La plupart du temps, les matrices A, B précédentes ne seront pas données explicitement. Un premier enjeu sera donc de pouvoir décomposer une matrice donnée en une somme $A+B$ avec A, B qui commutent. Le plus souvent, afin de simplifier les calculs, nous essaierons de choisir B nilpotente.

Méthode **Binôme et calculs des puissances**

- Si on arrive à écrire une matrice comme somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice nilpotente N (*i.e.* telle que $N^{k_0} = 0$ pour un certain $k_0 \in \mathbf{N}$), qui **commutent**, on utilise la formule du binôme matricielle :

$$(D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$

Par ailleurs, les puissances N^k sont nulles dès que $k \geqslant k_0$.

- On peut toujours écrire une matrice B sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} B^p &= (B - I_n + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B - I_n)^k \\ &= (B + I_n - I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B+I_n)^k. \end{aligned}$$

[2] Pour des réels ou complexes la formule du binôme ne faisait pas apparaitre une telle hypothèse, tout simplement car deux réels ou deux complexes commutent toujours !

Exemple 17 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$. Montrer que $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 18 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exemple 19 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2.3. Inversion

On a vu que la multiplication matricielle nous réserve certaines surprises, en particulier la simplification est impossible de manière systématique. Mais qu'entendait-on par simplification ?

Soient $(b,c) \in (\mathbf{R})^2$ et $a \in \mathbf{R}^*$ que l'on suppose donc **non nul**. Supposons que :

$$ab = ac, \quad \text{et on souhaite prouver que } b = c.$$

Rigoureusement, vous savez depuis le collège que vous pouvez multiplier cette égalité par $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$:

$$(a^{-1}a)\,b = (a^{-1}a)\,c \iff b = c.$$

Pour des matrices, on ne peut bien entendu pas écrire $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, en revanche a^{-1} vérifie :

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

On arrive alors directement à la notion de matrice inverse.

2.3.1. Généralités

Définition/Proposition 1 | Matrice inversible & Groupe linéaire

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Dans ce cas, B est aussi inversible, on l'appelle la *matrice inverse de* A, et on la note $B = A^{-1}$.

On pourrait éventuellement considérer des matrices rectangulaires dans la définition précédente mais nous aurons très vite plus tard dans l'année des arguments pour prouver qu'il n'existe que des matrices carrées inversibles.[3]

Notation

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé *groupe linéaire de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\boldsymbol{K})$.

Preuve *(Unicité de l'inverse)* Il nous faut prouver l'unicité de B : soient donc B, B' deux inverses de A. Alors : $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$.

Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices carrées.

La définition mentionne qu'il faut avoir $AB = BA = I_n$, en pratique c'est un peu plus simple

Théorème 2 | Inverse à droite/gauche

Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})^2$, alors :

$$AB = I_n \iff BA = I_n.$$

Par conséquent, une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ telle que :

$$AB = I_n \quad (\text{ou } BA = I_n).$$

Nous admettons ce résultat, dont la preuve dépasse très largement le programme de BCPST1.

[3]Un argument pourrait être donné dès maintenant si nous avions la trace d'une matrice au programme.

Exemple 20 Étudier l'inversibilité de la matrice nulle, de l'identité, puis des matrices homothétiques.

Exemple 21 **(Inverse donné)** Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Alors C est inversible d'inverse D.

Exemple 22 **(Inverse non donné)** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles, en utilisant la définition.

Attention **Une somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible**

Les matrices A et B définies dans l'exemple précédent sont inversibles mais leur somme ne l'est pas, car égale à la matrice nulle qui n'est pas inversible.

Proposition 8 | Inversibilité de matrices remarquables

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et soit $\mathrm{M} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors :

$$\mathrm{M} \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Preuve Faisons pour simplifier la preuve dans le cas $n = 2$. Elle est identique dans le cas général.

Proposition 9 | Propriétés de l'inversion

- **(Inverse d'un produit)** Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ inversibles, alors $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est inversible et :

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{A}^{-1}.$$

- **(Inverse d'un inverse)** Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible d'inverse elle-même :

$$(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}.$$

- **(Transposition et inversion commutent)** Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ inversible. Alors $\mathrm{A}^{\top}$ est inversible aussi et l'on a :

$$(\mathrm{A}^{\top})^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^{\top}.$$

Attention **À la formule d'un produit**

L'inversion **échange** l'ordre d'un produit.[4]

Preuve *(Point clef — **Vérifier la définition d'une matrice inverse**)*

-
-
-

Revenons à présent à la motivation initiale : celle de pouvoir simplifier des matrices dans des égalités.

Proposition 10 | Simplification matricielle

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice **inversible**. Alors :

- $\forall \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \implies \mathrm{B} = \mathrm{C}.$

[4] Comme pour la transposition !

▸ $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K}), \quad AX = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{n,1}.$

Attention à ne pas oublier d'analyser l'inversibilité ! Nous avons déjà vu des contre-exemples dans le cas contraire.

Preuve

▸

▸

Identité moins une matrice nilpotente. L'objectif de ce paragraphe est de voir pourquoi $I_n - N$ est inversible si N est nilpotente. Nous commençons par généraliser la formule de Bernoulli vue dans le chapitre sur les nombres réels. Cependant, seule la preuve est à connaître, l'énoncé est hors-programme.

Proposition 11 | Formule de Bernoulli [H.P]

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})^2$ deux matrices carrées **qui commutent**, *i.e.* telles que : $AB = BA$ et $p \in \mathbf{N}$. Alors :

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A - B)\sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}.$$

En particulier,

$$\forall p \in \mathbf{N}^\star, \quad I_n - A^{p+1} = (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p} A^k.$$

Remarque 6 Dans les deux dernières égalités, les factorisations par $A - B$ et $I_n - A$ respectivement peuvent se faire à droite.

Preuve *(Point clef — **Téléscopage**)*

Exemple 23 À l'aide de la formule de Bernoulli, montrer que pour $N \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$:

$$N \text{ nilpotente} \Longrightarrow I_n - N \text{ inversible}.$$

Exemple 24 Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbf{K})$. On peut décomposer $B = I_4 - aJ$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors la matrice B est inversible et on peut donner son inverse.

2.3.2. Premières techniques de calcul

On présente des techniques de calcul très proches de la définition dans cette section. La méthode principale, dite d'«échelonnement», sera vue dans le Chapter ALG8.

Avec la définition. Cette technique a été employée dans l'Exemple 22. On cherche l'inverse sous la forme $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et on injecte ces inconnues dans le problème $AB = BA = I_n$. En revanche, cette méthode est vite compliquée à mettre en oeuvre dès que les matrices sont de taille au moins 3×3.

Calcul d'un inverse à l'aide d'un polynôme annulateur. Cette méthode est basée sur l'existence d'une relation polynomiale en la matrice. Découvrons-là au travers d'un exemple.

Exemple 25 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice M vérifie la relation $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.

- On déduit alors que M est inversible et on peut calculer son inverse.

  <u>*Indication :*</u> *On montrera que* $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

De manière générale, formalisons cela dans un exemple.

Méthode — Inverse matriciel à l'aide d'un polynôme annulateur

Supposons qu'il existe $a_0, \dots, a_p \in \mathbf{K}$ tel que $a_0 \neq 0$, et soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice carrée vérifiant

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p = 0_n. \quad (1)$$

On dit que $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ est *annulateur de* A. Alors (1) est équivalente à

$$a_1 A + \dots + a_p A^p = -a_0 I_n,$$

puis étant donné que a_0 est non nul,

$$A\left(-\frac{a_1}{a_0} I_n + \dots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right) = I_n.$$

La matrice A est alors inversible d'inverse $-\dfrac{a_1}{a_0} I_n + \dots - \dfrac{a_p}{a_0} A^{p-1}$.

Attention

Il est fondamentale que a_0, *i.e.* le coefficient devant l'identité, soit non nul.

Cas particulier de la dimension deux. Passons à présent aux petites matrices de tailles 2×2.

Définition 18 | Déterminant d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{K})$. On appelle *déterminant de* A, noté $\det A$, la quantité $\det A = ad - bc$.

Définition/Proposition 2 | Inversibilité d'une matrice 2×2 & Déterminant

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

En cas d'inversibilité, nous avons :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Preuve Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculons AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A) \times I_2.$$

- Supposons $\det(A) \neq 0$, alors $A \times \left(\dfrac{1}{\det(A)} B\right) = I_2$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Supposons que $\det(A) = 0$. Si A était inversible, alors $AB = 0_{2,2}$ entraînerait $A^{-1}AB = 0_{2,2}$, c'est-à-dire $B = 0_{2,2}$ ce qui est clairement absurde. Ainsi A n'est pas inversible.

On déduit donc le résultat.

Exemple 26 Retrouver l'inversibilité des matrices de l'Exemple 22 à l'aide du déterminant, en précisant l'inverse.

Exemple 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Quand est-ce que la matrice $A - \lambda I_2$ est inversible ?

Exemple 28 Soit $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{K})$ une matrice inversible. Exprimer $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det A$.

2.4. Matrices semblables

Définition 19 | Matrices semblables
Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Alors A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, deux matrices sont dites *semblables sur* $\boldsymbol{R}$ s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Notation
On notera $A \sim B$ lorsque deux matrices sont semblables.

Nous verrons dans de futurs chapitres une interprétation de la relation de similitude entre deux matrices. Nous nous intéressons seulement ici à une application calculatoire.

Définition 20 | Diagonalisable, Trigonalisable
- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ diagonale, et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ inversible de sorte que : $A = PDP^{-1}$.
- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe $T \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure, et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ inversible de sorte que : $A = PTP^{-1}$.

En première année, les matrices P et D seront toujours données, en seconde année vous aurez des méthodes pour savoir si une matrice est diagonalisable ou pas, et le cas échéant déterminer D, P. La trigonalisation ne sera quant à elle pas étudiée en BCPST. À quoi peut bien servir de diagonaliser une matrice ? Une application importante est la possibilité de pouvoir calculer les puissances facilement (cette application en induit beaucoup d'autres, notamment en analyse sur les suites, mais nous le verrons plus tard).

Méthode Comment trouver les puissances d'une matrice diagonalisable ?
1. Diagonaliser la matrice A : vérifier la relation $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, en première année les matrices D, P seront toujours données.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. $A^n = PD^nP^{-1}$, que l'on montre généralement par récurrence, on en déduit A^n.

Appliquons cette démarche sur un exemple.

Exemple 29 Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

⋆⋆⋆ **Fin du chapitre** ⋆⋆⋆

2.5. Solutions des exercices

Chapitre ALG8.

Échelonnement matriciel & Systèmes linéaires

Résumé & Plan

Ce chapitre développe dans un premier temps la notion de forme échelonnée d'une matrice, nous verrons en quoi cette forme peut nous être utile pour trouver l'inverse d'une matrice inversible, ou encore résoudre des systèmes linéaires d'équations. Nous utiliserons assez largement les résultats et techniques vues dans le Chapter ALG7. On termine par un avant-goût du programme de 2ème année : la recherche des éléments propres d'une matrice.

La façade du plus célèbre monument espagnol, la basilique Sagrada Família, comporte différentes sculptures dont un carré magique d'ordre 4 : la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale vaut 33 (l'âge de Jésus à la fin de sa vie).

— Le saviez-vous ?

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

1. ALGORITHME D'ÉCHELONNEMENT MATRICIEL

1.1. Opérations élémentaires

Les objectifs de cet algorithme présenté ci-dessous sont multiples :

- l'analyse de l'inversibilité d'une matrice carrée, et le calcul de son inverse,
- la résolution de systèmes linéaires, la recherche des «éléments propres» d'une matrice.
- Nous verrons également d'autres applications (recherche des relations de dépendance entre plusieurs vecteurs, ...) dans de futurs chapitres.

Opérations élémentaires sur les lignes. Cet algorithme consistera à transformer la matrice initiale en une matrice plus simple dite «échelonnée», en faisant intervenir trois types d'opération sur les lignes que nous définissons dès à présent.

Définition 1 | Opérations élémentaires

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice écrite en lignes $A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ \hline \vdots \\ \hline L_n(A) \end{pmatrix}$. On appelle *opération élémentaire sur les lignes de* A l'une des opérations suivantes pour $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$:

- $L_i(A) \longleftrightarrow L_j(A)$ appelée *permutation des lignes* i, j,
- $L_i(A) \longleftarrow \lambda L_i(A)$ appelée *dilatation de paramètre* $\lambda \in \boldsymbol{K}\boxed{\setminus\{0\}}$ *de la ligne* i,
- $L_i(A) \longleftarrow L_i(A) + \mu L_j(A)$ appelée *transvection de paramètre* $\mu \in \boldsymbol{K}$ *de la ligne* i *par rapport à* j si $i \neq j$,
- $L_i(A) \longleftarrow \lambda L_i(A) + \mu L_j(A)$ appelée *combinaison dilatation/transvection de paramètres* $\lambda, \in \boldsymbol{K}\boxed{\setminus\{0\}}, \mu \in \boldsymbol{K}$ *de la ligne* i *par rapport à la ligne* j avec $i \neq j$.

On définit les *opération élémentaire sur les colonnes de* A de manière analogue.

On utilise assez peu la terminologie transvection, dilatation *etc.*, on notera simplement formellement les opérations à l'aide de flèches.

Attention

Retenez que si l'on autorisait $\lambda = 0$ dans l'un des cas encadrés :

- pour les dilatations, alors on supprimerait une ligne, aïe... 🥺
- Pour une combinaison dilatation/transvection, on «écraserait» une ligne par une autre, re-aïe... 🥺

Peu de chances que ces deux opérations servent à quelque chose dans la suite.

Lien matrice de départ et matrice modifiée par une opération. Commençons par un exemple dans le cas d'une matrice carrée simple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Calculons PA, AP, TA, AT et faisons le lien avec la matrice A :

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{est obtenue en faisant } L_1 \longleftrightarrow L_2 \textit{ à partir de } A$$

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{est obtenue en faisant } C_1 \longleftrightarrow C_2 \textit{ à partir de } A$$

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{est obtenue en faisant } L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \textit{ à partir de } A$$

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \textit{est obtenue en faisant } C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 \textit{ à partir de } A.$$

Semblent alors se dégager les faits suivants :

Opération élémentaire sur les LIGNES	=	Multiplier à GAUCHE par une certaine matrice inversible
Opération élémentaire sur les COLONNES	=	Multiplier à DROITE par une certain matrice inversible

Plus précisément :

- on appelle *matrice de permutation* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ toute matrice de la forme :

$$P_{i,j}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow i\\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}&&\uparrow i&&\uparrow j&&\end{matrix}&\end{array},\quad 1\leqslant i<j\leqslant n.$$

- On appelle *matrice de dilatation* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ toute matrice de la forme :

$$D_i(\lambda)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}&\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}&&\uparrow i&&\end{matrix}&\end{array},\quad \lambda\in\mathbf{K}\boxed{\setminus\{0\}},\ i\in[\![1\,,\,n]\!].$$

- On appelle *matrice de transvection* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ toute matrice de la forme :

$$T_{i,j}(\lambda)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&0&\cdots&1\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}&\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}&&\uparrow i&&\uparrow j\end{matrix}&\end{array},\quad \lambda\in\mathbf{K},\ (i,j)\in[\![1\,,\,n]\!]^2\text{ et } i\neq j.$$

De plus, toutes les matrices précédentes sont inversibles. On pourrait démontrer que les multiplications à droite ou à gauche par ces matrices exercent les opérations ci-après.

O	Multiplier à gauche par O	Multiplier à droite par $O^\top$
$P_{i,j}$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftrightarrow C_j$
$D_i(\lambda)$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$
$T_{i,j}(\lambda)$	$L_i \leftarrow L_j + \lambda L_j$	$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

Aucune connaissance sur ces matrices n'est exigible, on pourra se contenter de retenir de ce paragraphe le résumé ci-après.

Résumé — Opérations élémentaires et traduction matricielle

Soit $A\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
- Exercer une opération élémentaire sur une ligne de A change A en $E\times A$ avec E un certaine matrice inversible.
- Exercer une opération élémentaire sur une colonne de A change A en $A\times E$ avec E un certaine matrice inversible.

1.2. Algorithme d'échelonnement de Gauß

Nous allons essentiellement constater que toute matrice est équivalente en ligne à une matrice échelonnée en lignes. Voyons déjà ce que cela signifie.

Définition 2 | Équivalence en ligne/colonne

Soient $A, B\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux matrices. On dit que A, B sont
- *équivalentes en lignes* et l'on note $A\underset{\mathbf{L}}{\sim}B$, si A peut être transformée en B *via* une suite d'opérations élémentaires sur les lignes,
- *équivalentes en colonnes* et l'on note $A\underset{\mathbf{C}}{\sim}B$, si A peut être transformée en B *via* une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.

Proposition 1 | Caractérisation de l'équivalence en ligne et colonne

Soient $A, B\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux matrices. Alors :
- $A\underset{\mathbf{L}}{\sim}B \iff \exists E\in\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ inversible, $E\times A=B$.
- $A\underset{\mathbf{C}}{\sim}B \iff \exists E\in\mathfrak{M}_{p,p}(\mathbf{K})$ inversible, $A\times E=B$.

Preuve Par exemple, pour les lignes.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $A\underset{\mathbf{L}}{\sim}B$ alors il existe $E_1,\dots,E_N\in\mathbf{N}$ des matrices inversibles (de permutation, dilatation ou transvection) avec N un entier, de sorte que

$$(E_1\times\cdots\times E_N)A=B.$$

Or un produit de matrices inversibles est inversible, on déduit alors le résultat.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il faudrait montrer que toute matrice inversible est produit de matrices de permutation, dilatation et transvection. Nous l'admettons.[a]

[a] c'est un résultat largement non trivial

Voyons maintenant le type de matrice auquel on veut arriver : les «échelonnées en ligne». Nous verrons plus tard en quoi cette forme est adaptée pour traiter différents problèmes.

Définition 3 | Matrice échelonnée et échelonnée réduite

Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si :

- si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes sont nulles,
- (à partir de la deuxième ligne) le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement à droite de celui de la ligne précédente.

Une matrice est dite *échelonnée réduite par lignes* si :

- elle est nulle,
- ou elle est échelonnée par lignes, a tous ses pivots égaux à 1, et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Pour l'une des deux formes échelonnées, on appelle :

- *pivot* tout premier coefficient non nul sur une ligne,
- *colonne pivot* toute colonne possédant un pivot.

Forme typique d'une matrice échelonnée, les pivots étant indiqués par le symbole $\oplus$, les $\star$ désignant des coefficients quelconques	$\begin{pmatrix} \oplus & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \oplus & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Forme typique d'une matrice échelonnée, les pivots étant indiqués par le symbole $\oplus$, les $\star$ désignant des coefficients quelconques	$\begin{pmatrix} 1 & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 1 Les matrices suivantes sont-elles échelonnées par ligne ? Déterminer les pivots, le cas échéant.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 La matrice A ci-dessus n'est pas échelonnée réduite par lignes, mais la matrice suivante l'est :

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1 | Algorithme de Gauß-Jordan

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors :

- il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ échelonnée en lignes telle que : $\mathrm{A} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \mathrm{B}$.
  Une telle matrice B est appelée une *forme échelonnée en ligne de* A. Toutes les formes échelonnées en ligne de A ont le même nombre de pivots.
- Il existe une matrice $\mathrm{C} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ échelonnée en lignes **réduite** telle que : $\mathrm{A} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \mathrm{C}$. De plus, la matrice C est unique.

Définition 4 | Rang

On appelle *rang* de la matrice A le nombre de pivots d'une forme échelonnée en lignes, ou encore le nombre de pivots de l'échelonnée réduite de A.

Notation

Si A est une matrice échelonnée en ligne, on note son rang $\mathrm{Rg}\,\mathrm{A}$.

Prouver ce théorème revient à exposer un algorithme permettant d'arriver à une forme échelonnée. La preuve ci-dessous n'est pas forcément à connaître, il faut surtout savoir l'appliquer sur des exemples. Par ailleurs, nous admettons toute la partie unicité du théorème (c'est-à-dire le fait que le nombre de pivots est toujours le même, ou encore que l'échelonnée réduite est unique).

Preuve *(de l'existence d'une forme échelonnée et échelonnée réduite)* *(Point clef — **Si un coefficient est non nul sur une colonne, on peut éliminer tous les autres sur la même colonne à l'aide d'opérations élémentaires**)*

1. **(Placement correct d'un pivot)** Si la matrice A est nulle, alors il n'y a rien à faire et l'algorithme est terminé. Sinon, soit j_1 l'indice de la première colonne non nulle. On choisit un coefficient non nul dans cette colonne, que l'on note α et apparaissant à la ligne disons i_1, on le place en première ligne par échange $L_1 \longleftrightarrow L_{i_1}$. On a ainsi :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} & \overset{j_1}{\downarrow} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \,.\,.\, 0 & \boxed{\alpha} & \star \,.\,.\,.\,.\, \star \\ 0 \,.\,.\, 0 & \star & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & B \\ 0 \,.\,.\, 0 & \star & \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. **(Élimination)** On annule les autres coefficients A_{i,j_1} de la colonne j_1 par les transvections $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{A_{i,j_1}}{\alpha} L_1$ — on voit bien ici l'importance du choix $\alpha \neq 0$. On donc après cette étape :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} & \overset{j_1}{\downarrow} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \,.\,.\, 0 & \boxed{\alpha} & \star \,.\,.\,.\,.\, \star \\ 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, & 0 & \\ \vdots & \vdots & B \\ 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, & 0 & \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. On recommence avec le bloc B s'il n'est pas déjà nul; dans la suite on effectue que des opérations sur $L_2, \ldots, L_n$. Et ainsi le reste de la matrice n'est plus modifié.

Pour obtenir l'échelonnée réduite, on élimine de droite à gauche, colonne par colonne, tous les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de transvections, donc d'opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ avec $i > j$[a] et $\mu \in \mathbf{R}$.

Traitons complètement deux exemples.

[a]Afin de ne pas ajouter des termes non nuls dans les colonnes à gauche du pivot de la ligne i

Exemple 3 Déterminer l'échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 4 Déterminer la réduite échelonnée de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 5 Déterminer l'échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Une première application de l'algorithme d'échelonnement est la résolution de systèmes linéaires. Mais précisons tout d'abord de quoi on parle.

2.1. Généralités

Définition 5 | Système linéaire d'équations

- Un *système linéaire de taille* $n \times p$, est un système de n équations et p inconnues de la forme :

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p &= B_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p &= B_2 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p &= B_n \end{cases}$$

où $A_{i,j} \in \mathbf{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]$, $B_i \in \mathbf{K}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$.
- *Résoudre* (S) signifie trouver l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ vérifiant (S).
- Le système (S) est dit *homogène* si : $\forall i \in [\![1\,,\,n]\!]$, $B_i = 0$. Le *système homogène associé à* (S) est défini comme :

$$(\mathrm{S}_0)\quad \begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p &= 0 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p &= 0 \end{cases}.$$

- Le système (S) est dit *incompatible* s'il ne possède aucune solution.

Notation

Dans la pratique, lorsque $p = 2, 3, 4$, on note plutôt x, y, z, t les inconnues en lieu et place de la notation avec indices.

Exemple 6

- $\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ -x + y + 2z + t = -1 \\ \phantom{-x+{}} y + z \phantom{{}+t} = -1 \end{cases}$ est un système linéaire à $n = 3$ équations, et $p = 4$ inconnues.
- $\begin{cases} 2x + y - z + t &= 1 \\ -x + y + 2z + t &= -1 \\ y + xz &= -1 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.

Remarque 1 (Alignement des inconnues) Comme dans l'exemple précédent, je vous conseille toujours d'aligner correctement les inconnues quand vous écrivez des systèmes linéaires. Cette nécessité apparaitra clairement dans l'algorithme utilisé pour résoudre un tel système.

Pour parler de système linéaire, il faut que les inconnues ne soient pas multipliées entre elles, mises au carré, à l'inverse, avec une racine, un logarithme... sinon, on ne peut pas associer de matrice au système et toutes les méthodes qui suivent tombent.

Définition 6 | Matrice d'un système linéaire d'équations

Soit le système linéaire de taille $n \times p$ ci-après :

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p &= B_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p &= B_2 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p &= B_n \end{cases}.$$

On appelle *matrice du système* (S) la matrice

$$A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \cdots A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \cdots A_{2,p} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \cdots A_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K}).$$

Et *second membre* le vecteur colonne $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{K})$

- Le nombre de lignes de A correspond au nombre d'équations du système.
- Le nombre de colonnes de A correspond au nombre d'inconnues du système.

Par définition même du produit matriciel, nous avons avec les notations précédentes que pour tout $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbf{K}^p$:

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{1,1}x_1+\mathrm{A}_{1,2}x_2+\dots+\mathrm{A}_{1,p}x_p\\ \mathrm{A}_{2,1}x_1+\mathrm{A}_{2,2}x_2+\dots+\mathrm{A}_{2,p}x_p\\ \vdots\\ \mathrm{A}_{n,1}x_1+\mathrm{A}_{n,2}x_2+\dots+\mathrm{A}_{n,p}x_p\end{pmatrix}.$$

On déduit alors immédiatement la proposition suivante.

Proposition 2 | Ensemble des solutions et matrices

Soit (S) un système linéaire de matrice associée A, et second membre $\mathrm{B}\in\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Alors :

$$(x_1,\dots,x_p)\in\mathbf{K}^p \text{ est solution de (S)} \iff \mathrm{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}=\mathrm{B}.$$

On voit immédiatement de cette écriture, que si la matrice A est carrée inversible, alors :

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B}\iff \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B},$$

donc le système admet une unique solution, on parle alors de «système de CRAMER».

Définition/Proposition 1 | Système de CRAMER

Si $n=p$ et A est inversible, alors le système (S) possède pour unique solution $\mathrm{X}^\top$ où $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$. Dans ce cas, le système est dit *de CRAMER*. En particulier, un système homogène de CRAMER admet pour unique solution le vecteur nul. [a]

[a] Puisque par définition B est nul.

Notation Matrice augmentée

Soit le système linéaire de taille $n\times p$ ci-après :

$$(\mathrm{S})\quad\begin{cases}\mathrm{A}_{1,1}x_1+\mathrm{A}_{1,2}x_2+\cdots+\mathrm{A}_{1,p}x_p &=\mathrm{B}_1\\ \mathrm{A}_{2,1}x_1+\mathrm{A}_{2,2}x_2+\cdots+\mathrm{A}_{2,p}x_p &=\mathrm{B}_2\\ \qquad\vdots &=\vdots\\ \mathrm{A}_{n,1}x_1+\mathrm{A}_{n,2}x_2+\cdots+\mathrm{A}_{n,p}x_p &=\mathrm{B}_n\end{cases}.$$

Alors on appelle *matrice augmentée de* (S) le tableau suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathrm{A}_{1,1}&\mathrm{A}_{1,2}&\cdots&\mathrm{A}_{1,p}&\mathrm{B}_1\\ \mathrm{A}_{2,1}&\mathrm{A}_{2,2}&\cdots&\mathrm{A}_{2,p}&\mathrm{B}_2\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ \mathrm{A}_{n,1}&\mathrm{A}_{n,2}&\cdots&\mathrm{A}_{n,p}&\mathrm{B}_n\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\ \mathrm{A}\ &\mathrm{B}\end{array}\right).$$

Une matrice augmentée n'est pas à proprement parler une matrice, mais plutôt un moyen commode de visualiser un système. Nous l'utiliserons dans la suite du cours.

Remarque 2 (Incompatibilité sur la matrice augmentée) Si $\left(\begin{array}{c|c}\ \mathrm{A}\ &\mathrm{B}\end{array}\right)$ contient une ligne de la forme $\left(\begin{array}{ccc|c}0&\dots&0&b\end{array}\right)$ avec $b\neq 0$, alors le système est incompatible. En effet, l'équation associée est alors $0=b$ qui est bien sûr fausse.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. Chaque équation (non triviale) décrit un sous-ensemble de $\mathbf{K},\mathbf{K}^2,\mathbf{K}^3$ *etc.* (où p est le nombre d'inconnues). Par exemple,

- si $p=1$: avec une inconnue $x=5$ désigne un point de la droite réelle,
- si $p=2$: avec deux inconnues notées x,y, $3x+2y=0$ désigne une droite de $\mathbf{R}^2$,
- si $p=3$: avec trois inconnues notées x,y,z, $3x+2y+z=0$ désigne un plan de l'espace.

Les solutions du système correspondent alors à des intersections des espaces décrits par chacune des équations. En effet, un point est solution lorsque ses coordonnées vérifient toutes les équations en même temps, c'est-à-dire quand le point appartient à l'intersection de tous les espaces. Cette interprétation permet de conjecturer *dans des cas raisonnables* que :

- si $n = p = 2$, l'ensemble des solutions est peut-être un point (l'intersection de deux droites),
- si $n = 2, p = 3$, l'ensemble des solutions est peut-être une droite (l'intersection d'un plan et d'une droite), *etc.*

Structure de l'ensemble des solutions. La propriété ci-après nous donne l'allure de l'ensemble des solutions, mais ne nous permet bien sûr pas de résoudre. Notez l'analogie avec celui déjà rencontré dans le Chapter ANA13 et qui est symptomatique de beaucoup de contextes « linéaires ».

Théorème 2 | Structure des solutions du système complet

Soit (S) un système linéaire de matrice associée A, et second membre $B \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Si $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est **une** solution du système (S), alors l'ensemble des solutions du système est :

$$\{X_H + X_0 \mid X_H \quad \text{solution du système homogène } AX = 0_{n,1}\}.$$

Attention

La preuve ci-dessous exploite très largement la linéarité en les variables du système puisqu'on utilise sa formulation matricielle, ce résultat est faux dans le cas contraire.

Preuve

2.2. Méthode par substitution

La méthode de substitution est la première que vous ayez apprise. Elle est simple à réaliser à la main lorsque les systèmes sont petits. Elle a l'avantage de pouvoir être également utilisée pour les systèmes non linéaires (avec des produits d'inconnues, des racines, exponentielles...).

Attention

Cette méthode est dans la pratique à oublier pour les systèmes linéaires de taille supérieure à trois inconnues, car assez peu efficace. On peut éventuellement garder le principe à l'esprit pour les systèmes non linéaires (qui ne font pas l'objet de ce chapitre).

Exemple 7 Résoudre le système suivant par substitution (S) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$.

On peut formaliser ainsi la méthode :

Méthode Résolution d'un système par substitution

Pour un système à n équations et p inconnues,

1. on utilise une équation pour exprimer une des inconnues en fonction des autres (qui jouent le rôle de paramètres),
2. dans les $n-1$ équations restantes, on remplace l'inconnue par l'expression obtenue précédemment qui est fonction des $p-1$ autres inconnues. Il reste donc $n-1$ équations à $p-1$ inconnues.
3. On réitère le processus avec les $n-1$ équations et $p-1$ inconnues restantes.
4. Arrivé à la dernière étape,
   - soit il ne reste plus qu'une équation et on obtient donc une relation entre les $p-n+1$ inconnues restantes. On exprime ensuite les autres inconnues à partir de celles-ci.
   - Zoit il ne reste plus qu'une inconnue pour plusieurs équations. Si les équations sont indépendantes non triviales, alors il n'y a pas de solutions.

2.3. Échelonnement et algorithme de GAUß-JORDAN des systèmes

Lorsque le système est linéaire, il est presque toujours préférable d'oublier la méthode par substitution au profit de la méthode du pivot.

Cadre

Considérons dans toute cette section un système :

$$(S)\quad \begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p &= B_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p &= B_2 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p &= B_n \end{cases},$$

et notons A **sa matrice associée, et** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix}$**. Résoudre** (S) **revient à trouver les** X **de sorte que** $AX = B$**.**

Définition 7 | Rang

On appelle *rang* du système (S) le rang de A.

SYSTÈMES ÉCHELONNÉS ET ÉCHELONNÉS RÉDUITS. Nous allons constater ici que les systèmes dits échelonnés et échelonnés réduits sont très simples à résoudre. Par exemple, considérons

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{de matrice augmentée} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Alors on peut faire subir l'opération $L_1 \leftarrow L_2 - L_1$ afin d'obtenir une matrice augmentée (et le système associé) échelonnée :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \quad\ \ y = 0 \end{cases} \quad \text{de matrice augmentée} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ce système peut alors peut se résoudre en « remontant les égalités » : $y = 0$ puis $x + 0 = 1$ donc $x = 1$. On préfère encore plus les systèmes échelonnés réduits. Par exemple en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ dans la seconde matrice augmentée, on obtient :

$$\begin{cases} x \quad\ \ = 1 \\ \quad\ \ y = 0 \end{cases} \quad \text{de matrice augmentée} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

et là le système est déjà complètement résolu ! Précisons le vocabulaire introduit précédemment.

Définition 8 | Système échelonné et échelonné réduit

On dit qu'un système (S) est *échelonné* (*resp. échelonné réduit*) si sa matrice A l'est. On appelle *pivot* du système tout pivot de A.

Dans la pratique, on essaiera toujours de se ramener à la forme échelonnée réduite. Pour le moment voyons deux exemples de systèmes déjà échelonnés.

Exemple 8 **(Sans inconnues auxiliaires)** Le système $\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases}$ est échelonné car sa matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ l'est. L'unique solution est alors $(1,0)$.

Exemple 9 **(Avec inconnues auxiliaires)** Le système

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{est échelonné.}$$

On peut alors le résoudre.

Sa matrice est $\begin{pmatrix}5&-1&8&1&1\\0&0&2&8&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$*, elle est échelonnée donc le système l'est aussi. Cette fois-ci nous avons plus d'équations que d'inconnues. Déterminons son échelonnée-réduite, il est ici inutile de travailler avec une matrice augmentée puisque le système est homogène.*

$$\begin{pmatrix}5&-1&8&1&1\\0&0&2&8&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}_{L_1\leftarrow\frac{1}{5}L_1} \quad \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{5}&\frac{8}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&2&8&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}_{L_2\leftarrow\frac{1}{2}L_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{5}&\frac{8}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&4&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}_{L_1\leftarrow L_1-\frac{8}{5}\times L_2} \quad \begin{pmatrix}1&-\frac{1}{5}&0&-\frac{31}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&4&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}_{\substack{L_1\leftarrow L_1+\frac{31}{5}\times L_3\\ L_2\leftarrow L_2-4\times L_3}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{5}&0&0&\frac{32}{5}\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

On aboutit alors le système ci-après, où nous avons encadré les pivots :

$$\begin{cases} \mathbf{1}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{32}{5}x_5 = 0 \\ \mathbf{1}x_3 - 4x_5 = 0 \\ \mathbf{1}x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Le système sous forme échelonnée réduit est résolu, on déduit alors que l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\left(\frac{x_2-31x_5}{5}, x_2, 4x_5, -x_5, x_5\right) \;\middle|\; (x_2,x_5)\in\mathbf{K}^2\right\}}.$$

De manière générale, on a la définition ci-après.

Définition 9 | Inconnues principales et secondaires

Dans un système échelonné de matrice $A\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:

- les inconnues devant les pivots de A sont les *inconnues principales* du système.
- Les autres inconnues sont les *inconnues secondaires* ou *paramètres du système.*

Par définition du rang, il y a donc $\mathrm{Rg}(A)$ inconnues principales, et $p-\mathrm{Rg}(A)$ inconnues secondaires.

Dans l'exemple précédent :

- les pivots du système (S) sont 5, 2 et 1. Ce sont les éléments que l'on a besoin d'inverser lors de la résolution du système homogène associé pour obtenir les valeurs des inconnues principales qui leur correspondent.
- Les inconnues principales sont x_1, x_3 et x_4. Ce sont les inconnues qui « disparaissent » dans la résolution du système et seront exprimées en fonction des paramètres. Elles correspondent aux colonnes du système qui comportent des pivots.
- Les inconnues secondaires (ou paramètres) sont x_2 et x_5. Ils prennent n'importe quelle valeur. Le choix de leur valeur détermine celui des inconnues principales.

Échelonner un système. Le dernier point qui nous reste à voir est : comment arriver à un système échelonné réduit ayant le même ensemble solution que l'initial ? La réponse est déjà dans le Chapter ALG7 sur les matrices. Rappelons que l'on souhaite résoudre (en $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K})$) :

$$AX = B.$$

Or, d'après l'algorithme du pivot pour les matrices, on aboutit à la forme échelonnée réduite de A en exerçant des opérations élémentaires sur les **lignes** de A, c'est-à-dire en multipliant à gauche par une matrice inversible E, et on a :

$$(S) \quad AX = B \underset{\text{car E est inversible}}{\iff} (S') \quad (EA)X = EB.$$

Définition 10 | Systèmes équivalents
Deux systèmes d'équations sont dits *équivalents*, si leurs matrices associées sont équivalentes en ligne, autrement dit si on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes.

Puisqu'entre deux systèmes équivalents, on passe de l'un à l'autre en multipliant à gauche par une certaine matrice inversible, les ensembles de solutions sont les mêmes. On déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3 | Équivalence et ensemble de solutions
Deux systèmes équivalent ont même ensemble de solutions.

Notons $B' = EB, A' = EA$. Alors les systèmes $(S) : AX = B$ et $(S') : A'X = B'$ sont équivalents et (S') est échelonné réduit, donc résolu. Pour arriver à la forme échelonnée réduite, on va exercer des opérations élémentaires sur les lignes de A, mais en parallèle sur B (puisque S' fait intervenir le second membre $B' = EB$), cela revient donc à échelonner la matrice augmentée.

Échelonner A + Faire subir les mêmes opérations à B = Échelonner $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$

Attention — Pas d'opérations sur les colonnes !
Pour les systèmes, il est impossible de travailler sur les colonnes de A. En effet, travailler sur les colonnes revient à multiplier à droite par une matrice inversible, or il est impossible de multiplier $AX = B$ à droite par une matrice carrée (tout simplement car le produit matriciel n'aurait aucun sens).

Méthode — Résolution d'un système par pivot
Pour un système à n équations et p inconnues,

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p & = B_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p & = B_2 \\ \vdots & = \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p & = B_n \end{array} \right. .$$

1. Commencer par écrire la matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} & B_n \end{array}\right),$$

ou simplement $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$ si le système est homogène.[1]

2. Déterminer l'échelonnée réduite de la matrice augmentée (ou la matrice A si le système est déjà homogène) en appliquant l'algorithme du pivot matriciel.
3. Écrire le système échelonné équivalent obtenu, encadrer les pivots (associés aux inconnues principales), puis résoudre le nouveau système en commençant par le bas puis en remontant.

[1] c'est-à-dire si la dernière colonne de la matrice augmentée ne contient que des zéros.

Remarque 3 **(Système «creux»)** Lorsque le système de départ contient beaucoup de zéros, il peut être judicieux de présenter les calculs sans matrice augmentée (cela évitera de devoir recopier, ligne par ligne, tous les zéros).

Dans le premier exemple qui suit, on présente l'échelonnement matriciel et en parallèle le système associé sur un format 3×3. Dans la pratique, vous êtes libres d'utiliser l'une ou l'autre des deux présentations mais je vous conseille plutôt la vision matricielle.

Exemple 10 **(Cas d'un système de Cramer)** Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x-\ \ y+2z=5\\ 3x+2y+\ \ z=10\\ 2x-3y-2z=-10\end{cases}.$$

On considère la matrice augmentée que l'on échelonne :

Matrice augmentée	Système	Opération(s) réalisée(s)
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&-1&2&5\\3&2&1&10\\2&-3&-2&-10\end{array}\right)$	$\begin{cases}x-\ \ y+2z=5\\3x+2y+\ \ z=10\\2x-3y-2z=-10\end{cases}$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&-1&2&5\\0&5&-5&-5\\0&-1&-6&-20\end{array}\right)$	$\begin{cases}x-\ \ y+2z=5\\5y-5z=-5\\-\ \ y-6z=-20\end{cases}$	$L_2\leftarrow L_2-3L_1$ $L_3\leftarrow L_3-2L_1$
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&-1&2&5\\0&1&-1&-1\\0&-1&-6&-20\end{array}\right)$	$\begin{cases}x-y+2z=5\\y-\ \ z=-1\\-y-6z=-20\end{cases}$	$L_2\leftarrow \frac{1}{5}L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&-1&2&5\\0&1&-1&-1\\0&0&-7&-21\end{array}\right)$	$\begin{cases}x-y+2z=5\\y-\ \ z=-1\\-7z=-21\end{cases}$	$L_3\leftarrow L_3+L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&-1&2&5\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3\end{array}\right)$	$\begin{cases}x-y+2z=5\\y-\ \ z=-1\\z=3\end{cases}$	$L_3\leftarrow -\frac{1}{7}L_3$
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&0&1&4\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3\end{array}\right)$	$\begin{cases}x\quad +z=4\\y-z=-1\\z=3\end{cases}$	$L_1\leftarrow L_1+L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$	$\begin{cases}x\quad +z=4\\y-z=-1\\z=3\end{cases}$	$L_2\leftarrow L_2+L_3$ $L_1\leftarrow L_1-L_3$

On aboutit ainsi à une unique solution : $\boxed{\{(1,2,3)\}}$.

Passons maintenant à divers exemples montrant différents cas : incompatibilité, ensemble singleton de solutions, ensemble infini de solutions, *etc.*. Pour des petits système (de taille 2×2), on donne en plus une vision géométrique du système.

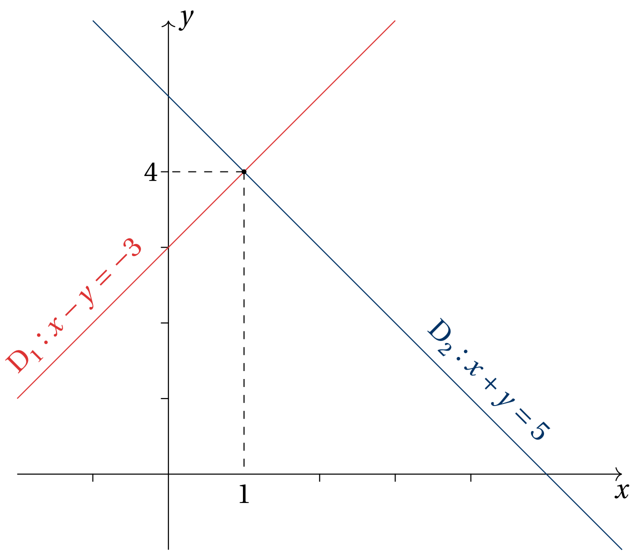
Exemple 11 **(Deux inconnues)** Dans tous ces exemples, on note r le rang du système.

1. **($n = p = 2$ et $r = 2$)** On considère $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$. On peut ensuite échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - 1\times L_1} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)^{L_1 \leftarrow L_1 + 1\times L_2} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \{(1,4)\}}$, un singleton.
(Interprétation géométrique) les droites $D_1 : x - y = -3$ et $D_2 : x + y = 5$ sont sécantes. On cherche un point dont les coordonnées vérifient les deux équations à la fois. Il n'y en a qu'un seul : le point d'intersection de D_1 et D_2.



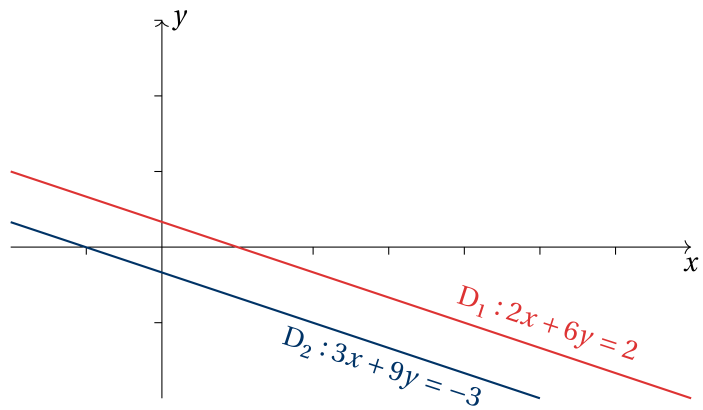
2. **($n = p = 2$ et $r = 1$: cas incompatible)** On considère $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$. On peut ensuite échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & -3 \end{array}\right)^{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - 3\times L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow \frac{1}{(-6)} L_2} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{L_1 \leftarrow L_1 - 1\times L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le système ne peut avoir de solution, la dernière équation n'étant jamais vérifiée. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$. Le système est incompatible.
(Interprétation géométrique) les droites $D_1 : 2x + 6y = 2$ et $D_2 : 3x + 9y = -3$ sont parallèles : elles n'ont aucun point commun.



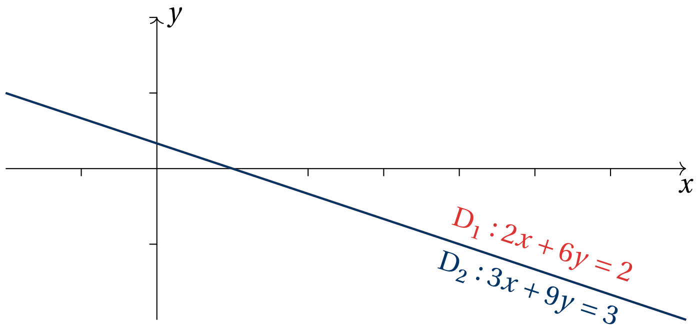
3. **($n = p = 2$ et $r = 1$: cas compatible)** On considère $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$. On peut ensuite échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{array}\right)^{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - 3\times L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{(1 - 3y, y) \mid y \in \mathbf{R}\}}$. C'est l'ensemble des co-

ordonnées des points d'une droite. En écrivant $x = 1 - 3y$, on a exprimé une des inconnues en fonction de l'autre.
(Interprétation géométrique) les droites $D_1 : 2x+6y = 2$ et $D_2 : 3x+9y = 3$ sont confondues. Tous les points de D_1 ont des coordonnées vérifiant les deux équations à la fois. Il y en a une infinité.



Exemple 12 **(Trois inconnues)** Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ -x + y + 2z + t = -1 \\ \phantom{-x+{}} y + z \phantom{{}+t} = -1 \end{cases}.$$

On considère la matrice augmentée, que l'on peut ensuite échelonner.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1 \times L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{\frac{3}{2}} L_2 \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} \times L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1 \times L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{(-1)} L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1 \times L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On obtient alors $t = \frac{1}{3}, y = -1 + z, x = \frac{1}{3} + z$, *la variable* z *étant une inconnue auxiliaire. L'ensemble des solutions est donc* $\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3} + z, z - 1, z, \frac{1}{3} \right) \,\middle|\, z \in \mathbf{R} \right\}}$.

3. APPLICATION AU PROBLÈME D'INVERSIBILITÉ MATRICIELLE

3.1. Généralités

Nous avons pour le moment assez peu parlé du rang, hormis l'application au comptage du nombre d'inconnues principales. Il va aussi nous permettre de savoir si une matrice inversible.

Nous allons également voir en quoi l'échelonnement réduit d'une matrice nous permettra de calculer l'inverse d'une matrice. Commençons par une propriété de caractérisation de l'inversibilité.

Proposition 4 | Lien entre inversibilité et système de Cramer

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice carrée. Alors :

$$\begin{aligned}
\textbf{(i)}\quad \mathrm{A} \text{ est inversible} &\iff \textbf{(ii)}\quad \forall \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\quad \mathrm{AX} = \mathrm{B} \text{ est de Cramer} \\
&\iff \textbf{(ii)}\quad \mathrm{Rg}\,\mathrm{A} = n \\
&\iff \textbf{(iii)}\quad \text{l'échelonnée réduite de A est } \mathrm{I}_n.
\end{aligned}$$

Preuve Commençons par **(i)** $\iff$ **(i)**.

$\boxed{\Longrightarrow}$ A déjà été montré : l'unique solution est $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ donc le sytème est bien de Cramer.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est de Cramer pour tout second membre. Alors choisissons plusieurs vecteurs pour B :

$$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\quad \exists!\mathrm{X}_i \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \mathrm{AX}_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \end{array} \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \mathrm{B}_i.$$

Alors posons $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{X}_1 & \dots & \mathrm{X}_n \end{array}\right)$, et montrons que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ ce qui prouvera l'inversibilité de A. On a :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A} \times \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{X}_1 & \dots & \mathrm{X}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{AX}_1 & \dots & \mathrm{AX}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{B}_1 & \dots & \mathrm{B}_n \end{array}\right) = \mathrm{I}_n.$$

Donc A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

Montrons une partie de **(i)** $\iff$ **(iii)**.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si l'échelonnée réduite de A est I_n, alors il existe E inversible telle que $\mathrm{EA} = \mathrm{I}_n$. Donc A est inversible.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Admis.

Nous admettons le reste.

3.2. Méthodes de calcul

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice donnée, dont on cherche la matrice inverse. On se fixe une telle matrice dans toute cette section.

Méthode du miroir. Rappelons que la méthode du pivot conduit à une matrice $\mathrm{E} \times \mathrm{A}$ avec $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_\mathrm{N}$ inversible qui est un produit de matrices d'opérations élémentaires, N un entier. Rappelons que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\mathrm{A}$. Or,

$$\begin{array}{c}
\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\mathrm{A} \\
\underbrace{(\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n)\mathrm{A}}_{\text{échelonnée réduite de A}} = \underbrace{(\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n)\mathrm{I}_n}_{\mathrm{I}_n \text{ après opérations élémentaires}} \quad \mathrm{A} \\
\mathrm{I}_n = (\mathrm{EI}_n) \times \mathrm{A}.
\end{array}$$

après méthode du pivot

si l'échelonnée réduite est I_n

La dernière assertion prouve exactement que A est inversible d'inverse EI_n ! Mais quelle est donc cette matrice EI_n ? C'est simplement la matrice identité à laquelle on a fait subir les mêmes opérations élémentaires qu'à A jusqu'à obtenir l'identité.

Cela nous conduit à la méthode ci-après appelée communément « méthode du miroir » puisqu'on réplique sur I_n les opérations faites sur les lignes[2] de A. Nous avons déjà rencontré une façon de présenter des opérations élémentaires sur deux matrices à la fois : les matrices augmentées.

Méthode Inverse par « échelonnement miroir » sur l'identité

Pour savoir si A est inversible et calculer son inverse.

1. Commencer par écrire la matrice augmentée de l'identité de même taille.

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{I}_n \end{array}\right).$$

2. Déterminer l'échelonnée réduite de la matrice augmentée en appliquant l'algorithme du pivot matriciel. *On fait donc subir au bloc* I_n *les mêmes opérations*

[2] En partant de $\mathrm{A} = \mathrm{AI}_n$ puis en effectuant que des opérations sur les colonnes, on peut aussi déduire un inverse à droite (donc un inverse) de A, cela fonctionne aussi. Mais mieux vaut peut-être oublier cette remarque et garder en tête que l'on ne peut faire que des opérations sur les lignes.

qu'à A.

3. Si l'échelonnée réduite du bloc de gauche est I_n, la matrice A est alors inversible, et l'inverse se lit dans le bloc de droite.

Exemple 13 Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrice augmentée	Opérations
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$	$L_2 \leftarrow -L_2$ $L_3 \leftarrow -L_3/2$
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$	$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$	$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3$

On a donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -3/2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}$.

Exemple 14 Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ par la même méthode.

On montrera que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \\ 2 & \dfrac{-1}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}$

MÉTHODE PAR RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME. Cette méthode est légèrement plus rapide lorsqu'une matrice contient beaucoup de zéros. L'idée est la suivante, et basée sur l'assertion **(ii)** de la proposition donnée en début de section.

Méthode Inverse par résolution d'un système

Pour savoir si A est inversible et calculer son inverse.

1. Résoudre le système $AX = Y$ en $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ pour $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
2. S'il admet une unique solution quelque soit Y, alors A est inversible. Et de plus, on déterminer les coefficients de A^{-1} en identifiant dans l'égalité $X = A^{-1}Y$.

Exemple 15 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, préciser son inverse.

4. APPLICATION AU CALCUL DES ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

4.1. Généralités

Pour le moment on ne se préoccupe pas de l'utilité de la définition suivante, elle sera largement étudiée en 2ème année. On ne travaillera dans cette section qu'avec des matrices carrées.

Définition 11 | Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice.

- On appelle *valeur propre de* A tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que :

$$A - \lambda I_n \text{ ne soit pas inversible.}$$

  On note Spec(A) l'ensemble des valeurs propres éventuellement complexes.
- Soit $\lambda \in \operatorname{Spec} A$. Alors on appelle *espace propre associé à la valeur propre* λ, l'ensemble des vecteurs $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ vérifiant :

$$(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}.$$

  On note $\mathbf{E}_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeurs propre $\lambda \in \operatorname{Spec} A$.

Déterminer les éléments propres d'une matrice consiste à déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ladite matrice.

Remarque 4 Notons que si on résolvait $(A-\lambda I_n)X = 0$ en X avec $A-\lambda I_n$ inversible, alors on aurait nécessairement $X = 0_{n,1}$ comme unique solution.

Proposition 5 | Caractérisation

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice. Alors :

$$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \iff \operatorname{Rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Preuve On a, pour toute matrice $B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$,

$$B \text{ inversible} \iff \operatorname{Rg}(B) = n.$$

Donc pour $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff \operatorname{Rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

En fait les deux questions se traitent de la même manière :

- pour savoir si une matrice est inversible, traditionnellement on l'échelonne.
- Pour résoudre un sytème linéaire, on échelonne la matrice associée.

4.2. Calculs pratiques

Dans toute cette section, on se fixe une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$.

Il s'agit donc d'appliquer l'algorithme du pivot à la matrice $A-\lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$. Puisque le système associé à un vecteur propre est homogène, il n'est pas utile de travailler avec des matrices augmentées, on échelonne simplement la matrice $A-\lambda I_n$. Du fait de la présence d'un paramètre λ, il est nécessaire d'être précautionneux sur les opérations réalisées. Il est conseillé de suivre celles ci-dessous.

Dans la pratique, ces calculs seront toujours menés avec des matrices de petite taille.

Calculs pour le format 2×2.

Méthode Opérations pour la recherche d'éléments propres (format 2×2)

- Si le coefficient $(2,1)$ est nul : la matrice $A-\lambda I_2$ est triangulaire, donc c'est terminé.
- Sinon, on fait la permutation $\boxed{L_1 \longleftrightarrow L_2}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci le coefficient $(2,1)$. La matrice $A-\lambda I_2$ est alors elle aussi échelonnée.

Exemple 16 Trouver les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculs pour le format 3×3.

Méthode Opérations pour la recherche d'éléments propres (format 3×3)

- Si le coefficient $(3,1)$ n'est pas nul :
  1. l'opération optimale à effectuer en premier pour des matrices de taille 3×3 est la permutation $encaL_1 \longleftrightarrow L_3$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci les coefficients $(2,1),(3,1)$.
  2. Ensuite, en position $(2,2)$, nous avons un coefficient affine en λ et que l'on souhaite utiliser en nouveau pivot afin d'éliminer le coefficient $(3,2)$. Pour éliminer λ en $(2,2)$, on peut faire une opération simple en fonction de L_3.
  3. Un pivot indépendant de λ est alors obtenu en $(2,2)$, on peut alors éliminer le coefficient $(3,2)$.
- Si le coefficient $(3,1)$ est nul :
  1. on fait la permutation $\boxed{L_1 \longleftrightarrow L_2}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci le coefficient $(3,1)$.
  2. En positions $(2,2)$, nous avons un coefficient indépendant de λ qui sert à éliminer le coefficient $(3,2)$.

Exemple 17 Déterminer les éléments propres des matrices ci-dessous.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. *On montrera que* $\mathrm{Spec}\, A = \{-3, 3\}$.

2. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *On montrera que* $\operatorname{Spec} \mathrm{B} = \{0, 1, 16\}$.

Soit $\lambda \in \boldsymbol{K}$, on cherche λ de sorte que $A - \lambda I_3$ soit non inversible.

$$
\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 11-\lambda & -5 & 5 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda \\ 0 & -3\lambda+8 & -\lambda^2+14\lambda-8 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1,\ L_3 \leftarrow 5L_3 - (11-\lambda)L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -8 & \lambda^2-17\lambda+8 \\ 0 & -3\lambda+8 & -\lambda^2+14\lambda-8 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -8 & \lambda^2-17\lambda+8 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}, \quad L_3 \leftarrow -8L_3 - (-3\lambda+8)L_2
\end{aligned}
$$

avec $P(\lambda) = -8(-\lambda^2+14\lambda-8) - (-3\lambda+8)(\lambda^2-17\lambda+8)$. *C'est un polynôme de degré trois, de coefficient dominant* 3, *de racines évidentes* $0, 1$, *et il existe* λ_0 *tel que*

$$P = 3X(X-1)(X-\lambda_0),$$

on obtient en évaluant par exemple en $X = -1$ *:*

$$-2(\lambda_0+1) = -34,$$

soit $\lambda_0 = 16$. *On conclut alors que* $\operatorname{Spec} B = \{0, 1, 16\}$.

- *Pour* $\lambda = 0$, *la matrice associée au système est la suivante, dont on cherche l'échelonnée réduite.*

$$
\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow \tfrac{1}{5}L_1 \qquad
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow \tfrac{1}{(-8)}L_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 + \tfrac{3}{5} \times L_2 \qquad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(B) \iff x = 0, y = z$. *L'ensemble des vecteurs propres associés à* 0 *est donc* $\boxed{E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \boldsymbol{R} \right\}}.$

- *Pour* $\lambda = 1$, *la matrice associée au système est la suivante, dont on cherche l'échelonnée réduite.*

$$
\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow \tfrac{1}{5}L_1 \qquad
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow \tfrac{1}{(-8)}L_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 + \tfrac{3}{5} \times L_2 \qquad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(B) \iff x = -z, y = -z$. *L'ensemble des vecteurs propres associés à* 16 *est donc* $\boxed{E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \boldsymbol{R} \right\}}.$

- *Pour* $\lambda = 16$, *la matrice associée au système est la suivante, dont on cherche l'échelonnée réduite.*

$$
\begin{pmatrix} 5 & -3 & -13 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow \tfrac{1}{5}L_1 \qquad
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow \tfrac{1}{(-8)}L_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 + \tfrac{3}{5} \times L_2 \qquad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{16}(B) \iff x = 2z, y = -z$. *L'ensemble des vecteurs propres associés à* 16 *est donc* $\boxed{E_{16}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \boldsymbol{R} \right\}}.$

⋆⋆⋆ **Fin du chapitre** ⋆⋆⋆

5. EXERCICES

5.1. Solutions des exercices

Chapitre ALG9.

Polynômes

Résumé & Plan

•

Chapitre ALG10.

Espaces vectoriels

Résumé & Plan

Nous allons regrouper au sein de la terminologie « espace-vectoriel » tous les ensembles qui sont stables lorsque l'on exerce des combinaisons linéaires. Nous allons ensuite développer des résultats généraux sur ces ensembles, qui se transmettront alors automatiquement à tous les exemples. Vous connaissez déjà de telles ensembles : les vecteurs de la géométrie depuis le collège, les fonctions, les polynômes, les suites ou encore les matrices.

Chapitre ALG11.

Applications linéaires & Représentation matricielle

Résumé & Plan

-

II

Deuxième partie

Analyse

Chapitre ANA12.

Fonctions. Calculs de limites & dérivées.

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est la présentation de généralités sur les fonctions, déjà évoquées dans les classes de lycée (définition, monotonie, parité, *etc.*). Ensuite, nous nous intéresserons aux principales fonctions usuelles à connaître. L'étude de la continuité ou dérivabilité de fonctions n'est pas l'objet de ce chapitre, mais plutôt des Chapters ANA15 et ANA16 qui seront vus plus tard dans l'année.

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz en 1673 dans un manuscrit inédit « La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions ».

— **Le saviez-vous ?**

Jeune, en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

— **J. von Neumann**

Remarque 1 Tous les exemples de ce chapitre font appel aux fonctions usuelles vues au lycée. En cas de besoin, vous pouvez consulter par anticipation la dernière Section 4.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions, opérations de base

Définition 1 | Fonction entre deux ensembles
Soient E, F deux ensembles.

- Une *fonction de* E *dans* F est un processus qui associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F (donc soit 0, soit 1). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'ensemble d'arrivée de f.
- Lorsque $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}, \mathrm{F} \subset \mathbf{R}$, on dit que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est une *fonction numérique*.
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ l'ensemble noté $\mathscr{D}_f \subset \mathrm{E}$ pour lequel f associe une image, c'est-à-dire :

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathrm{E} \mid \exists \mathrm{F} \in \mathrm{F}, y = f(x)\}.$$

Lorsque $\mathscr{D}_f = \mathrm{E}$, c'est-à-dire lorsque l'on peut associer à tout élément de E un élément dans F, alors on dit que f est une *application*.

Remarque 2

- La différence entre les fonctions et les applications est ténue, on ne vous en voudra pas de confondre les deux.
- Les applications seront plus généralement étudiées dans le Chapter ALG6.
- Si $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$, alors f est aussi une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans F (dans ce cas, elle associe un élément à tous ceux de l'ensemble de départ). Dans a pratique, écrira plutôt

$$f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathrm{F}, \quad \text{plutôt que } f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}.$$

Par exemple, privilégier

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right., \quad \text{plutôt que } f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right..$$

Cadre
Dans toute la suite, nous ne considèrerons que des fonctions numériques, même lorsque cela n'est pas précisé.

Définition 2 | Image d'un élément, Image d'une fonction
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

- Soit $x \in \mathscr{D}_f$ et $y \in \mathbf{R}$ tel que $y = f(x)$. On dit que y est ***l'**image* de x par f et que x est **un** *antécédent de y par f*.
- On appelle *image de f* l'ensemble $f(\mathscr{D}_f)$ défini par :

$$f\left(\mathscr{D}_f\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$

C'est donc l'ensemble des images des éléments de $\mathscr{D}_f$.

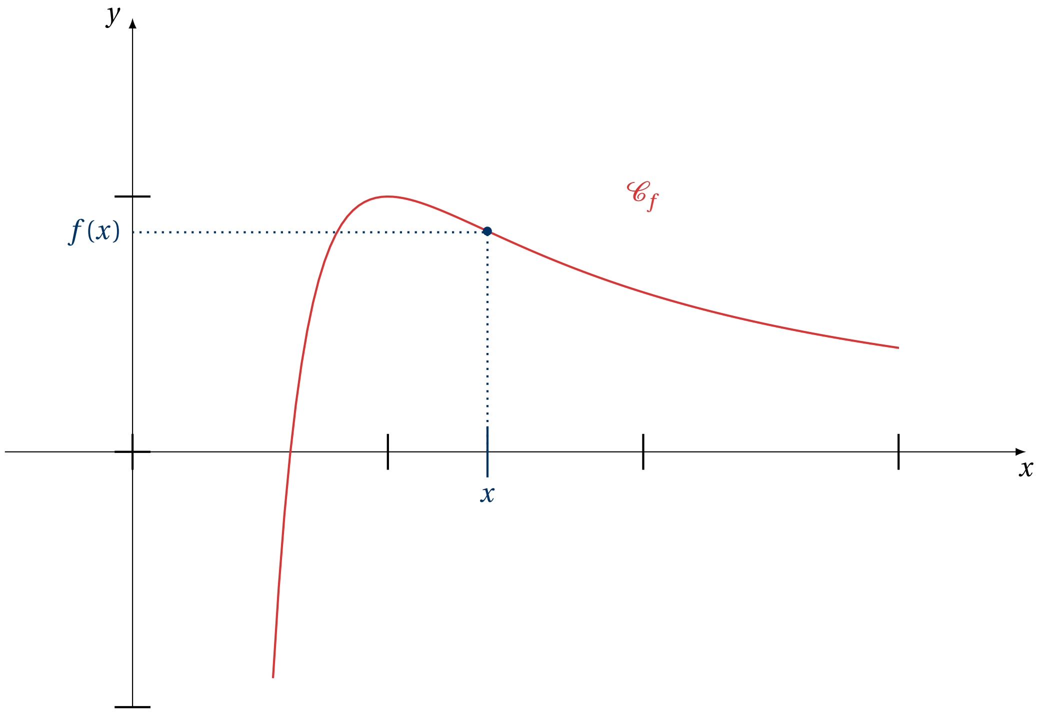
Définition 3 | Graphe

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$, on appelle *graphe de f* ou *courbe représentative de f* le sous ensemble noté $\mathscr{C}_f$ de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathscr{C}_f = \left\{(x, f(x)) \mid x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$

De manière équivalente, on a pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

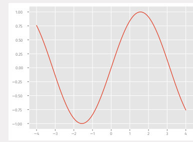
$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x).$$



>_ Tracés de graphes de fonctions en Python. Les tracés de courbe en Python se font toujours par discrétisation : on relie un nuage de points construit à l'aide de Python, avec un espacement suffisamment petit. Consulter le TP associé pour plus de détails.

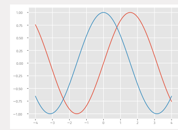
Représentation de la fonction sinus entre -4 et 4

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-4, 4, 1000) #Maillage de
  1000 points de l'intervalle [-4,4]
Y = np.sin(X) #Fonction sin appliquée
  coordonnée par coordonnée
plt.plot(X, Y)
```



Représentation des fonctions sinus et cosinus entre -4 et 4

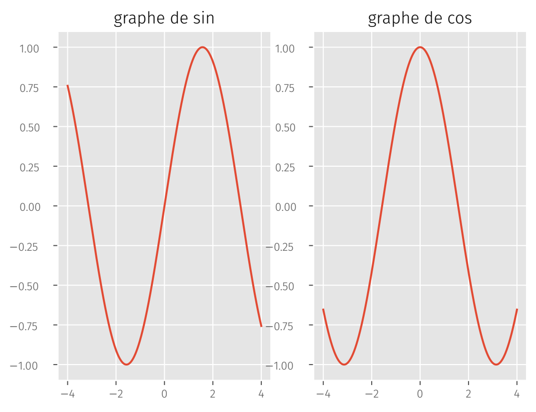
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-4, 4, 1000) #Maillage de
  1000 points de l'intervalle [-4,4]
Y = np.sin(X) #Fonction sin appliquée
  coordonnée par coordonnée
Z = np.cos(X) #Fonction cos appliquée
  coordonnée par coordonnée
plt.plot(X, Y)
plt.plot(X, Z)
```



Représentation des fonctions sinus et cosinus entre -4 et 4 (en grille)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-4, 4, 1000) #maillage de 1000 points de
  l'intervalle [-4,4]
Y = np.sin(X)
Z = np.cos(X) #Fonction appliquée coordonnée par coordonnée
plt.subplot(121) #grille de graphes de format 2 L x 1 C, 1er
  emplacement pour sin
plt.plot(X, Y)
plt.title('graphe de sin')
```

```
plt.subplot(122) #grille de graphes de format 2 L x 1 C, 2ème
↪ emplacement pour cos
plt.plot(X, Z)
plt.title('graphe de cos')
```



Dans les tracés précédents, on peut se passer de la commande `linspace` et utiliser des boucles classiques ou listes par compréhension. Nous en ferons des exemples en TP d'Informatique.

Attention

On prendre garde à ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont des objets de natures très différentes.

Attention Nécessité de préciser l'ensemble de définition

Quand on définit une fonction réelle à valeurs réelles on **doit** donner son ensemble de définition. On n'écrit pas « Soit $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ » mais :

- « Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+2}{x-1}, \end{array} \right.$ »
- ou encore « Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}, \quad f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ ».

Exemple 1

1. Soit $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$, et le(s) antécédent(s) de 2.

2. Soit $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$, et le(s) antécédent(s) de 2.

3. Soit $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$.

Maintenant que l'on connaît « l'objet fonction », on peut essayer de réaliser des opérations sur elles, on en définit alors plusieurs autres.

Définition 4 | Opérations

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions, et $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit les fonctions $\lambda f, f+g, f \times g$ et $\dfrac{1}{f}$ par :

- $\lambda f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right.$
- **(Somme)** $f+g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$
- **(Produit)** $f \times g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$
- **(Inverse)** $\dfrac{1}{f} \left| \begin{array}{ccc} \left\{x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right.$ si $\left\{x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} \neq \emptyset$.

Pour chacune des fonctions précédentes, on réalise l'opération « image par image », puisque « x par x » nous savons multiplier, additionner ... des nombres réels. Nous allons voir maintenant une opération un peu plus singulière. Par exemple, considérons la fonction $h : x \in \mathbf{R} \longmapsto x^4$. On peut la voir comme

- le produit de $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$ avec elle-même, *i.e.* $h = f \times f$, puisque $x^4 = x^2.x^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$,
- mais aussi comme l'élévation au carré deux fois de suite, *i.e.* :

  $$h : x \in \mathbf{R} \longmapsto f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2.$$

  On note $h = f \circ f$ et on parle de « composée de f par f ».

Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 5 | Composition

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors <u>**si** $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$</u>, on définit la composée de f par g notée $g \circ f$ par :

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array} \right.$$

Exemple 2 Déterminer l'ensemble de définition de $h : x \longmapsto \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$, et l'écrire comme une composée.

Attention

Il est très important de vérifier la condition $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$, elle garantit que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ est bien dans le domaine de définition de g et donc que l'on peut lui appliquer g.

Remarque 3 On peut aussi omettre dans la définition la condition $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$, et indiquer en ensemble de départ (à supposer non vide) de $g \circ f$:

$$\mathscr{D}_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) \in \mathscr{D}_g\right\}.$$

On représente souvent les composées avec des diagrammes comme ci-après.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

1.2. Propriétés sur les fonctions

La plupart des fonctions usuelles apparaissant dans les prochains exemples sont connues depuis le lycée, mais elles seront revues en fin de chapitre.

Définition 6 | Périodicité
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$ et soit $\mathrm{T} \in \mathbf{R}^{+\star}$. La fonction f est dite *périodique de période* T ou T-*périodique* si :

- $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x + \mathrm{T} \in \mathrm{D},$
- $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x+\mathrm{T}) = f(x).$

Remarque 4 Par récurrence évidente, on montre qu'alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, \quad f(x+n\mathrm{T}) = f(x).$$

Cela permet de réduire le domaine d'étude d'une fonction à $\mathscr{D}_f \cap [0,\mathrm{T}]$, l'intervalle $[0,\mathrm{T}]$ pouvant être remplacé par n'importe quel autre intervalle de longueur T. Par exemple, si la fonction possède une parité (voir ci-après), il vaut mieux choisir

$$\mathscr{D}_f\left[-\frac{\mathrm{T}}{2}\right]\frac{\mathrm{T}}{2}.$$

Attention
On ne dit pas « la » période mais **une** période. En effet, si T convient dans la définition précédente, c'est le cas aussi de $2\mathrm{T}, 3\mathrm{T}$ *etc.*.

Géométriquement, cela signifie que dans le plan muni d'un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$, son graphe est invariant par la translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.

Attention Non-unicité de la période
Si f est T-périodique alors elle est également 2T-périodique, 3T-périodique, etc. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f est nT-périodique.

Exemple 3 La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array} \right.$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

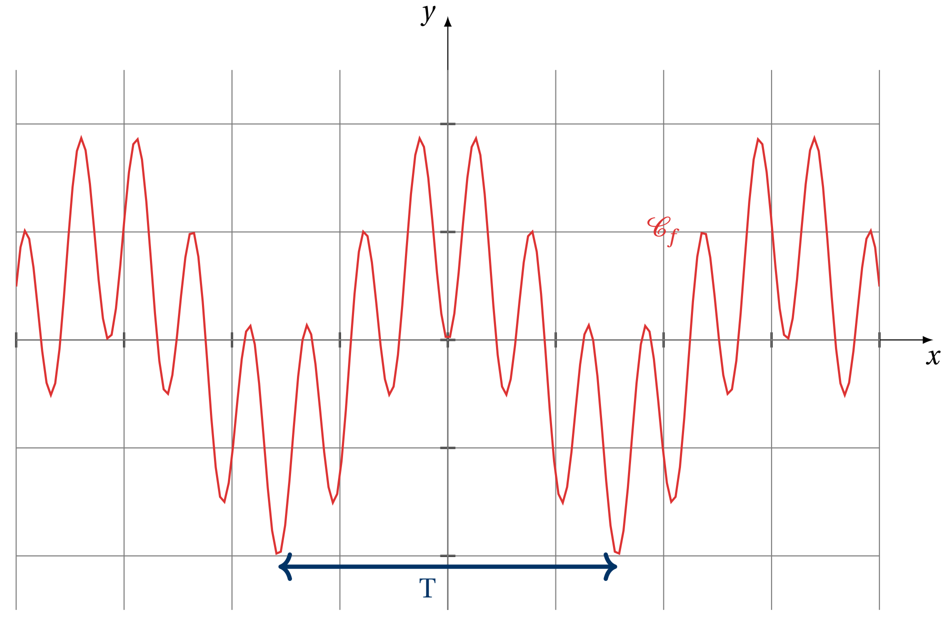


FIG. ANA12.1. : Graphe d'une fonction périodique

En effet, si $x \in \mathbf{R}$ on a bien $x + \dfrac{2\pi}{3} \in \mathbf{R}$ et

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x+2\pi) = \cos(3x) = f(x).$$

Définition 7 | Parité & Imparité
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$.

- On dit que $\mathscr{D}_f$ est symétrique si :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f.$$

La fonction f est dite *paire* si :

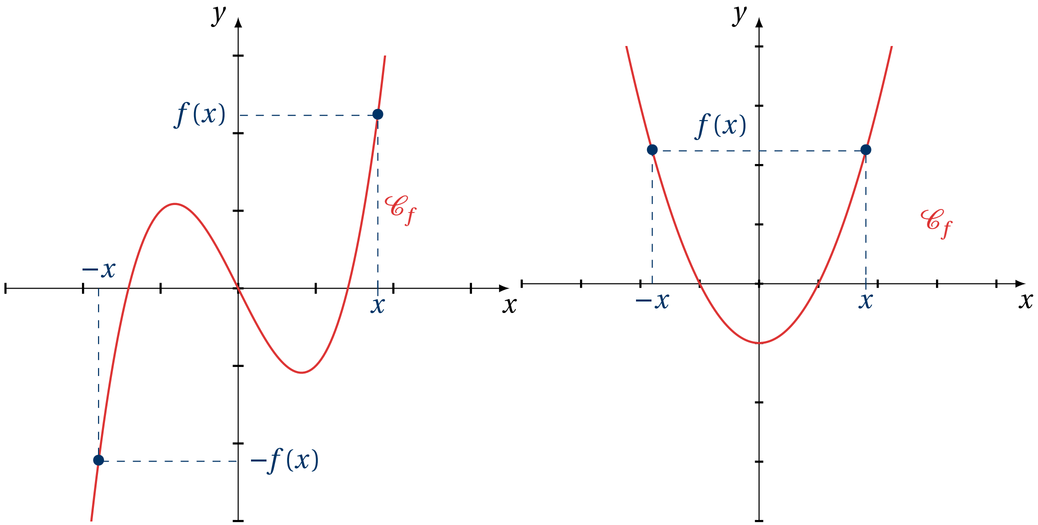
- $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$
- $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x).$

La fonction f est dite *impaire* si :

- $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$
- $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x).$

Géométrique, la parité et imparité s'interprètent ainsi.

- Si f est paire alors, dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la symétrie d'axe $(O, \vec{v})$.
- Si f est paire alors, dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la symétrie centrale par rapport au point O.



Exemple 4

1. La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 5x \end{array} \right.$ est impaire.
2. La fonction $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ est impaire.
3. La fonction $h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$ est paire.

Ces différentes propriétés seront largement utilisées ultérieurement, notamment dans l'étude de fonctions afin de réduire l'ensemble d'étude. Lorsqu'une fonction est périodique l'étude sur une période suffira, lorsqu'une fonction est paire/impaire l'étude sur $\mathbf{R}^+$ suffira.

1.3. Sens de variation

La notion de croissance ou décroissance est intuitivement claire, mais comment la définir proprement ? Pour $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, on aurait envie de dire qu'elle est croissante si :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall h \geqslant 0, \quad f(x+h) \geqslant f(x). \quad (\star)$$

C'est-à-dire que la valeur de f en $x+h$ est située au-dessus de celle en x. Après un petit jeu de changement de nom de variable, on obtient la définition ci-après.

Définition 8 | Monotonie

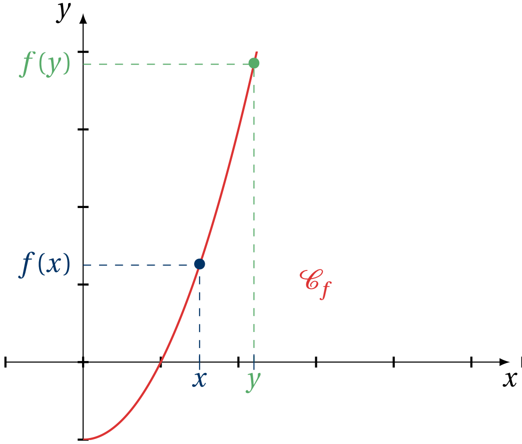
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$.

- On dit que f est *constante* sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad f(x) = f(y).$$
- On dit que f est *croissante* (*resp. strictement*) sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$
$$\left(\textit{resp.} \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)\right).$$
- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$
$$\left(\textit{resp.} \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x > y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)\right).$$
- On dit que f est monotone (*resp.* strictement) sur $\mathscr{D}_f$ si f est croissante ou décroissante (*resp.* strictement) sur $\mathscr{D}_f$.

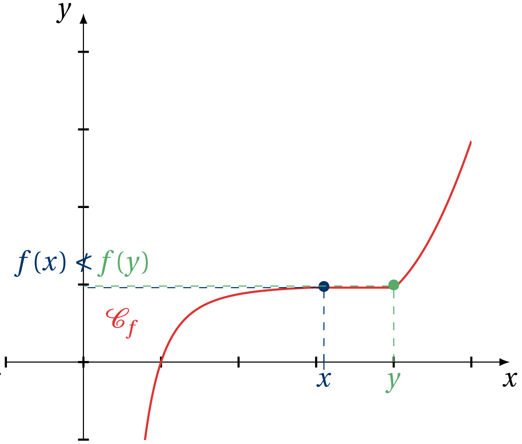
Remarque 5

- On notera qu'une fonction strictement croissante (*resp.* strictement décroissante) est croissante (*resp.* décroissante).
- Une fonction croissante préserve les inégalités. Une fonction décroissante préserve les inégalités.
- Pour les fonctions strictement monotones, on peut remplacer le symbole « $\Longrightarrow$ » par « $\Longleftrightarrow$ » dans la définition.

FONCTION STRICTEMENT MONOTONE



FONCTION NON STRICTEMENT MONOTONE



Attention

Il faut bien connaître la définition de fonction monotone, en plus de savoir l'établir avec la dérivée.

Proposition 1 | Opérations sur les fonctions monotones

Soient $f, g : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors

- Si f, g ont même monotonie, $f+g$ aussi.
- Si f est monotone, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, λf est :
  - monotone de même monotonie que f si $\lambda \geqslant 0$,
  - et de monotonie inversée à f si $\lambda \leqslant 0$.

Preuve

-

-

Exemple 5 En utilisant la définition, établir les monotonies ci-après.

1. La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x-5 \end{array} \right.$ est strictement croissante.

2. La fonction $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2-\sqrt{x} \end{array} \right.$ est strictement décroissante.

3. La fonction $h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est croissante mais n'est pas strictement croissante. *L'étude complète de la partie entière sera faite dans la Section 4.*

Nous reverrons plus tard dans le chapitre un moyen plus efficace de prouver que des fonctions sont monotones que la définition.

1.4. *Extrema*

Définition 9

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$.

- On dit que f est *majorée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x),\ x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est majoré, c'est-à-dire si :
$$\exists \mathrm{M} \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$
- On dit que f est *minorée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x),\ x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est minoré, c'est-à-dire si :
$$\exists m \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant m.$$
- On dit que f est *bornée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x),\ x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est borné ou encore que f est majorée et minorée, c'est-à-dire si :
$$\exists (m, \mathrm{M}) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

Proposition 2 | Caractérisation de la bornitude à l'aide de la valeur absolue

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est bornée sur } \mathscr{D}_f &\iff |f| \text{ est majorée sur } \mathscr{D}_f \\ &\iff \exists \mathrm{R} \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{R}. \end{aligned}$$

Dans la pratique, privilégiez dans la mesure du possible cette écriture avec des valeurs absolues, qui est plus économique : elle nécessite l'introduction que d'une seule constante, et se manipule facilement avec des propriétés comme l'inégalité triangulaire.

Preuve

Définition 10 | *Extrema* global

Soit $\mathscr{D}_f$ un intervalle non-vide de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$.

- On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0 \in \mathrm{D}$, et :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0 \in \mathrm{D}$, et :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- On dit que f admet un *extremum global en* x_0 si f admet un maximum ou un minimum global en x_0.

Nous avons vu que tout l'enjeu des études de variations est le calcul de la dérivée. On regarde donc les différentes formules permettant de faire cela dans la prochaine section.

2. CALCULS DE LIMITES

Nous voyons dans cette section la définition de la limite et les règles d'opérations classiques afin de pouvoir effectuer des calculs. Les propriétés complémentaires plus générales (théorèmes d'encadrement, convergence monotone, *etc.*) seront vus plus tard dans l'année, dans le Chapter ANA15.

2.1. Généralités

Cadre

Dans cette section, I désignera toujours un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.
Par ailleurs, on note $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Définition 11 | Adhérence d'un ensemble

Soit I est un intervalle, on dit qu'un réel $x \in \mathbf{R}$ est *adhérent à* I si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathrm{I} \neq \emptyset,$$
alors on appelle *adhérence de* I l'ensemble des réels adhérents à I. On le note en général $\overline{\mathrm{I}}$.

Ce sont donc des points « très proches » de I, mais pas forcément dedans.

Exemple 6 2 est adhérent à $[1,2[$, alors que $\dfrac{5}{2}$ ne l'est pas.

Remarque 6 Si I est un intervalle, alors $\overline{\mathrm{I}}$ est l'intervalle obtenu en adjoignant à I sa borne supérieure et sa borne inférieure. De manière plus explicite, pour $a < b$ deux réels éventuellement tels que $a = -\infty, b = \infty$:

I	$\overline{\mathrm{I}}$
$[a,b]$	$[a,b]$
$]a,b]$	$[a,b]$
$[a,b[$	$[a,b]$
$]a,b[$	$[a,b]$
$[a,+\infty[$	$[a,+\infty$
$]a,+\infty[$	$[a,+\infty[$
$]-\infty,b]$	$]-\infty,b]$
$]-\infty,b[$	$]-\infty,b]$
$]-\infty,+\infty[$	$]-\infty,+\infty[$

Passons à présent à une définition rigoureuse de la limite. Dans la pratique nous ne l'utiliserons jamais, il est surtout important de comprendre l'idée pour pouvoir effectuer des calculs[1]

[1] donc essentiellement les phrases après les « c'est-à-dire » dans la définition ci-après

Définition 12 | Limite en un point adhérent

Soient $a \in \overline{\mathrm{I}}$, $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ et une application f définie sur I ou sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. On note :

- $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow a} \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, (\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-a|) < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez proche de a ».
- $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow a} +(-)\infty$ si :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbf{R}, \exists \eta_\varepsilon > 0, \left(\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-a| < \eta_\varepsilon\right) \implies f(x) > (<)\mathrm{A}.$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut (*resp.* petit), pourvu que x soit assez proche de a ».
- $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow +(-)\infty} \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{B}_\varepsilon \in \mathbf{R}, \left(\forall x \in \mathrm{I}, \quad x > (<)\mathrm{B}_\mathrm{A}\right) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez grand (*resp.* petit) ».
- $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow +(-)\infty} +(-)\infty$ si :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbf{R}, \exists \mathrm{B}_\varepsilon \in \mathbf{R}, \left(\forall x \in \mathrm{I}, \quad x > (<)\mathrm{B}_\mathrm{A}\right) \implies f(x) > (<)\mathrm{A},$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand (*resp.* petit) que l'on veut, pourvu que x soit assez grand (*resp.* petit) ».

Définition 13 | Limite d'une fonction

Soient $a \in \overline{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tels que $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow a} \ell$. On dit que ℓ est la *limite* de f en a, ce que l'on note :

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \ell = \lim_a f.$$

Attention

Une fonction peut ne pas avoir de limite, nous verrons des exemples plus tard dans l'année.

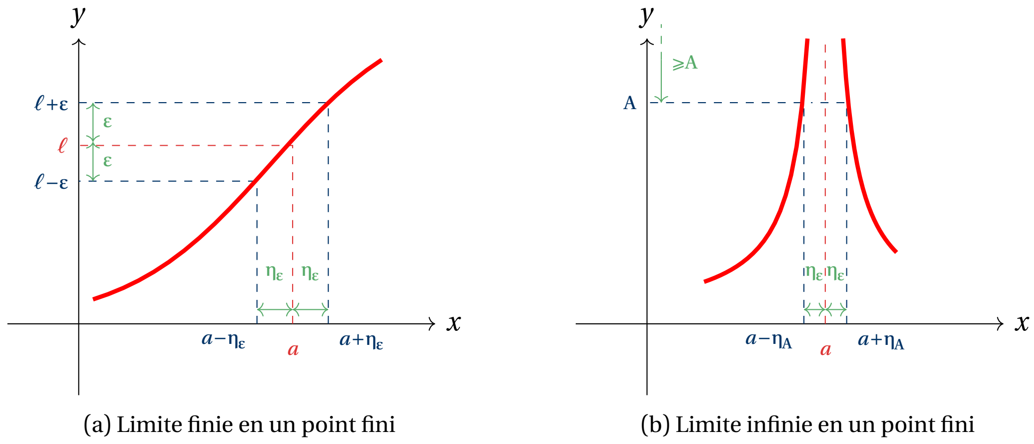
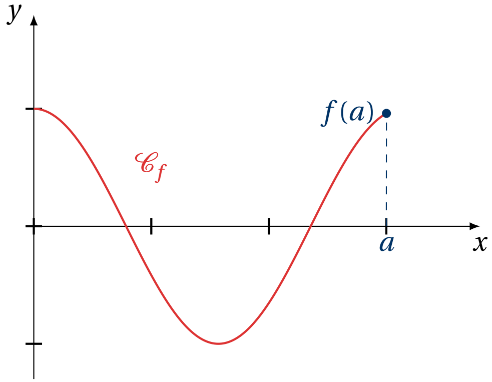
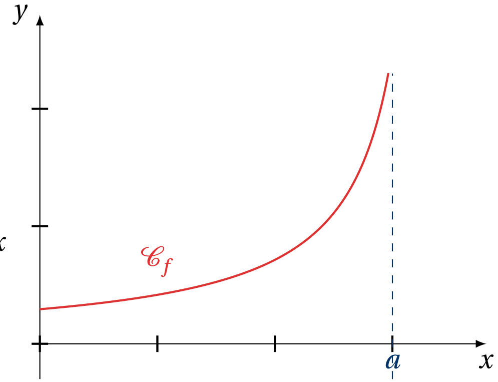


FIG. ANA12.2. : Deux illustrations de la définition de la limite

Remarque 7 Parfois on trouve dans la littérature les mêmes définitions qu'au-dessus mais avec « $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$ » au lieu de « $x \in \mathrm{I}$ ». On parle de *limite épointée.* Les différences entre ces deux notions sont minimes, mais quelques propriétés diffèrent.

Remarque 8 (Pourquoi la notion de limite ?)

LA LIMITE EN a EST LA VALEUR EN a	LA VALEUR EN a N'EXISTE PAS
	
La notion de limite en a est peu utile ici, puisqu'elle est égale à la valeur en a de la fonction. Nous verrons même plus tard dans l'année que c'est le cas dès que la fonction est définie en a.	La notion de limite est typiquement là pour mettre des mots sur ce type de comportement, et l'étudier.

Traitons deux exemples, rien que deux, à l'aide de la définition.

Exemple 7 Montrer à l'aide de la définition que $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x}=0$.

Exemple 8 Montrer à l'aide de la définition que $\lim_{x\longrightarrow 1}x^2=1$.

LIMITE À DROITE OU À GAUCHE. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite **et** à gauche, cela signifie que x se «rapproche par la droite ou la gauche» du point a, on ne s'intéresse donc pas à l'autre côté.

Définition 14 | Limite à droite/gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathrm{I}} \cap \mathbf{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On pose $\mathrm{I}_+ = \mathrm{I} \cap]a, +\infty[$, et on suppose que $\mathrm{I}_+ \neq \emptyset$.
On dit que f *admet* ℓ *pour limite à droite en* a si la restriction de f à I_+ admet ℓ pour limite en a, on définit de même la notion de *limite à gauche en* a.

Notation

On note alors $\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)$ la limite à droite, et $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ la limite à gauche.

Voici la proposition faisant le lien entre les trois notions de limites.

Proposition 3 | Lien limite et limite à droite / gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, a est adhérent à $\mathrm{I} \cap]-\infty, a[$ et $\mathrm{I} \cap]a, +\infty[$.

- Si f est définie en a, alors :

$$f \text{ admet une limite en } a \iff$$
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) \boxed{= f(a)}. \end{cases}$$

- Si f n'est pas définie en a, alors :

$$f \text{ admet une limite en } a \iff$$
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x). \end{cases}$$

Preuve On montre seulement le premier cas, c'est-à-dire on suppose que f est définie en a.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous avons déjà montré que $\ell = f(a)$. On obtient alors l'existence d'une limite à droite et à gauche par simple restriction de la définition de la limite à $\mathrm{I} \cap]-\infty, a[$ et $\mathrm{I} \cap]a, +\infty[$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \ell = f(a)$. Alors, cela signifie par définition de la limite que pour tout $\varepsilon > 0$:

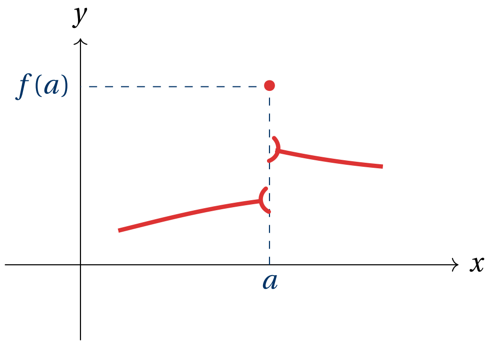
$$\exists \eta_\varepsilon^+ > 0, \forall x \in \mathrm{I}, \quad a < \qquad x < a + \eta_\varepsilon^+ \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$
$$\exists \eta_\varepsilon^- > 0, \forall x \in \mathrm{I}, \quad a - \eta_\varepsilon^- < \qquad x < \eta_\varepsilon^+ + a \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Dès lors, posant $\eta_\varepsilon = \min\{\eta_\varepsilon^-, \eta_\varepsilon^+\}$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - a| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ce résultat va nous être utile pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites en un point.

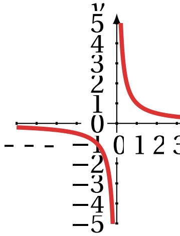
Remarque 9 Pourquoi imposer l'égalité à $f(a)$ pour les limites à droite et à gauche si f est définie en a ? Observez simplement la figure ci-après.



Exemple 9 La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ admet une limite à droite et à gauche en 0, égale à $+\infty$. Donc admet une limite en zéro qui vaut $+\infty$.

Exemple 10 Notons $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 1 - x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$. Alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.

Exemple 11 **(Fonction inverse)** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. La fonction $x \in \mathbf{R}^\star \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?



2.2. Opérations sur les limites

ADDITION, PRODUIT, MULTIPLICATION. Soit $a \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire a est soit un nombre réel, soit $\pm\infty$) et soient f et g deux fonctions admettant toutes les deux une limite en a. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. «FI» désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

LIMITE DE $f+g$

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	+FI	$+\infty$	$+\infty$

LIMITE DE $f\times g$

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell\neq 0$	$\ell=0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell>0$ $+\infty$ si $\ell<0$	FI	$-\infty$
$\ell'\neq 0$	$-\infty$ si $\ell'>0$ $+\infty$ si $\ell'<0$	$\ell\times\ell'$	0	$+\infty$ si $\ell'>0$ $-\infty$ si $\ell'<0$
$\ell'=0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell>0$ $-\infty$ si $\ell<0$	FI	$+\infty$

LIMITE DE f/g

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell\neq 0$	$\ell=0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell'\neq 0$	$-\infty$ si $\ell'>0$ $+\infty$ si $\ell'<0$	$\dfrac{\ell}{\ell}$	0	$+\infty$ si $\ell'>0$ $-\infty$ si $\ell'<0$
$\ell'=0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell>0$ $+\infty$ si $\ell<0$	FI	$-\infty$
$\ell'=0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell>0$ $-\infty$ si $\ell<0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention **Pour retenir, mais sans l'écrire**

- On pourra retenir, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty}=0,\quad \frac{1}{0^+}=+\infty,\quad \frac{1}{0^-}=-\infty.$$
- On pourra retenir, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées «FI» sont les suivantes :
$$\infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Exemple 12 **(Attention aux formes indéterminées!)** Une forme indéterminée est, comme son nom l'indique, **indéterminée**! Tout peut arriver :
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=1,\quad \frac{x(2+\cos x)}{x}\text{ n'a pas de limite.}$$

COMPOSITION. On ajoute un nouveau résultat : celui sur les limites de fonctions composées.

Théorème 1 | Compositions de limites

Soient I et J deux intervalles, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ deux applications avec $f(I) \subset J$, $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow a} b, \\ \textbf{(ii)} & g(y) \xrightarrow[]{y\longrightarrow b} \ell \end{cases} \implies g(f(x)) \xrightarrow[]{x\longrightarrow a} \ell.$$

Remarque 10 Cet énoncé confirme l'évidence : pour savoir vers quoi tend $g \circ f(x) = g(f(x))$, on regarde déjà vers quoi tend l'expression $f(x)$ à l'intérieur de la parenthèse puis on « applique g » à la limite trouvée, si elle existe.
Ce théorème est parfois aussi appelé « théorème du changement de variable pour les limites » : on peut penser formellement que l'on pose « $y = f(x)$ », avec $y \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow a$.

Preuve Écrivons la preuve dans le cas où $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ et $\ell \in \mathbf{R}$ (autres cas laissés en exercice). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y) \xrightarrow[]{y\longrightarrow b} \ell$, alors il existe $\eta' > 0$ tel que pour $y \in J$:

$$|y - b| < \eta' \implies |g(y) - \ell| < \varepsilon.$$

Et comme $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow a} b$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in I$:

$$|x - a| < \eta \implies |f(x) - b| < \eta'.$$

Ainsi, en combinant les deux (remplacer y par $f(x)$ dans la première assertion), on obtient que pour $x \in I$:

$$|x - a| < \eta \implies |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon, \quad \text{d'où la conclusion.}$$

Exemple 13 Déterminer les limites de $x \longmapsto \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$ aux bornes de son ensemble de définition.

Croissances comparées. Il existe des méthodes afin de parfois lever des formes indéterminées sur les limites. Une des plus importantes est l'utilisation d'un résultat sur les « croissances comparées ». Dans cet énoncé apparaissent des puissances réelles, nous (re)verrons cela dans la Section 4 sur les fonctions usuelles.[2]

Théorème 2 | Croissances comparées

Soient a, b et c des réels strictement positifs.

- **(En $+\infty$)**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^b}{e^{cx}} = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(\ln(x))^a}{e^{cx}} = 0.$$

- **(En 0^+)**

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x^b (\ln(x))^a = 0.$$

- **(En $-\infty$)**

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} x^b e^{cx} = 0.$$

Comment retenir ce théorème ?

Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que :
- l'exponentielle diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de x, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que

[2] Mais cela n'empêche pas la compréhension de l'énoncé, on peut même considérer pour le moment les puissances comme entières positives.

l'on peut noter :

$$(\ln x)^a \underset{+\infty}{\ll} x^b \underset{+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{cx}.$$

- Toute puissance de x l'emporte en zéro sur toute puissance de logarithme :

$$x^b (\ln x)^a \underset{0}{\ll} 1.$$

- L'exponentielle tend très vite vers 0 en $-\infty$ et l'emporte sur toutes les puissances de x :

$$x^b \underset{-\infty}{\ll} \mathrm{e}^{cx}.$$

Exemple 14 Déterminer les limites ci-après.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$,

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$,

3. $\lim\limits_{x \to \infty} (x\mathrm{e}^x - x^2)$,

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \ln x}{x^2 + \ln x}$,

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} - \ln x}{x^2 + \ln x}$.

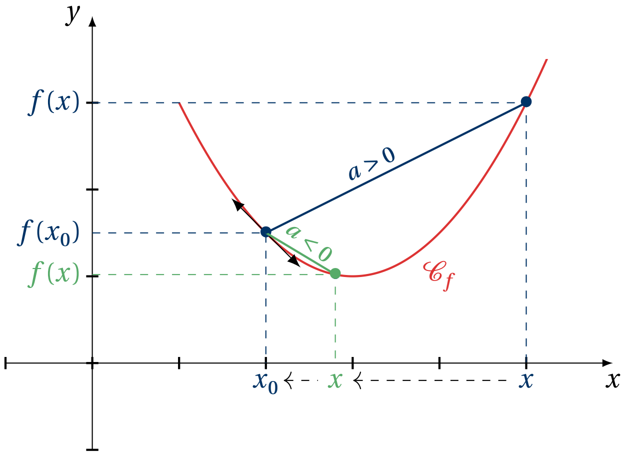
3. CALCULS DE DÉRIVÉES

L'objectif de cette section est de rappeler la définition du nombre dérivé, de fonction dérivable, les principales formules à connaitre pour dériver une fonction et de savoir en déduire la monotonie. Les « grands théorèmes » sur les fonctions dérivables seront vus plus tard dans l'année, dans le Chapter ANA16.

3.1. Nombre dérivé, fonction dérivable

Une application principale de la dérivation sera pour nous l'obtention de la monotonie. Considérons $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Comment savoir si f croît après x_0 ? Observons la corde reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ pour $x > x_0$.

- Sur la corde bleue (à droite), on observe un coefficient directeur positif, alors que la courbe décroît juste après x_0.
- Cela montre qu'il faut bien faire « se rapprocher x de x_0 » pour que le signe du coefficient directeur de la corde donne la monotonie localement autour de x_0. Vous voyez l'objet mathématique qui répond à cette problématique : la limite quand x tend vers x_0.



Définition 15 | Dérivabilité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$$

  admet une limite finie[a] en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0*.
- Le nombre $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le *taux d'accroissement de f entre x_0 et x*.
- On dit que f est *dérivable à droite en x_0* (*resp. à gauche*) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche dans la limite précédente.

Remarque 11

- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

[a] Comme $x_0 \in \mathrm{I}$ et que I est un intervalle, alors $x_0 \in \overline{\mathrm{I} \setminus \{x_0\}}$ et calculer la limite de ce quotient a bien un sens.

Remarque 12 **(Version « $x_0 + h$ »)** La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$ »), être écrite sous cette forme :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Définition 16 | Tangente

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *tangente à f d'abscisse a* la droite $\mathscr{T}_a$ d'équation :

$$\mathscr{T}_{\mathrm{A}} \quad : \quad y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple 15

- La fonction $x \longmapsto x^2$ admet en 0 la tangente horizontale d'équation $y = 0$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ admet en 1 la tangente

Notation

On note le nombre dérivé en x_0 par $f'(x_0)$, ou encore en « notation physicien » $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Cette seconde a le mérite de ne faire pas perdre de vue la définition du taux d'accroissement.

Notation **Dérivée d'une expression**

Soit une expression $f(x)$ dépendant de $x \in \mathbf{R}$, avec f une fonction dérivable. On notera dans la suite indifféremment :

- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ la fonction f' évaluée en x,
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$ la dérivée de l'expression $f(x)$ par rapport à x.

En particulier, on évitera dans la mesure du possible d'écrire $f(x)'$.

Enfin, en faisant varier x_0 on créer ainsi une nouvelle fonction notée f'.

Définition 17 | Fonction dérivée, Fonction dérivable
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in \mathrm{I}$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de* f.

3.2. Calculs de dérivées

Maintenant, comment calculer concrètement la dérivée d'une fonction ? Comment savoir si une fonction est dérivable ? Pour le second point, on établit une bonne fois pour toute que la plupart des fonctions usuelles le sont. Pour le premier point, nous aurons des formules. Commençons par un exemple.

Exemple 16 (Avec la définition, fonction carré) Considérons $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$. On utilise au choix la définition, ou la version « $x_0 + h$ ».

- Soient $x_0, x \in \mathbf{R}$.

- Soient $x_0, h \in \mathbf{R}$.

En résumé, on a établi que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 2x.$$

On peut appliquer cela pour la plupart des fonctions usuelles connues, les résultats seront récapitulées dans la prochaine section, et aussi dans le tableau ci-après.

Formulaire de dérivation. Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle et a une **constante** réelle.

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}_{f'}$
$f(x) = a$	$\mathbf{R}$	0	$\mathbf{R}$
$x^a, \ a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}^{+\star}$ si $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ $\mathbf{R}$ si $a \in \mathbf{N}$ $\mathbf{R}^{\star}$ si $a \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$	$a x^{a-1}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbf{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$
e^x	$\mathbf{R}$	e^x	$\mathbf{R}$
$\cos(x)$	$\mathbf{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\sin(x)$	$\mathbf{R}$	$\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$\tan(x)$	$\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbf{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbf{Z}\right\}$

Maintenant, comment dériver des sommes/produits/quotients *etc.* de fonctions dérivables ? Nous avons également des formules.

Exemple 17 **(Avec la définition, somme deux fonctions dérivables)** Considérons $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables en tout point de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} f'(x_0), \quad \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} g'(x_0).$$

Alors $f+g$ est aussi dérivable en x_0 de dérivée $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

Cela peut être fait pour toutes les formules apparaissant dans le tableau ci-après, avec un peu plus de technique pour les autres formules. On déduit la proposition suivante.

Proposition 4 | Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbf{R}$ dérivables sur I.

- pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda f + g\mu$ est dérivable sur I, et :

$$(\lambda + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

On dit que la dérivation est *linéaire*.

- fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

- Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemple 18 Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions f suivantes et donner, lorsqu'elle existe, l'équation de la tangente à leur courbe au point d'abscisse $a \in \mathbf{R}$ indiqué. On supposera que x appartient à l'ensemble de définition de f que l'on précisera.

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1} \quad (a=0)$

2. $f(x) = \cos x \sin x \quad (a=0)$

3. $f(x) = \dfrac{x^2\cos(x)}{3} + \ln(x) \quad (a=0)$

4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \quad (a=1)$

5. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} \quad (a=1)$

DÉRIVER UNE COMPOSÉE. Commençons là encore par traiter un exemple.

Exemple 19 **(Avec la définition, fonction carré composée avec $x \mapsto 3x+1$)** Considérons $g : x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$ et $f : x \longmapsto 3x+1$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbf{R}$. La composée $h = g \circ f$ est $h : x \longmapsto (3x+1)^2$, on aimerait pouvoir calculer la dérivée de h en fonction de la dérivée de f et g en $x_0 \in \mathbf{R}$.

En résumé, on a établi que h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h'(x) = 3 \times 2(2x+1) = \underbrace{\boxed{3}}_{\text{nouveau terme}} g'(2x+1) = f'(x) g'(f(x)).$$

Quand on dérivé une composée, il y a donc simplement un terme supplémentaire qui apparaît devant : c'est $g'(x)$.

Théorème 3 | Dérivation d'une composée
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Si f est dérivable sur I, g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f, \text{ c'est-à-dire : } \forall x \in \mathrm{I}, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Preuve Admis.

Commençons par des exemples usuels théoriquement à connaitre, mais qui se retrouvent très rapidement à partir du théorème précédent.

Exemple 20 Soit u une fonction numérique dérivable. Pour les dérivées ci-après, préciser sous quelle condition sur u la composition est possible, et justifier la dérivabilité, puis donner une formule pour la dérivée.

1. u^{α}, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

2. u^{n}, $n \in \mathbf{Z}^{\star}$.

3. e^{u}.

4. $\ln|u|$.

5. $\cos(u), \sin(u)$.

Exemple 21 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivées.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)$

2. $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{e^{x^2}}$

3.3. Lien avec la monotonie

Théorème 4 | Monotonie et signe de la dérivée

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbf{R}$.

- f est croissante $\iff \forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante $\iff \forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \leqslant 0$.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.
- Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

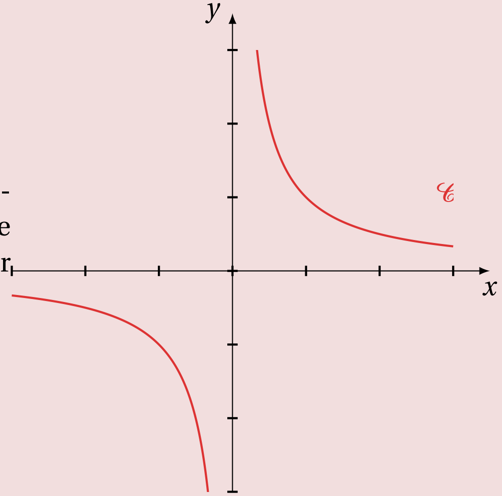
Pour la stricte monotonie, il n'est donc pas indispensable que le signe soit strict sur tout l'ensemble de définition.

Attention **Un intervalle comme ensemble de définition est crucial**

Par exemple, pour $f : x \in \mathbf{R}^\star \longmapsto \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Et pourtant f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbf{R}$. Analyser la courbe («saut» autour de 0), ou bien constater que $-1 < 1$ alors que $f(-1) < f(1)$.



Exemple 22 Par exemple, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x - \sin(x) \end{array} \right.$$

est strictement croissante alors que sa dérivée s'annule un nombre infini de fois.

3.4. Application aux calculs de limites

Puisqu'un taux de variation est une limite, faisant apparaître en plus une forme indéterminée (le dénominateur tend vers zéro), le calcul d'une dérivée peut donc donner de précieux résultats sur la valeur cherchée de la limite.

Méthode **Limite calculable par taux de variation**

Si une expression est de la forme suivante, pour $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en a, a aux bords de I ou dans I, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} f'(a).$$

En particulier, si f s'annule en a, on a :

$$\frac{f(x)}{x - a} \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} f'(a).$$

On commence par un exemple simple. Ceux faisant intervenir des fonctions usuelles seront faits dans la prochaine section.

Exemple 23 Calculer la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ selon deux méthodes.

4. FONCTIONS USUELLES

Pour chaque fonction, nous donnons :

- la forme de son expression, quelques propriétés, la dérivée et le domaine de dérivabilité,
- certaines limites remarquables,
- sa représentation graphique.
- Et un contexte (mathématique, physique, ...) où intervient ladite fonction.

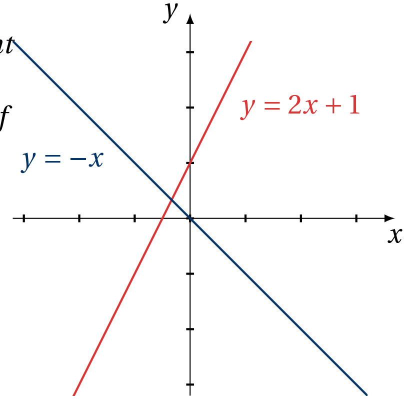
Tous ces points doivent être maitrisés car ils sont susceptibles d'intervenir dans les exercices.

4.1. Fonctions polynomiales

Définition/Proposition 1 | Fonctions affines

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Le réel a est appelé le *coefficient directeur* de f, b son ordonnée à l'origine.
- Si $b=0$, on dit que f est *linéaire*. Si $a=0$, f est constante.
- **(Dérivée)** $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = a$.
- **(Limites)**
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (ax+b) = -\infty$, si $a>0$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (ax+b) = +\infty$, si $a>0$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (ax+b) = +\infty$, si $a<0$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (ax+b) = -\infty$, si $a<0$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

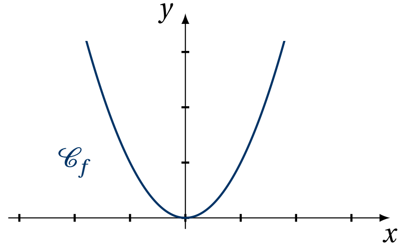


Exemple 24 D'après la loi d'Ohm, la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle à l'intensité : $\mathrm{U(I) = RI}$ avec les notations du cours de physique. La tension est donc une fonction linéaire de l'intensité.

Définition/Proposition 2 | Fonction carré, cas $n=2$

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.
- **(Propriété(s))** f est paire.
- **(Dérivée)** $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 2x$.
- **(Limites)**
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^2 = +\infty$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} x^2 = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

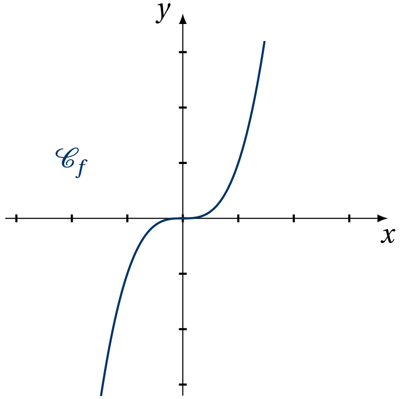


Exemple 25 L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse du corps : $\mathrm{E}_c(v) = \dfrac{1}{2} m v^2$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 3 | Fonction cube, cas $n = 3$

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3. \end{array} \right.$
- **(Propriété(s))** f est impaire.
- **(Dérivée)** $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 3x.$
- **(Limites)**
  — $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^3 = -\infty,$
  — $\lim_{x \longrightarrow \infty} x^3 = +\infty.$

COURBE REPRÉSENTATIVE

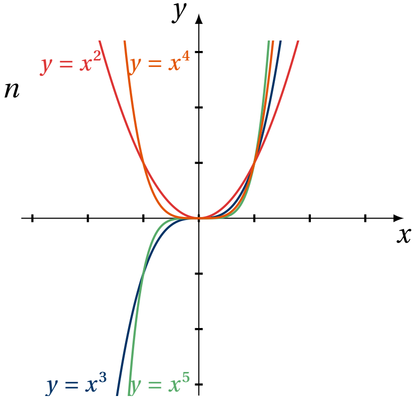


Définition/Proposition 4 | Fonction monôme $x \longmapsto x^n$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$
- **(Principales propriétés) :** f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **(Dérivée) :** f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$
- **(Limites) :**
  — $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair,
  — $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair,
  — $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty.$

COURBE REPRÉSENTATIVE



Définition/Proposition 5 | Fonction polynomiale de degré n

- **(Définition)** $P \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array} \right.$ avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ des réels appelés les *coefficients* du polynôme.
- **(Principales propriétés) :** f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **(Dérivée) :** f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et,
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$
- **(Limites)** $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \mathrm{P}(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} (a_n x_n)$, c'est-à-dire celle donnée par la plus grand puissance.

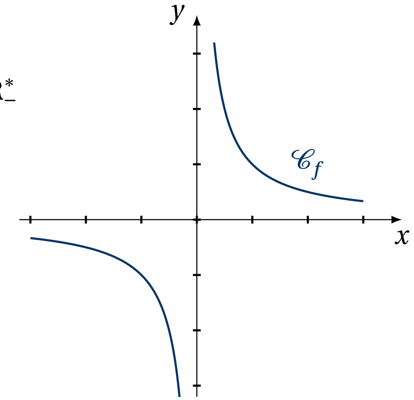
Remarque 13 On étudiera de manière plus approfondie les polynômes dans un chapitre ultérieur (le Chapter ALG9), la définition précédente ne s'intéresse qu'aux propriétés analytiques des polynômes.

4.2. Fonction monôme inverse

Définition/Proposition 6 | Fonction inverse, cas $n = 1$

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. .$
- **(Principales propriétés) :** f est impaire.
- **(Dérivée) :** f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ et
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$
- **(Limites) :**
  - $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,
  - $\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$
  - $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 26 D'après la loi des gaz parfaits, la pression est inversement proportionnelle au volume : $\mathrm{P(V)} = \dfrac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}}$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 7 | Fonction carrée inverse

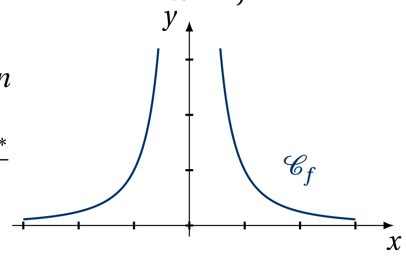
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.[3]

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^n} \end{array} \right.$.
- **(Principales propriétés)** : f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **(Dérivée)** : f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

-
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$

COURBE REPRÉSENTATIVE (cas $n = 2$)



Exemple 27 Si un corps A et un corps B de masses m_A et m_B sont séparés par une distance d, alors la valeur F de la force de gravitation qui s'exerce entre eux est : $F = G\dfrac{m_A m_B}{d^2}$ avec les notations du cours de physique.

4.3. Fonction racine carrée

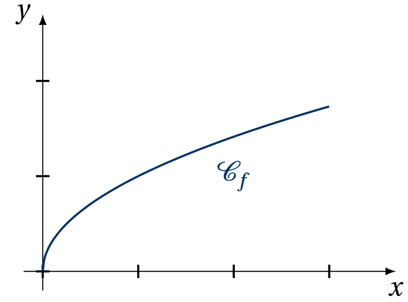
Définition/Proposition 8 | Fonction racine carrée

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
- **(Dérivée)** : f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- **(Limites)** : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 28 Le principe de TORRICELLI est un principe de mécanique des fluides qui établit que le carré de la vitesse d'écoulement d'un fluide sous l'effet de la pesanteur est proportionnel à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture par laquelle il s'échappe du cylindre qui le contient.

$$v^2 = 2gh, \qquad v = \sqrt{2gh},$$

avec les notations du cours de physique.

4.4. Fonctions exponentielles, logarithme et puissances

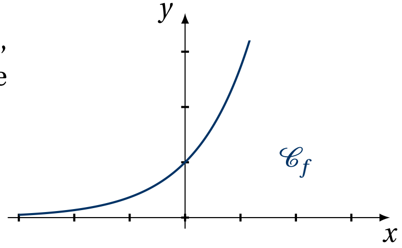
4.4.1. Exponentielle et logarithme

[3] Pour $n = 0$, on retrouve une fonction affine, donc déjà étudiée.

Définition/Proposition 9 | Fonction exponentielle

- **(Définition)** $\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \right.$, ou encore e^x comme notation pour $\exp(x)$, avec e la constante de NÉPER, et définie comme $e = \exp(1)$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **(Principales propriétés)** :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ e^{x+y} = e^x e^y,\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

- **(Dérivée)** : exp est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

- **(Limites)** :
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \exp(x) = 0$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$,
  — **(Taux)** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exemple 29

- La loi de décroissance radioactive affirme que le nombre de noyaux désintégrés au bout d'une durée t s'exprime comme

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre de noyau à $t = 0$ et λ est la constante radioactive, caractéristique du noyau radioactif considéré.

- Le modèle de dynamique des populations de MALTHUS affirme que le nombre d'individus $N(t)$ au temps $t \geqslant 0$ s'exprime comme :

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

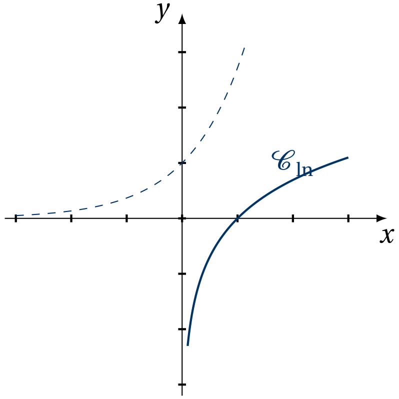
où N_0 est le nombre d'individus au temps initial et λ est le taux de croissance de la population.

4.4.2. Fonction logarithme népérien ln et décimal log

Définition/Proposition 10 | Logarithme népérien

- **(Définition)** $\ln \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x). \end{array} \right.$

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **(Principales propriétés)**

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

- **(Dérivée)** : ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

- **(Limites)** :
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$,
  — **(Taux)** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exemple 30 En physique statistique, la formule de BOLTZMANN (1877) définit l'entropie microcanonique d'un système physique à l'équilibre macroscopique, libre d'évoluer à l'échelle microscopique entre Ω micro-états différents. Elle s'écrit :

$$S = k_B \ln(\Omega)$$

où k_B est la constante de BOLTZMANN.

Dans certaines disciplines, notamment en Physique–Chimie pour des grandeurs variant sur des puissances de 10, par exemple entre 10^{-10} et 10^{10}, il peut être plus pratique de manipuler des «logarithmes décimaux» plutôt que le logarithme népérien. Par exemple, si $k \in \mathbf{N}$, $\ln\left(10^k\right) = \ln\left(e^{k \ln 10}\right) = k \ln 10 (\star)$. Plutôt que de manipuler des

$\ln 10$ dans certains calculs, on préfère considérer la fonction $\log = \dfrac{\ln}{10}$, de sorte qu'$(\star)$ se simplifie en :

$$\log\left(10^k\right) = k.$$

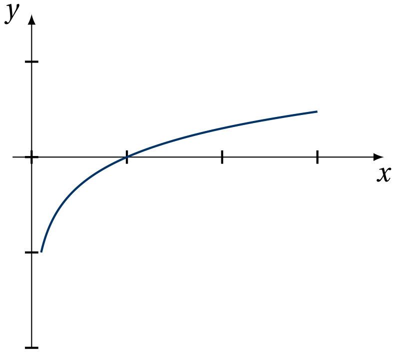
Mathématiquement, cette fonction ne représente que peu d'intérêts puisqu'elle est égale à une constante près à une fonction déjà connue (le logarithme népérien).

Définition/Proposition 11 | Fonction logarithme décimal

- **(Définition)**

$$\log \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{array} \right. .$$

Courbe représentative



- **(Principales propriétés) :**
  — $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
  — $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad 10^{\log(x)} = x$,
  — $\forall a \in \mathbf{R}, \quad \log(10^a) = a$.
- **(Dérivée)** : log est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \log'(x) = \frac{1}{10}\ln'(x) = \frac{1}{\ln(10)x}.$$

- **(Limites)** :
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$.

Exemple 31

- En milieu dilué, on définit le pH par la relation

$$pH = -\log([H_3O^+]),$$

où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en H_3O^+.

- La magnitude locale d'un séisme se calcule comme

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

4.4.3. Puissances générales & Exponentielle en base a

Rappelons les puissances que nous connaissons déjà.

- a^n avec $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{R}^\star$, $n \in \mathbf{Z}$. Nous l'avons vu dans le Chapter ALG2 sur les nombres réels.
- Nous avions également défini $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ lorsque $a \geqslant 0$, et $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ pour tout $a \in \mathbf{R}$.

Nous allons à présent définie a^b pour tout $b \in \mathbf{R}$, lorsque $a > 0$. Réecrivons notre définition du Chapter ALG2 à l'aide de l'exponentielle et du logarithme. On a d'après les propriétés de l'exponentielle :

$$a^n = \left(e^{\ln a}\right)^n = e^{n \ln a}.$$

Il apparaît que cette écriture de la puissance peut être étendue à n'importe quelle autre puissance réelle (pas seulement un entier n). On aboutit donc à la définition ci-après.

Définition 18 | Puissances généralisées

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$. On définit le *réel* a^b par :

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

Remarque 14 Cette définition a le bout goût de généraliser l'exposant (autorisé à être réel cette fois). Cependant, puisque ln est défini uniquement sur $\mathbf{R}^{+\star}$, elle est moins générale vis-à-vis de a que la définition $a^n = a \times \cdots \times a$. On ne peut pas tout avoir.

On vérifie sans peine que toutes les propriétés classiques sur les puissances restent valables.

Proposition 5 | Règles sur les puissances

Soit $(a, a_1, a_2) \in (\mathbf{R}^{+\star})^3$ et $(b, b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

- $a^{b_1+b_2} = a_1^b \times a^{b_2}$ $\quad \left(a^{b_1}\right)^{b_2} = a^{b_1 \times b_2}$ $\quad (a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b$.
- $$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}, \qquad \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2} = \frac{1}{a^{b_2-b_1}}.$$

Remarque 15 (On peut faire encore mieux) Nous pouvons faire encore mieux dans le cas des puissances $\dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ avec q un **entier impair**. Nous verrons cela dans le Chapter ANA15 une fois le théorème de la bijection revu.

Remarque 16 (Constante de Néper) En début de section, nous avions écrit $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, où $e = \exp(1)$. Il faudrait alors justifier que :

$$\exp(x) = (\exp(1))^x.$$

En effet c'est le cas puisque $(\exp(1))^x = \exp(x \ln \exp(1)) = \exp(x)$— c'est ce qu'on voulait.

Constatons que pour différentes valeurs de b, on retrouver diverses quantités usuelles.

Proposition 6 | Puissances particulières

Soient $x \in \mathbf{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbf{N}$.

- $(b = \frac{1}{2})$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$,
- $(b = \frac{1}{3})$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.
- $(b = n)$, $x^n = x^n$,
- $(b = -n)$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Preuve

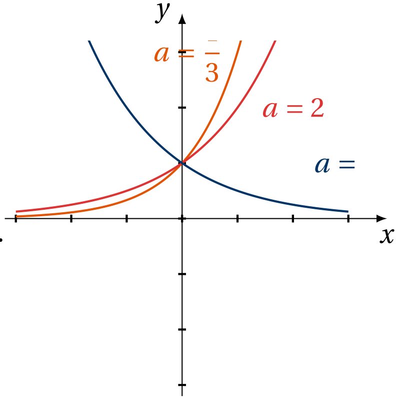
Faire varier b : exponentielle en base. On peut aussi à présent faire varier la puissance b et étudier la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto a^x = e^{x \ln a}$ pour tout $a > 0$. C'est une fonction qui aura donc des propriétés similaires à la fonction exponentielle. On la note en général $\exp_a$.

Définition/Proposition 12 | Fonction exponentielle en base a

- **(Définition)**

$$\exp_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x\ln(a)}. \end{array} \right.$$

Courbe représentative



- **(Principales propriétés)** :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

- **(Dérivée)** : $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \exp_a'(x) = \frac{\mathrm{d}\left(e^{x\ln a}\right)}{\mathrm{d}x} = \ln(a) a^x.$$

- **(Limites)** :
  - $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ si $a < 1$,
  - $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ si $a < 1$,
  - $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ si $a > 1$,
  - $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$.

Remarque 17 Pour $a = e$, étant donné que $\ln(e) = 1$, on retrouve l'exponentielle. En d'autres termes : $\exp_e = \exp$. Pour savoir si $\exp_a$ est croissante ou décroissante, on analyse simplement le signe de $\ln a$, cela revient à comparer a à 1.

Faire varier a. On peut aussi à présent faire varier a dans $\mathbf{R}^{+\star}$ et étudier la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$. C'est une fonction qui unifie à la fois la racine carrée $\alpha = \frac{1}{2}$, la racine cubique $\alpha = \frac{1}{3}$, mais aussi la fonction carré $\alpha = 2$, cube $\alpha = 3$, *etc.* et même l'identité $\alpha = 0$.

Définition/Proposition 13

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

- **(Définition)**

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{array} \right. .$$

- **(Principales propriétés)** :

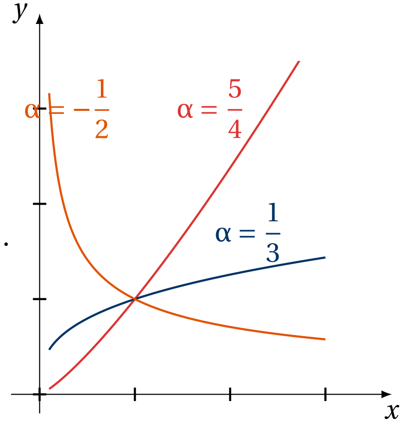
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

- **(Dérivée)** : p_α est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- **(Limites)** :
  - $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$,
  - $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha < 0$,
  - $\lim_{x \to \infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$,
  - $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$.

Courbe représentative



4.5. Fonction valeur absolue

La valeur absolue avait étudiée dans le Chapter ALG2, mais nous ne l'avions pas vue encore comme une fonction. C'est ce que nous analysons ici.

Définition/Proposition 14 | Valeur absolue

- **(Définition)** :

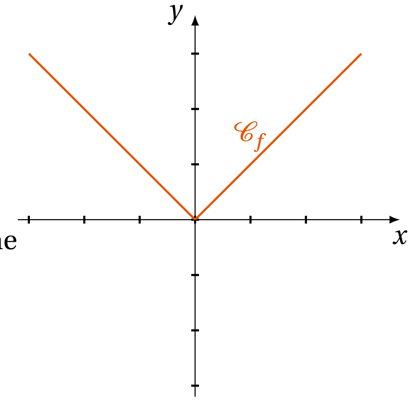
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- **(Principales propriétés)** : f est paire.
- **(Dérivée)** : f est dérivable sur $\mathbf{R}_+*$ d'une part, $\mathbf{R}_-*$ d'autre part et :

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star, \quad |x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

  f n'est pas dérivable en 0.
- **(Limites)** :
  — $\lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$
  — $\lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty$

Courbe représentative



Exemple 32 Un modèle très simple d'évolution de la température lors d'une journée consiste à supposer qu'elle augmente régulièrement de 6h à 16h puis diminue régulièrement jusqu'à minuit. La température $T(t)$ s'exprime alors en fonction du temps écoulé t depuis $6h$ comme suit :

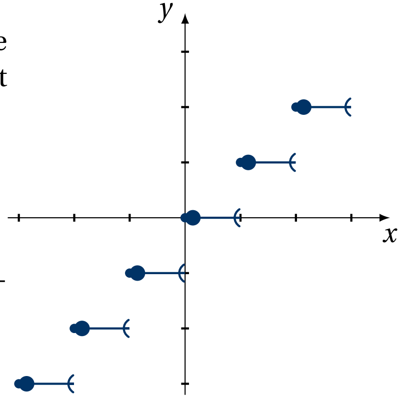
$$T(t) = a|t - 10| + b.$$

4.6. Fonction partie entière

Définition/Proposition 15 | Fonction partie entière

- **(Définition)** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$
- **(Principales propriétés)** : f est constante par morceaux, discontinue en chaque point $n \in \mathbf{Z}$. De plus,
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$
- **(Dérivée)** :
f est dérivable sur chaque intervalle $]n; n+1[$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et
$$\forall x \in]n; n+1[, \quad f'(x) = 0.$$
f n'est pas dérivable en tout $n \in \mathbf{Z}$.
- **(Limites)** :
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

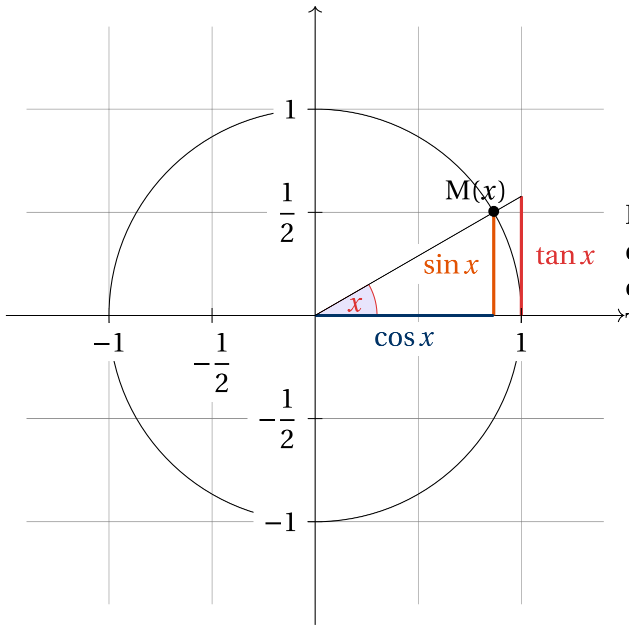
COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 33 Un vétérinaire facture 20 euros pour chaque période partielle ou complète de 15 minutes. Les frais facturés $f(x)$ en fonction du temps facturé $x \geqslant 0$ se calculent comme :
$$f(x) = 20\lfloor 4x \rfloor$$
. Justifions cette interprétation en traçant la courbe.

4.7. Fonctions circulaires

Rappelons que pour $x \in \mathbf{R}$, le cosinus, sinus et tangente de x peuvent être visualisés avec la figure ci-après.



Pourquoi indiquer $\tan x$ à cet endroit? Ceci est une simple conséquence du théorème de THALÈS. En effet, il donne
$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On voit qu'en faisant varier x dans $\mathbf{R}$, le cosinus et le sinus semblent «osciller» entre -1 et 1, et semblent revenir sur les anciennes valeurs après un intervalle de longueur 2π.

Définition/Proposition 16 | Fonction cosinus

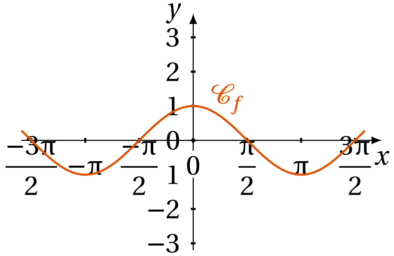
- **(Définition)** $\cos \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$
- **(Principales propriétés)** : cos est 2π-périodique et paire.
- **(Dérivée)** : cos est dérivable sur **R** et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

- **(Limites)** : La fonction cosinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$, et

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Courbe représentative



Définition/Proposition 17 | Fonction sinus

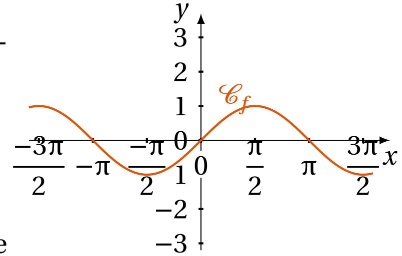
- **(Définition)** $\sin \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$
- **(Principales propriétés)** : sin est 2π-périodique et impaire.
- **(Dérivée)** : sin est dérivable sur **R** et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

- **(Limites)** : La fonction sinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Courbe représentative



Exemple 34 Lorsqu'un pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), il se met à osciller. La position d'un pendule simple est repérée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante. En l'absence de frottements et pour des petites oscillations, on a

$$\forall t \geqslant 0, \quad \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$$

où θ_0 repère la position initiale du pendule et ω_0 est la pulsation.

Pour la tangente, on voit que le point semble être « envoyé vers $+\infty$ » lorsque x tend vers $+\frac{\pi}{2}$. Mathématiquement, cela sera traduit avec la notion de limite.

Définition/Proposition 18 | Fonction tangente

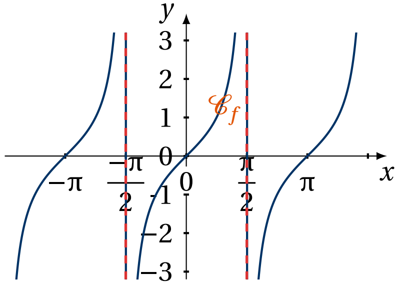
- **(Définition)** :

$$\tan \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{tan} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \right.$$

avec

$$\mathscr{D}_{tan} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **(Principales propriétés)** : tan est π-périodique et impaire.
- **(Dérivée)** : tan est dérivable sur $\mathscr{D}_{tan}$ et

$$\forall x \in \mathscr{D}_{tan}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- **(Limites)** :
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow -\pi/2} \tan(x) = -\infty$,
  — $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$,
  — **(Taux)** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

Preuve ABCDE

★★★ **Fin du chapitre** ★★★

5. EXERCICES

5.1. Solutions des exercices

Chapitre ANA13.

Calculs de primitives & Équations différentielles

Chapitre ANA14.

Suites Numériques

Si l'on considère les suites récurrentes de moyenne arihmétique et géométrique, i.e.

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n + y_n},$$

alors

$$x_n, y_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{M}(x_0, y_0) \triangleq \frac{\pi}{4}(x_0 + y_0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(\frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0}\right)^2 \sin^2(\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta.$$

— Le saviez-vous ?

Chapitre ANA15.

Continuité

Chapitre ANA16.

Dérivation

Résumé & Plan

•

Chapitre ANA17.

Intégration

Chapitre ANA18.

Développements limités

Chapitre ANA19.

Fonctions de plusieurs variables

III

Troisième partie

Aléatoire & Statistiques

Chapitre ALEA20.

Espaces probabilités

Chapitre ALEA21.

Variables aléatoires

IV

Quatrième partie

Annexes

Chapitre ANN22.

Rédaction / Présentation d'une copie

Résumé & Plan

L'objectif de ce petit document est de récapituler tous les conseils importants de présentation et de rédaction, issus de longues heures de corrections de copies de concours.

Nous avons par ailleurs constaté que nombreux sont les candidats qui rendent des copies mal présentées, mal écrites ou contenant beaucoup de fautes d'orthographe. À partir de l'année prochaine, ces candidats seront sanctionnés.

— Rapport Agro–Véto

Attention

Il faudra mettre en place les conseils ci-après dès le premier devoir surveillé. **Des points de rédaction et présentation feront partie du barème tout au long de l'année.**

1. CONCERNANT LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCRIT

Le début de votre copie est important : si elle présente des points positifs, vous mettrez le correcteur en confiance pour le reste de l'épreuve et serez évalué avec *bienveillance*. Attention, je ne dis pas ici que l'on peut faire n'importe quoi dans la suite mais il faut donc entre autres éviter impérativement en début de copie :

- les tentatives d'escroquerie,
- les ratures et tâches d'effaceur,
- les calculs inachevés,
- les questions inachevées,
- ....

Gestion du brouillon. Le brouillon sert à chercher des solutions, à effectuer des calculs délicats, ce qui permet d'éviter les ratures. Rédiger un devoir ne consiste pas à recopier un brouillon, mais à le repenser pour obtenir la solution la plus brève possible.

1.1. La présentation

Commençons par des considérations très générales.

- Tout d'abord, votre copie se doit bien sûr d'être soignée. Vous devez écrire lisiblement : si votre copie est illisible, elle ne sera pas lue !
- Les textes des questions ne sont pas recopiés mais les numéros oui et avec un fort contraste avec le reste ; cela évitera de perdre le correcteur et ainsi d'éviter tout oubli de points si le correcteur ne voit pas le début d'une nouvelle question.

Quelque chose du type $\boxed{\textbf{2.1}}$ est beaucoup plus voyant qu'un « 2.1 » perdu en milieu de texte. Utilisez par exemple des feutres pour clairement les faire apparaître.

- Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ ou éventuellement surlignés et ainsi être mis en évidence. Ce rituel d'encadrement de fin de question offre d'ailleurs l'occasion d'une première relecture : vérifiez à ce moment-là que la conclusion que vous en- cadrez répond bien à la question posée !
- L'articulation des démonstrations (donc, or, si, alors, ...) doit être présente, les hypothèses, les conclusions et surtout le type de démonstration (récurrence, absurde, contraposée, analyse/synthèse, double inclusion pour l'égalité de deux ensembles, *etc.*).
- L'usage des produits blancs et effaceurs doit rester **exceptionnel**, n'oubliez pas de réécrire par dessus ce que vous venez d'effacer.
- Lorsque vous êtes amenés à barrer un paragraphe, vous devez raturer clairement et proprement tout le paragraphe, sans laisser de morceaux de phrases à lire cachés au milieu de la rature — la lecture de la copie ne doit pas relever de la fouille archéologique !

> *Rappelons quelques consignes concernant les qualités de présentation d'une copie : l'écriture du candidat doit être soignée, les ratures et les surcharges de blanc correcteur doivent être évitées, les questions correctement numérotées et les conclusions mises en valeur. La présentation des copies nous a semblé globalement correcte, mais nous avons également eu à traiter des copies pratiquement illisibles si bien que nous avons décidé de mettre en place, dès l'an prochain, une minoration des points aux copies ne présentant pas suffisamment les qualités susmentionnées.*
>
> — **Rapport G2E**

UTILISER DE LA COULEUR MAIS NE PAS TROP EN FAIRE.

- Afin de ne pas fatiguer outre mesure les yeux de votre correctrice ou correcteur et pour que votre copie de concours (dématérialisée) soit encore lisible une fois scannée, écrivez toujours à l'encre noire ou bleue foncée.
- En revanche vous pouvez mettre en valeur les titres des questions/résultats à l'aide de couleur.

Attention

Vous êtes libres dans le choix des couleurs, à ceci près que le rouge est réservé à la correction (Agro-Véto 2015). De plus, les couleurs comme le jaune fluo qui sent la banane ou le turquoise à paillettes n'étant ni très lisibles ni très sérieuses, préférez leur des couleurs foncées : orange, vert, violet ou encore orange !

1.2. La rédaction

- Les phrases seront courtes, grammaticalement correctes, et dans la mesure du possible sans « fotes d'ortograf ». Vos réponses doivent être intégralement rédigées : vous devez écrire des phrases.
- On n'emploiera pas les symboles mathématiques comme des abréviations et on les évitera en général ; notamment pas de « hyp », « ccl » *etc.*.
- Attention aux non-sens Mathématiques souvent précisés dans les encarts « attention » du cours, les phrases du type « la fonction $f(x)$ est » ne sont plus autorisées en prépa.
- On ne mélangera pas les quantificateurs avec le reste du texte. Notamment « on voit que $\forall x$, le réel $f(x)$ est ».
  Une rédaction correcte est par exemple : « la fonction f vérifie : $\forall x \in \dots, \dots$ ».
- Les formules du genre « on voit bien que », « il est évident que », *etc.* sont à proscrire ; ceci démontre généralement l'incapacité du candidat à effectuer ladite preuve.
- S'interroger : se poser les questions suivantes. Les calculs ne sont-ils pas exagérément longs ? la méthode utilisée est-elle judicieuse ? les résultats sont-ils cohérents ? cohérents avec le texte ? Ne pas hésiter à ajouter des remarques si vous détectez des incohérences, votre regard critique sur ce que vous faites sera apprécié.
- L'utilisation excessive des symboles $\iff$, $\implies$ ou $\implies$ est à éviter, de-même qu'on ne les mélange pas avec des Mathématiques. Je rappelle qu'il est important de ne pas confondre $\iff$ et $=$.

- En revanche, lorsqu'il s'agit de caractériser les éléments d'un ensemble (exercice type : équation différentielle, ensemble de fonctions vérifiant une certaine propriété, *etc.*), il faut impérativement y avoir recours et préciser les sens non évidents (et le vérifier le cas échéant).

2. CONCERNANT L'INFORMATIQUE À L'ÉCRIT

Il faut respecter, pour plus de clarté, les règles que vous suivez sur n'importe quel IDE Python qui font partie intégrante du langage. En particulier :

- on indente toujours ses programmes, et aux endroits appropriés. Pour plus de clarté, utiliser un trait vertical sur la gauche pour préciser l'indentation.
- On commente (lorsque le correcteur voit 400 programmes sur 400 copies différentes, plus vous serez clairs, plus vous aurez de chance d'avoir les points) mais pas en excès. Ainsi, le plus souvent, un nom de variable clair permet d'expliquer ce que vous faites.
- Généralement les programmes à créer sont courts. Il est déraisonnable d'imaginer qu'un programme d'une page soit nécessaire pour traiter une question. Allez au plus simple et au plus rapide!
- En parlant de simplicité, pensez à des versions récursives de vos programmes si vous vous sentez à l'aise.
- On n'oublie pas d'importer les bibliothèques nécessaires au bon déroulement de vos fonctions.
- Commencer une fonction avec une docstring, mais il faut qu'elle soit concise.

En plus de ces conseils, toutes les règles issues des PEP présentées dans le cours d'Informatique doivent être respectées aussi sur une copie.

3. CONCERNANT L'ORAL

3.1. Commentaires généraux

Même entraîné régulièrement à passer des oraux en colle, l'oral de concours prend une importance toute particulière car cette fois c'est «pour de vrai». C'est donc une épreuve qu'il va vous falloir préparer avec sérieux. Pour cela la première chose à faire et d'éviter de commettre deux erreurs classiques.

C'est un exercice aussi important que l'écrit. La première consiste à croire que l'écrit est le plus gros morceau des concours et que l'oral, bien que stressant et éprouvant, n'est au fond qu'une formalité où il suffit d'être «moyen» pour que ça passe. C'est faux! Il faut savoir que du point de vue des écoles l'oral est extrêmement important et aussi important que l'écrit. À une époque pas si reculée le concours ne comportait que des épreuves orales (donc sans d'écrit). Ce n'est que pour faire face à la multiplication des candidats qu'un filtrage par une épreuve écrite a été institué.

C'est un exercice différent de l'écrit. La deuxième erreur, c'est de croire que l'oral n'est qu'une colle avec un colleur inconnu. C'est tout aussi faux. Une colle a souvent pour thème un sujet qui vient à peine d'être vu en cours. Cela implique qu'il est impossible d'exiger des candidats un recul suffisant. En revanche lors de l'oral des concours, les épreuves portent sur des sujets qui sont censés être maîtrisés. Il est alors fondamental pour chaque étudiant de pouvoir montrer non seulement qu'il sait appliquer le cours mais qu'il sait l'appliquer de manière consciente et raisonnée. Contrairement à l'écrit qui est, d'un certain côté, plus une épreuve de vitesse qu'une épreuve de raisonnement. À l'oral des concours, il n'est pas rare d'avoir une mauvaise note même avec une solution juste et *a contrario* d'avoir une excellente note avec un exercice non terminé, même si tout le monde sera d'accord pour dire qu'à explications égales, mieux vaut avoir des calculs justes. Enfin pour finir, un colleur a pour but de vous aider à assimiler chaque semaine une ou plusieurs notions de cours, de vous permettre de développer des méthodes, une explication de sa part est attendue sur l'exercice. Un examinateur a seulement pour objectif d'évaluer le mieux possible une série de candidats en un temps donné, et de manière impartiale; vous n'aurez pas forcément les réponses aux questions que vous vous posez sur l'exercice pendant l'oral, et il ne faut pas s'en étonner!

Cette fiche a pour but de vous rappeler quelques conseils indispensables pour l'oral d'un point de vue général, *i.e.* valable quelle que soit la matière. Après pour les appliquer, il faut s'entraîner et encore s'entraîner.

3.2. Ce qu'il faut toujours faire à l'oral

Ne pas oublier que :

L'examinateur est un être humain!

Cela paraît peut-être évident, mais il faut ne jamais perdre de vue cet aspect des choses. L'examinateur, en tant qu'humain peut présenter des avantages et des inconvénients :

1. il peut être fatigué (surtout en fin de journée) et donc (un peu) être moins attentif voire plus blasé,
2. l'examinateur est sensible (même inconsciemment) à tout ce que vous ferez et direz,
3. l'examinateur a déjà passé des concours, il comprend le stress.

En conséquence de quoi vous devez tout faire pour être naturel, agréable et lui faciliter la tâche. Cela passe par des gestes très simples :

1. arrivez à l'heure,
2. entrez dans la salle en disant «Bonjour» et avec tous les papiers nécessaires déjà en mains (convocation, papier d'identité, ...).
3. Souriez en toute circonstance.
4. Ne soyez pas obséquieux «Oui monsieur / madame», «D'accord monsieur / madame», «Vous avez raison monsieur / madame».

Avant de se lancer dans l'oral à proprement parler, ces petites remarques de forme seront d'importance capitale pour l'avis initial qu'aura sur vous l'examinateur.

Dialoguez! L'oral se joue à deux.

1. Quand l'examinateur intervient :
   - écoutez-le. Ne l'interrompez surtout pas! Au delà du fait qu'il est extrêmement impoli d'interrompre quelqu'un qui est là pour évaluer votre niveau, dites-vous que l'examinateur a certainement un conseil à vous donner.
   - Suivez les indications de l'examinateur, et même si à première vue vous ne voyez pas à quoi elles servent.[1]
   - Si un examinateur vous dit de passer à la suite, passez à la suite. Soit ce que vous étiez en train de dire était totalement faux et il pense que c'est irrécupérable, soit tout ce que vous disiez était juste et il vous fait crédit de ce qui suit.
   - Si l'examinateur vous pose une question qui vous paraît bête, n'essayez pas de savoir pourquoi, ce n'est pas pour vous déstabiliser, c'est juste pour vérifier quelque chose que visiblement tout le monde ne sait pas.
2. Quand l'examinateur est muet comme une tombe :
   - vous n'avez pas de chance, mais il va falloir faire avec,
   - vous devez néanmoins parler, pour savoir quoi raconter, imaginez que vous vouliez enregistrer une vidéo à envoyer à votre professeur pour lui exposer votre problème : dites tout, expliquez tout, parlez, montrez. Ne tombez pas dans le show, restez sobre, mais parlez.
3. Et pour finir, des remarques de communication.
   - Ne dites jamais «mon prof a dit que», «c'est écrit dans mon cours» : c'est à vous d'assumer votre savoir et vos actes,
   - regardez autant que possible l'examinateur, même s'il fait une sale tête,
   - parlez suffisamment fort (suivant l'acoustique de la salle) et articulez,
   - souriez (eh oui, toujours!),
   - n'hésitez pas à faire des schémas, des gestes (mais attention pas trop, ce n'est pas une pièce de théâtre!),

[1] Je vous déconseille très fortement de les remettre en cause, même s'il peut arriver que l'indication ne soit pas la meilleure, c'est un très gros risque que vous prenez.

- connaissez vos tics (se recoiffer, dire « euhhh » ou « donc », « du coup, du coup et donc du coup »...) et limitez-les autant que possible.

Chapitre ANN23.

Alphabet grec

Cet alphabet, très souvent utilisé pour écrire des symboles mathématiques, compte vingt-quatre lettres minuscules et majuscules. Certaines majuscules se retrouvent dans l'alphabet latin.

Minuscules	Majuscules	Prononciation
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Y	upsilon
φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

En minuscules, on utilise en général vingt-un de ces vingt-quatre lettres, à l'exception des lettres ι, o et υ. En effet ces lettres ressemblent trop aux lettres latines i,o et v. On veillera d'ailleurs à ne pas confondre la lettre grecque ω « *omega* » avec la lettre latine w.

En majuscules, on utilise les dix lettres qui ne font pas partie de l'alphabet latin. En l'occurrence, il s'agit de : Γ Δ Θ Λ Ξ Π Σ Φ Ψ Ω.