Chapitre ALG2.

Nombres Réels & Trigonométries

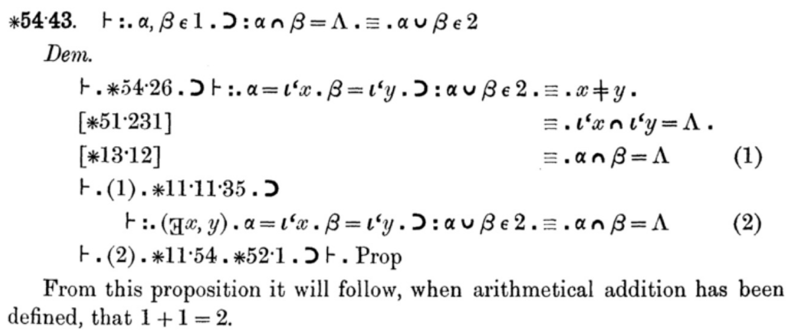
Résumé & Plan

Ce chapitre consiste essentiellement en des rappels des notions vues par le passé. Afin de ne pas se limiter à des exemples simplistes on sera parfois amené à utiliser des notions et propriétés vues au lycée qui ne seront rappelées qu'après.

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

— Galilée

Nous supposerons construit l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ainsi que les sous-ensembles usuels des rationnels, entiers *etc.*. Mais tout ceci cache des difficultés auxquelles les mathématiciens se sont frottées pendant longtemps : celle de la construction de ces ensembles. Par exemple, qu'est-ce que l'entier 1, 2 *etc.* ? Dans le livre *Principia Mathematica* (1910), il faut environ 300 pages à Whitehead et Russel pour démontrer que $1+1=2$.



$*54{\cdot}43.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Nous ne nous poserons évidemment pas de telles questions ici.

1. OPÉRATIONS DE BASES

1.1. Addition & Multiplication

L'ensemble $\mathbf{R}$ est muni de deux *lois internes* : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$. Pourquoi les qualifier d'internes ? Car elles prennent en argument deux réels et elles renvoient un autre réel, on reste donc « dans l'ensemble $\mathbf{R}$ » :

$$+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad \times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Rappelons quelques propriétés de la loi additive.

Proposition 1 | Propriétés de l'addition

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$. Alors :
- **(Interne)** $x+y \in \mathbf{R}$,
- **(Associativité)** $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- **(Commutativité)** $x+y = y+x$.
- **(Élément neutre)** $x+0 = 0+x = x$. On dit que 0 est un *élément neutre* pour l'addition.
- **(Élément opposé)** $x+(-x) = 0$. On dit que $-x$ est *l'élément opposé de x* pour l'addition.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$. Alors :
- $x \times y \in \mathbf{R}$,
- **(Associativité)** $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- **(Commutativité)** $x \times y = y \times x$.
- **(Élément neutre)** $x \times 1 = 1 \times x = x$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication.
- **(Élément inverse)** Si $x \neq 0$, alors $x \times \frac{1}{x} = 0$. On dit que $\frac{1}{x}$ est *l'élément inverse de x* pour la multiplication.
- **(Distributivité)** $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

Remarque 1 Il existe un vocabulaire — mais [H.P] en BCPST — pour les ensembles munis de lois. Ici, avec les propriétés précédentes :
- $(\mathbf{R}, +)$ est qualifié de *groupe commutatif*,
- $(\mathbf{R}, +, \times)$ est qualifié de *corps commutatif*.

1.2. Rappels de calcul fractionnaire

Personne dans la classe n'a envie de commettre des erreurs de calculs de fractions, mais on rappelle certaines règles par précaution. Ceci sera repris dans le formulaire de calcul en annexe.

Proposition 3 | Calcul fractionnaire

Soient $((a,c),(b,d)) \in \mathbf{Z}^2 \times (\mathbf{N}^*)^2$. Alors :

- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b}$,
- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$,
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$,
- si $c\neq 0$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$.

Exemple 1

1. $\dfrac{13}{28}+\dfrac{5}{42}=\dfrac{13}{2\times 14}+\dfrac{5}{3\times 14}=\dfrac{49}{2\times 3\times 14}=\dfrac{7}{12}$.
2. Pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{x+\mathrm{e}^x}{x}=\dfrac{x\left(1+\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)}{x\times 1}=1+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
3. Pour tout $x>0$, $\dfrac{x^3+x\ln(x)-2}{x}=\dfrac{x^3}{x}+\dfrac{x\ln(x)}{x}+\dfrac{-2}{x}=x^2+\ln(x)-\dfrac{2}{x}$.
4. Pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{x}=\dfrac{x^2}{x}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x$.
5. Pour tout $t\neq 0$, $\dfrac{\frac{1}{2}\left(t+\frac{3}{t}\right)}{t}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{3}{t}\right)\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{t^2}\right)$.

On rappelle également les grossières erreurs ci-après, à ne plus commettre bien sûr.

Attention

$\dfrac{a+c}{b+c}\neq\dfrac{a}{b}$: on ne simplifie **PAS** dans le cas d'une addition, $\dfrac{a}{b+c}\neq\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$: on ne sépare **PAS** une somme au dénominateur.

De plus certaines fractions possèdent une forme particulière, dite *irréductible*.

Théorème 1 | Forme irréductible d'un rationnel

Tout nombre rationnel non nul peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}^*$ et p et q premiers entre eux (*i.e.* qui ont 1 pour seul diviseur commun). Autrement dit :

$$\forall x\in\mathbf{Q}^*, \exists!(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*,\ x=\frac{p}{q} \text{ et } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}^{a}$$

Dans la pratique, pour obtenir la forme irréductible, on divise numérateur et dénominateur par le plus grand diviseur commun.

Exemple 2 Mettre sous forme irréductible $\dfrac{495}{60}$.

$\dfrac{5\times 99}{60}=\dfrac{33}{4}$.

1.3. Rappels sur les égalités et inégalités

Notation

On note $x\leqslant y$ lorsque $x-y\leqslant 0$, et $x<y$ lorsque $x-y<0$. On définit de manière analogue $x\geqslant y, x>y$.

Pour comparer deux quantités, on peut faire leur différence et étudier son signe, sauf si la comparaison est évidente. De plus, deux réels se comparent toujours : on dit que $\mathbf{R}$ est *totalement ordonné*.

Proposition 4 | Propriétés de $\leqslant$

Soient $x,y,z\in\mathbf{R}$. Alors :

- **(Réflexivité)** $x\leqslant x$.
- **(Anti-symétrie)** $x\leqslant y,\quad y\leqslant z \iff x=y$.
- **(Transitivité)** $x\leqslant y,\quad y\leqslant z \implies x\leqslant z$.

Manipulation d'égalités et d'inégalités. On va rappeler dans ce paragraphe les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et inégalités sur $\mathbf{R}$ vues dans les classes antérieures.

[a] On rappelle que cela signifie qu'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1

Proposition 5 | Manipulations d'égalités & d'inégalités

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$.

- **(Additionner/ =)** $x = y \iff x + z = y + z$.
- **(Multiplier =)** Si de plus $z \neq 0$, alors $x = y \iff xz = yz$.
- **(Équation produit)** $xy = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0$.
- **(Signe d'un produit)**

$$xy \geqslant 0 \quad (\textit{resp.} \leqslant 0) \iff \left\{ \begin{array}{ll} x, y & \text{sont de même signe} \\ & (\textit{resp.}\text{ signe opposé}) \end{array} \right. .$$

- **(Additionner/ ⩽)** $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$.
- **(Multiplier ⩽)** Si de plus $z > 0$, alors :

$$x \leqslant y \iff xz \leqslant yz.$$

Si de plus $z < 0$, alors :

$$x \leqslant y \iff xz \geqslant yz.$$

- **(Multiplier/Additionner des inégalités)** Soit de plus $t \in \mathbf{R}$. Alors :

$$x \leqslant y, \quad z \leqslant t \Longrightarrow x + y \leqslant y + t.$$

$$0 \leqslant x \leqslant y, \quad 0 \leqslant z \leqslant t \Longrightarrow 0 \leqslant xy \leqslant yt.$$

- On peut donc multiplier une égalité **par une quantité strictement positive**, et ajouter/soustraire par le même terme de chaque côté.
- Le signe d'un produit de deux éléments permet de caractériser le signe de chaque terme du produit.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement positive**.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement négative en inversant le sens de l'inégalité**.
- On peut donc additionner deux inégalités, et les multiplier sous réserve qu'elles ne fassent intervenir que des nombres réels positifs.

Bien entendu, toutes ces propriétés s'adaptent à des inégalités strictes. Un récurrence évidente permet alors d'aboutir à la proposition ci-après.

Proposition 6 | Sommer des inégalités

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels, et $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors :

$$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\ x_i \leqslant y_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Exemple 3 Soit $n \geqslant 1$. Montrer, en utilisant la proposition précédente, que : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geqslant 1$.

Attention

- On ne soustraie pas des inégalités. Si on veut encadrer $x - y$, on peut encadrer x et encadrer y puis sommer. Par exemple $-1 \leqslant 1 \leqslant 2$, $\quad 0 \leqslant 1 \leqslant 2$ et on a clairement pas $-1 - 0 \leqslant 2 - 1 \leqslant 0$!
- Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens aussi, puisque diviser par un négatif revient à multiplier par son inverse (qui sera négatif).

Composition d'inégalités par une fonction monotone. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Rappelons que :

- f est dite *croissante* (*resp. strictement*) sur D si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \leqslant y, \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant (\textit{resp.} <) f(y).$$

  Autrement dit si on peu appliquer f à une inégalité en conservant l'ordre.
- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur D si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \leqslant y, \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant (\textit{resp.} >) f(y).$$

Autrement dit si on peu appliquer f à une inégalité en inversant l'ordre.

Ainsi, la monotonie d'une fonction permet de manipuler des inégalités.

Exemple 4
- $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \leq y \iff e^x \leq e^y.$
- $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \iff \ln(x) \leq \ln(y).$
- $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+)^2, \quad x \leq y \iff x^2 \leq y^2.$
- $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}.$

Attention

Il est **faux** de dire que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \leq y \implies x^2 \leq y^2$$

car $a \mapsto a^2$ n'est pas monotone sur $\mathbf{R}$. En revanche, il est **juste** de dire :

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^+)^2, \quad x \leq y \implies x^2 \leq y^2.$$

On termine enfin avec une notation qui sert parfois.

Définition 1 | Max / Min

Soient $x, y \in \mathbf{R}$, on définit alors

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y, \\ y & \text{sinon} \end{cases} \qquad \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geq y, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4. Puissances (entières)

Définition 2 | Puissances entières

Soit $x \in \mathbf{R}$, on note x^2 le réel $x \times x$. Pour $n \in \mathbf{N}$ on définit par récurrence le réel x^n par :

$$x^0 = 1 \quad x^1 = x \quad x^{n+1} = x \times x^n.$$

Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}$ on définit x^{-n} par : $\quad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}.$

De manière plus explicite, on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}, \quad x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}}.$$

De manière générale, nous serons capable de définir ultérieurement x^α avec $x > 0, \alpha \in \mathbf{R}$ mais il faudra attendre les rappels sur la fonction exponentielle et le logarithme. Étudions quelques propriétés du carré d'un nombre réel.

Proposition 7 | Règles sur les puissances

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et $(n,p) \in \mathbf{Z}^2$ de sorte que les puissances ci-après soient définies. Alors :
- $x^{n+p} = x^n \times x^p \quad (x^n)^p = x^{n \times p} \quad (x \times y)^n = x^n \times y^n.$
- Si on a de plus $y > 0$, alors :
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$
- Si on a de plus $x > 0$, alors :
$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}}.$$

Exemple 5 Simplifier $3^4 \times 6^4, \dfrac{2^8}{2^{-4}}, \dfrac{(x^2y^3)^{-2}}{(xy^2)^3}.$

Les puissances de -1 sont très faciles à calculer, elle dépend simplement de la parité de la puissance.

Proposition 8 | Puissances de -1

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Proposition 9 | Identités remarquables

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b).$$

Preuve Elles se démontrent directement à l'aide de la définition et des règles usuelles de développement.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

De-même pour les deux autres.

Exemple 6 (Un peu plus loin) Développer $(a+b)^3$.

Remarque 2 (Généralisations possibles)

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ seront généralisées dans le Chapter ALG4 en la formule dite du *binôme de Newton*.
- $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ possède elle aussi une généralisation à toute expression de la forme $a^n - b^n, n \in \mathbf{N}$. On l'appelle l'*identité de Bernoulli* mais hors-programme en BCPST.

Encadrements et puissances entières. Ce paragraphe sera reformulé facilement dans le chapitre sur les fonctions, à l'aide du langage sur la monotonie (croissance/décroissance) d'une fonction. Pour l'instant, nous le voyons uniquement sous forme d'une proposition.

Proposition 10 | Puissances et encadrements

- Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier impair. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement, c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad x \leqslant (<) y \implies x^n \leqslant (<) y^n.$$
- Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier pair. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement **positif**, c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad 0 \leqslant x \leqslant (<) y \implies 0 \leqslant x^n \leqslant (<) y^n.$$

Attention

L'entier précédent doit être un entier **positif**. Les autres cas seront examinés plus tard.

1.5. Racines carrées & cubiques

On sait élever au carré des réels, ou à une puissance plus grande. On peut aussi se poser la question inverse : est-ce que tout réel peut être vu comme le carré d'un autre ? le cube d'un autre ? Pour la racine carrée la réponse est clairement non pour les négatifs (un carré est forcément positif), et oui pour les positifs. Pour les cubes, il y a toujours existence et unicité.

Définition/Proposition 1 | Racine carrée & Cubique

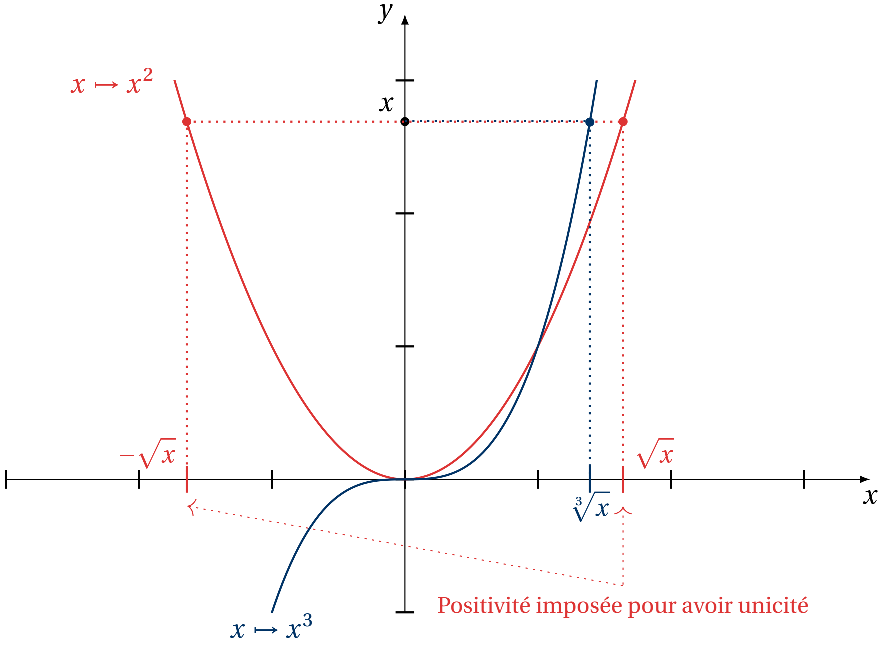
- **(Racine carrée)** Soit $x \in \boxed{\mathbf{R}^+}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt{x} \geqslant 0$, ou encore $x^{\frac{1}{2}}$, tel que :
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x. \quad \text{On appelle ce réel \textbf{la} \textit{racine carrée} de } x.$$
- **(Racine cubique)** Soit $x \in \mathbf{R}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt[3]{x} \geqslant 0$, ou

encore $x^{\frac{1}{3}}$, tel que :

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x. \quad \text{On appelle ce réel } \underline{\textbf{la}} \text{ } \textit{racine cubique} \text{ de } x.$$

Remarque 3 **(Comment comprendre ces deux propriétés ?)** En anticipant légèrement sur le chapitré dédié aux fonctions, traçons les graphes des fonctions $x \longmapsto x^2, x \longmapsto x^3$. On voit qu'il existe :

- un unique antécédent de $x \in \mathbf{R}$ pour la fonction cube, et ce pour tout x.
- En revanche, pour la fonction carrée, les négatifs n'ont pas d'antécédent, et les positifs en ont deux.



Par ailleurs, les notations $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$.

Attention

La quantité $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ puisque $x^2 \geqslant 0$. En revanche, sur $\mathbf{R}^-$, nous n'avons pas $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. Nous reverrons cela dans la partie sur la valeur absolue.

Exemple 7 Déterminer $\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{-27}$.

Proposition 11 | Règles sur les racines carrées

Soit $(x, y) \in \left(\mathbf{R}^+\right)^2$. On a :

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Proposition 12 | Règles sur les racines cubiques

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

- $\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$.
- Si on a de plus $y \neq 0$, alors : $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$.
- $\sqrt[3]{x}^3 = x, \quad \sqrt[3]{x^3} = x$.

Attention

On ne peut rien dire de la racine d'une somme. Par exemple, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1 + 1 = 2$.

Attention

Le symbole $\sqrt{}$ est réservé à cet usage, on n'écrira jamais de racine carrée d'autre chose qu'un réel positif.

1.6. Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est le même nombre réel mais dont on aurait enlevé le signe devant. Ainsi, si ce réel est positif il n'y a rien à faire, c'est sa valeur absolue. En revanche, s'il est négatif, il suffit d'ajouter un signe « - » devant ledit réel. Cela nous mène tout droit à la définition ci-après.

Définition 3 | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbf{R}$, la *valeur absolue de* x, notée $|x|$, est le réel défini par :

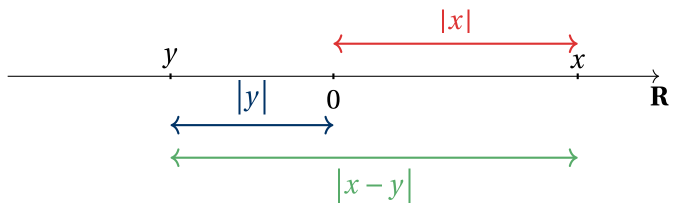
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Définition 4 | Distance entre deux réels

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On définit la *distance de* x *à* y comme étant le réel noté $\mathrm{d}(x, y)$ et défini par :

$$\mathrm{d}(x, y) = \left|x - y\right|.$$

Les réels peuvent se représenter sur une droite dite « numérique ».



Pour tous réels x, y, la valeur absolue correspond à l'écart (sans signe) entre x et y, et $|x|$ représente donc la distance entre x et 0.

Proposition 13 | Propriétés de la valeur absolue et de la distance

On a : $|0| = 0$, et pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:

- $|x| \geqslant 0, \quad |x| = \max\{x, -x\}$.
- **(Séparation)** $|x| = 0 \iff x = 0$, $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$.
- **(Parité / Symétrie)** $|x| = |-x|, \quad \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
- **(Encadrement et valeur absolue)** $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. Plus généralement :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbf{R}, \quad |x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}.$$

- $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x|^2 = x^2$.
- **(Produit)** $\left|xy\right| = |x| \times \left|y\right|$.

Toutes ces propriétés seront plus intuitives dans le Chapter ANA12 où la valeur absolue sera vue comme une fonction.

Preuve

- La positivité est élémentaire et découle de la définition en séparant les cas. Passons à la seconde partie.
- $\boxed{\Leftarrow}$ est évident.
  $\boxed{\Rightarrow}$
-
-

- Si $x \leqslant 0$ alors
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x = |x|.$$
Si $x < 0$ alors $-x \geqslant 0$ et on a
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x)} \times \sqrt{(-x)} = \sqrt{(-x)}^2 = -x = |x|.$$
- On peut par exemple utiliser la propriété idoine déjà démontrée pour la racine.
$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x| \times |y|.$$

Théorème 2 | Inégalité triangulaire
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors :
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

La partie de droite sert beaucoup plus souvent que le membre de gauche, mais les deux sont bien à connaître.

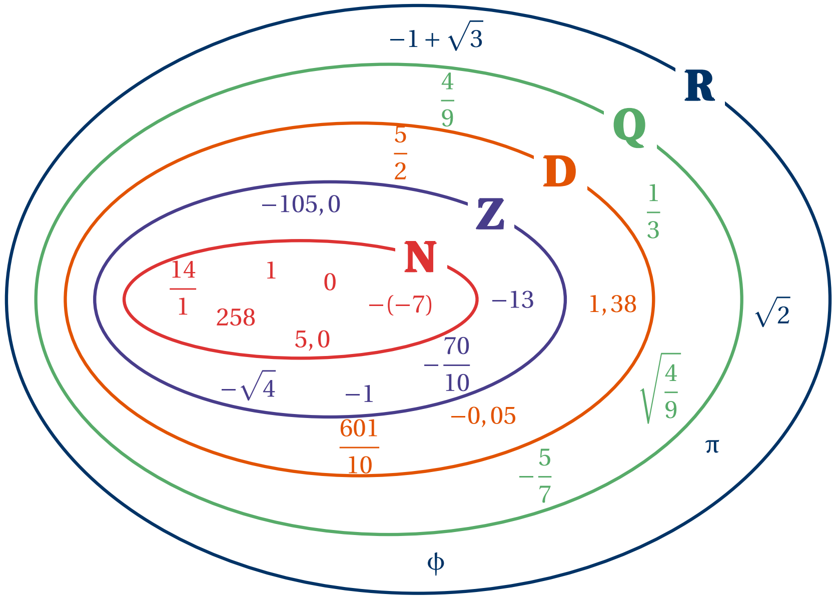
Preuve On a
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$\big(|x| + |y|\big)^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy|y^2$$

Or $xy \leqslant |xy|$, d'où $x^2 + y^2 + 2xy \leqslant x^2 + 2|xy|y^2$, c'est-à-dire
$$|x+y|^2 \leqslant \big(|x| + |y|\big)^2$$
*Et, comme $|x+y| \geqslant 0$ et $|x| + |y| \geqslant 0$, la proposition **??** nous permet de conclure que :*
$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

De manière similaire, on a
$$\big||x| - |y|\big|^2 = |x|^2 - 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$$
Or $xy \geqslant -|xy|$, d'où $x^2 + y^2 + 2xy \geqslant x^2 - 2|xy|y^2$, c'est-à-dire
$$|x+y|^2 \geqslant \big||x| - |y|\big|^2.$$
Et, comme $|x+y| \geqslant 0$ et $\big||x| - |y|\big| \geqslant 0$, la proposition **??** nous permet de conclure que
$$|x+y| \geqslant \big||x| - |y|\big|.$$

2. SOUS-ENSEMBLES USUELS DE R

On rappelle brièvement quelques sous-ensembles de réels connus depuis le collège.



Sur ce dessin :

- $\mathbf{R}$ désigne les *réels*,
- $\mathbf{D}$ désigne les *décimaux*, c'est-à-dire les nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule,
- $\mathbf{Z}$ désigne les *entiers relatifs* (parfois appelés simplement *entiers*),
- $\mathbf{Q}$ désigne les *rationnels*,
- $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ désigne les *irrationnels*,
- $\mathbf{N}$ désigne les *entiers naturels*.

Comme le dessin le rappelle, on a alors la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{D} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R} \subsetneq \mathbf{C}.$$

Notation — Partie positive, négative, étoilée d'un sous-ensemble de R

Soit $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}$ un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Alors on note en général :

- $\mathrm{E}^{\star} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \neq 0\}$,
- $\mathrm{E}^{+} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \geqslant 0\}$,
- $\mathrm{E}^{-} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \leqslant 0\}$.

On peut aussi combiner les deux conditions :

$$\mathrm{e}^{+\star} = \{x \in \mathrm{E} \mid x > 0\}, \quad \mathrm{e}^{-\star} = \{x \in \mathrm{E} \mid x < 0\}.$$

Intervalles et lien avec la valeur absolue. On passe à présent à une classe d'ensembles qui nous offrira un cadre commode pour définir toute sorte de notions sur les fonctions : les intervalles.

Définition 5 | Intervalles

Soient a et b deux réels avec $a < b$, on définit alors les sous-ensembles ci-dessous, que l'on appelle *intervalles de* $\mathbf{R}$[a]

le *segment* $[a,b]$: $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a, x \leqslant b\}$	$[a,b]$; a, b
l' *intervalle semi-ouvert en* a, $[a,b]$: $]a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a,\ x \leqslant b\}$	$]a,b]$; a, b
$[a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a,\ x < b\}$	$[a,b[$; a, b
$]a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a,\ x < b\}$	$]a,b[$; a, b
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$	$[a,\infty[$; a
$]a,+\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$	$]a,\infty[$; a
$]-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$	$]-\infty,b]$; b
$]-\infty,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$	$]-\infty,b]$; b

Remarquons que lorsque $a = b$ alors on définit de manière naturelle :

$$[a,b] = \{a\}, \quad [a,b[=]a,b] =]a,b[= \varnothing.$$

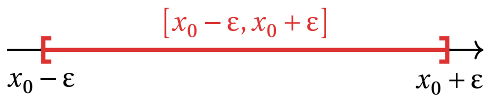
Les intervalles centrés autour d'un point peuvent être reformulés à l'aide de la valeur absolue, puisque rappelons que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$:

$$|x| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon \iff x \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

ou encore pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$|x - x_0| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x - x_0 \leqslant \varepsilon \iff x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

[a] On indique sous la définition mathématique la lecture de l'ensemble.



On arrive alors à la prochaine proposition.

Proposition 14
Soient $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\left\{x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < \varepsilon\right\} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

$$\left\{x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| \leqslant \varepsilon\right\} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Exemple 8 **(Écriture avec valeurs absolues d'intervalles plus généraux)**
Montrer que si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \leqslant b$, alors

$$[a, b] = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}\right\},$$

$$]a, b[= \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\}.$$

Illustrer ces formules sur un dessin.

En résumé, la valeur absolue est une quantité très efficace pour traduire des conditions d'appartenance à un certain intervalle. Nous utiliserons régulièrement ce genre de choses en analyse.

3. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

3.1. Principes généraux de raisonnement

Rien de bien nouveau dans cette partie par rapport aux classes antérieures. On formalise simplement différents types de raisonnements rencontrés jusqu'alors pour résoudre des équations et inéquations, à l'aide des rudiments de logique développés dans le Chapter ALG1. Commençons par rappeler des erreurs cruciales à ne pas commettre :

Attention **Au sujet des divisions / factorisations**

- Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle.
- Si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ alors l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$. Mais, on rédige la condition en utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \iff a^2 - b^2 = 0 \\ &\iff (a-b)(a+b) = 0 \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

identité remarquable
équation produit-nul

Comment procéder pour résoudre une équation ? Plusieurs méthodes s'offrent à nous.

Méthode **Résolution d'une équation ou inéquation**

Considérons deux équations ou inéquations $(\mathrm{EQ}_1), (\mathrm{EQ}_2)$ en une inconnue notée x.

1. **(Ensemble de définition)** On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans l'ensemble de définition** de l'équation (ou inéquation).
2. On note $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions (éventuellement vide) respectif de $(\mathrm{EQ}_1), (\mathrm{EQ}_2)$.
   - **(Travailler par équivalence)** On arrive à transformer l'équation (ou inéquation) initiale en (EQ_2) équivalente à la première, c'est-à-dire :

$$x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_1) \iff x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_2).$$

Ou encore :

$$x \in \mathcal{S}_1 \iff x \in \mathcal{S}_2, \quad \text{en d'ensembles de solutions : } \boxed{\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2}.$$

- **(Travailler par implication)** On arrive à transformer l'équation (ou inéquation) initiale en (EQ_2) mais à partir d'implications à partir de la première, c'est-à-dire :

$$x \text{ solution de } (\text{EQ}_1) \implies x \text{ solution de } (\text{EQ}_2).$$

Ou encore :

$$x \in \mathcal{S}_1 \implies x \in \mathcal{S}_2, \quad \text{en d'ensembles de solutions : } \boxed{\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2}.$$

Ainsi, des solutions « parasites » (de (EQ_2) mais pas de (EQ_1)) peuvent apparaître. Il faut donc vérifier *a posteriori* lesquelles sont effectivement des solutions de (EQ_1).
- **(Technique spécifique aux inéquations)** Pour résoudre $f(x) \geqslant g(x)$ avec $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Attention — Ensemble de définition

Quand on parle d'ensemble de solutions $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ cela sous-entend naturellement ensemble de définition <u>et</u> de solution. On commence donc toujours pas préciser l'ensemble de définition de l'équation ou l'inéquation considérée.

La rigueur de la rédaction mathématique demande qu'une fois que l'on a commencé à utiliser des symboles d'implications ($\implies$) dans une suite d'assertions on ne réutilise plus de symboles d'équivalence ($\iff$) — une fois que l'on a perdu une équivalence, c'est donc perdu jusqu'au bout du calcul !

Attention

Il ne suffit pas d'écrire sur sa feuille un symbole « $\iff$ » pour prouver ladite équivalence ! Si certaines ne sont pas évidentes, une justification précise est attendue.

3.2. Techniques spécifiques de résolution

3.2.1. Avec des produits et des quotients

On intègre les réflexes suivants lorsqu'on cherche à résoudre une (in)équation :

- tout passer du même côté pour comparer à 0,
- tout mettre sur le même dénominateur le cas échéant,
- factoriser au maximum.

Méthode — Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient

Soient A et B deux réels.
- $\text{AB} = 0 \iff \text{A} = 0$ ou $\text{B} = 0$.
- $\dfrac{\text{A}}{\text{B}} = 0 \iff \text{A} = 0$ (et $\text{B} \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient, on dresse un tableau de signe pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.

3.2.2. Type polynomial

Étude de $ax + b$, $a \neq 0$. Tout se cache dans le tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	

Exemple 9 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.
- $x(x+2) = 2x(3x-4)$

  $x(x+2) = 2x(3x-4) \iff 5x(2-x) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2}$.
- $(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3)$.

- $\dfrac{2}{x} \geq \dfrac{4}{x+4}$

Étude de ax^2+bx+c, $a \neq 0$. On reprend les formules vues au lycée pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels. Elles seront généralisées dans le Chapter ALG3 aux cas de coefficients complexes.

Considérons un trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en mettant le trinôme sous forme «canonique»[1]. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, puisque $a \neq 0$:

[1]C'est-à-dire sans facteur en x

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right)\right]. \end{aligned}$$

forme canonique

Le terme entre crochet ressemble à une identité remarquable de la forme « a^2-b^2 ». Deux cas se présentent, en notant $\Delta = b^2-4ac$:

- si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= 0 \iff x \in \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}. \end{aligned}$$

identité remarquable

- Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2 \\ &= 0 \iff x = \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

- si $\Delta < 0$, alors

$$-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right) = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0, \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \implies ax^2+bx+c > 0.$$

Donc il n'y a pas de solution (dans $\mathbf{R}$).

On arrive tout droit au théorème suivant.

Théorème 3 | Résolution sur R des équations du second degré à coefficients réels

Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ avec $a \neq 0$. On cherche les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x. On appelle *discriminant* la quantité $\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta \geqslant 0$ l'équation $ax^2+b+x+c=0$ admet deux solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si en particulier $\Delta=0$ alors les deux solutions sus-mentionnées sont confondues. Il n'y a qu'une solution définie par $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbf{R}$.

Exemple 10 Soit $m \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{P}(x) = 2x^2+(2m+2)x+m^2-1$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $\mathrm{P}(x)=0$ admet-elle une unique solution ? Quelle est alors cette solution ?

$\Delta_m = 4m^2-8m-12=0$, *dont on souhaite à présent étudier le signe en* m. *On calcule donc le discriminant en* m : $\Delta' = 256 = 16^2$

Donc $\Delta_m = 0 \iff m = m_1$ *ou* m_2 *avec* $m_1=-1$ *et* $m_2=3$.

- *Donc si* $m=3$ *ou* $m=-1$, *l'équation* $\mathrm{P}(x)=0$ *admet une unique solution.*
- *Si* $m=-1$, 0 *est l'unique solution.*
- *Si* $m=3$, -2 *est l'unique solution.*

Exemple 11 Résoudre selon les valeurs de $m\in\mathbf{R}$: $(m+2)x^2-2mx+2m+3=0$ puis $(m+2)x^2-2mx+2m+3<0$.

- *si* $m=-2$, *l'expression devient* $4x-1$, *une expression affine. Donc* $\boxed{4x-1=0 \iff x=\frac{1}{4} \text{ et } 4x-1<0 \iff x<\frac{1}{4}}$.
- *si* $m\neq-2$, $(m+2)x^2-2mx+2m+3$ *est un trinôme du second degré dont le discriminant vaut*

$$\Delta = -4(m^2+7m+6).$$

L'expression m^2+7m+6 *est un trinôme du second degré d'inconnue* m *dont les racines sont* -1 *et* -6.

— *si* $m\in]-\infty;-6[\cup]-1;+\infty[$: $m^2+7m+6>0$ *donc* $\Delta<0$ *et l'équation* $(m+2)x^2-2mx+2m+3=0$ *n'admet pas de solutions réelles.*
Par ailleurs, $m+2<0$ *si* $m\in]-\infty;-6[$ *donc dans ce cas,* $(m+2)x^2-2mx+2m+3<0$ *pour tout* $x\in\mathbf{R}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\mathbf{R}$*).*
En revanche, $m+2>0$ *si* $m\in]-1;+\infty[$ *donc dans ce cas,* $(m+2)x^2-2mx+2m+3>0$ *pour tout* $x\in\mathbf{R}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\emptyset$*).*

— *si* $m=-6$, $\Delta=0$ *donc l'équation* $(m+2)x^2-2mx+2m+3=0$ *admet une unique solution réelle :* $\frac{3}{2}$.
Par ailleurs, $-6+2<0$ *donc* $(m+2)x^2-2mx+2m+3<0$ *pour tout* $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$*).*

— *si* $m=-1$, $\Delta=0$ *donc l'équation* $(m+2)x^2-2mx+2m+3=0$ *admet une unique solution réelle :* 1.
Par ailleurs, $-1+2>0$ *donc* $(m+2)x^2-2mx+2m+3\geq0$ *pour tout* $x\in\mathbf{R}$ *(et l'ensemble solution de l'inéquation est donc* $\emptyset$*).*

— *si* $m\in]-6;-1[$: $m^2+7m+6<0$ *donc* $\Delta>0$ *et l'équation* $(m+2)x^2-2mx+2m+3=0$ *admet deux solutions réelles distinctes*

$$x_1 = \frac{2m-\sqrt{-4(m^2+7m+6)}}{2(m+2)} = \frac{m-\sqrt{-(m^2+7m+6)}}{m+2} \text{et} x_2 = \frac{m+\sqrt{-(m^2+7m+6)}}{m+2}.$$

Par ailleurs, si $m\in]-6;-2[$, $m+2<0$ *donc* $(m+2)x^2-2mx+2m+3<0 \iff x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$.
Enfin, si $m\in]-2;-1[$, $m+2>0$ *donc* $(m+2)x^2-2mx+2m+3<0 \iff x\in]x_1;x_2[$.

Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3 Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).

Sinon, on cherche à factoriser l'expression $\mathrm{A}(x)$ pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :

- soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
- soit on trouve une **racine évidente** x_0 et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $\boxed{A(x) = (x - x_0)B(x)}$ où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Remarque 4 Tout ce qui précède deviendra plus limpide lorsque nous traiterons les polynômes dans le Chapter ALG9.

Exemple 12 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^3 + x + 2 = 4x^2$

$x^3 + x + 2 = 4x^2 \iff x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$. 1 *est une racine évidente. Donc*

$$\exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^2, x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

En identifiant, cela donne $a = 1$, $b = -3$ *et* $c = -2$.
D'où $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0$.
Or les racines du trinôme $x^2 - 3x - 2$ *sont* $-\frac{1}{2}$ *et* $\frac{7}{2}$.
L'équation admet ainsi trois solutions : $1, -\frac{1}{2}$ *et* $\frac{7}{2}$.

2. $x^4 - x < 0 \iff x(x^3 - 1) < 0 \iff x(x-1)(x^2 + x + 1) < 0$ *(la factorisation de* $x^3 - 1$ *s'obtient comme précédemment).*
Comme $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ *(discriminant strictement négatif),*

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) < 0 \iff x(x-1) < 0$$

ce qui est le cas lorsque $x \in]0;1[$.

3. $x^4 - x < 0$

$\dfrac{-2x^2 + 3x - 10}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8} \geq 0 \iff \dfrac{-2x^2 + 3x - 10}{(x-1)(-x^2 + 6x - 8)} \geq 0$ *(après factorisation du dénominateur comme précédemment).*
Comme $\forall x \in \mathbf{R}$, $-2x^2 + 3x - 10 < 0$ *(discriminant strictement négatif),*

$$\frac{-2x^2 + 3x - 10}{(x-1)(-x^2 + 6x - 8)} \geq 0 \iff \frac{1}{(x-1)(-x^2 + 6x - 8)} \leq 0$$

ce qui est le cas lorsque $x \in]1;2[\cup]4;+\infty[$ *(les racines du trinôme* $-x^2 + 6x - 8$ *étant* 2 *et* 4*).*

3.3. Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

Utiliser les propriétés de $\ln$, $\exp$. L'idée est d'essayer d'appliquer ln, ou exp de chaque côté afin de simplifier l'équation.

Exemple 13 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

$2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$ *est bien définie lorsque* $x > 1$. *Alors*

$$\begin{aligned} & 2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1) \\ \iff & \ln((x+1)^2) = \ln((x-1)(2x-1)) \\ \iff & (x+1)^2 = (x-1)(2x-1) \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \\ \iff & (x = 0 \text{ ou } x = 5) \text{ et } x > 1 \\ \iff & x = 5. \end{aligned}$$

2. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$

Élever au carré. L'idée est d'essayer d'élever au carré afin de supprimer d'éventuelles racines. Attention : on rappelle qu'on ne peut élever au carré n'importe comment une inégalité! Il faut toujours prendre la précaution de savoir si les membres sont positifs.

Exemple 14 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation suivante : $x = \sqrt{2-x}$.

L'équation est définie sur $]-\infty, 2]$. *On a pour* $x \in]-\infty, 2]$:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2-x} &\implies x^2 = 2-x \\ &\implies x^2 + x - 2 = 0 \\ &\implies (x-1)(x+2) = 0 \\ &\implies x \in \{1, -2\}. \end{aligned}$$

On voit ainsi que les solutions de notre équation sont incluses dans l'ensemble $\{1, -2\}$. *En réinjectant ensuite ces valeurs dans l'équation on constate que* $\boxed{\text{seul } 1 \text{ est solution}}$.

Exemple 15 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x^2+2x} < x+1$.

$\sqrt{x^2+2x} < x+1$ *n'est bien définie que si* $x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.
Par ailleurs, comme $\sqrt{x^2+2x} \geq 0$ *on a aussi* $x+1 > 0$ *par transitivité donc on sait que* $x > -1$.
Pour tout $x \in [0; +\infty[$, *on a alors*

$$\sqrt{x^2+2x} < x+1 \iff x^2+2x < (x+1)^2 \iff 0 < 1$$

ce qui est toujours vrai donc $\sqrt{x^2+2x} < x+1$ *pour tout* $x \in [0; +\infty[$. *L'ensemble des solutions est* $\boxed{[0; +\infty[}$.

UTILISER UN CHANGEMENT DE VARIABLE. Il s'agit de poser un changement de variable du type $X = e^x$ ou $X = \ln(x)$ ou $X = x^2$ ou $X = \sqrt{x}$... pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre (en général polynomiale). Dans les exercices, le changement de variable éventuel à réaliser sera toujours donné.

Attention

Attention, une fois les valeurs possibles de X trouvées, il ne faut pas oublier de revenir aux solutions en x pour conclure.

Exemple 16 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ et $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

Posons $X = x^2$. *On a alors* $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff X^2 - 3X + 2 = 0$ *et* $X = x^2$.
Les racines du trinôme $X^2 - 3X + 2 = 0$ *étant* 1 *et* 2,

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 2 \iff x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}.$$

Pour l'inéquation, $X^2 - 3X + 2 < 0 \iff X \in]1; 2[$ *donc*

$$x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \iff 1 < x^2 < 2 \iff x \in]-\sqrt{2}; -1[\cup]1; \sqrt{2}[$$

2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$

$e^x + e^{1-x} = e + 1 \iff e^{2x} + e = (e+1)e^x \iff (e^x)^2 - (e+1)e^x + e = 0.$
Posons $X = e^x$. *On a alors* $e^x + e^{1-x} = e + 1 \iff X^2 - (e+1)X + e = 0$ *et* $X = e^x$.
Le discriminant du trinôme $X^2 - (e+1)X + e$ *est* $\Delta = (e-1)^2 > 0$ *donc*

$$X^2 - (e+1)X + e = 0 \iff X = \frac{e+1-(e-1)}{2} = 1 \text{ ou } X = \frac{e+1+(e-1)}{2} = e.$$

Ainsi,

$$e^x + e^{1-x} = e + 1 \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = e \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1.}$$

ENLEVER LES VALEURS ABSOLUES. Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qu'il y a à l'intérieur. On peut donc étudier le signe de l'expression dans la valeur absolue puis faire une disjonction de cas pour résoudre l'(in)équation obtenue sans la valeur absolue dans chacun des cas possibles.

Exemple 17 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x-4| = 2x + 10$

Si $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$, *l'équation s'écrit* $x - 4 = 2x + 10$ *i.e.* $x = -14 \notin [4; +\infty[$

donc l'équation n'a pas de solution dans cet intervalle. Finalement, $|x-4| = 2x+10 \iff \boxed{x=-2}$.

2. $|3-x| > |x+2|$

- *si* $x \in]-\infty;-2]$*, l'inéquation devient* $3-x > -x-2 \iff 3 > -2$ *ce qui est toujours vrai donc l'inéquation est vérifiée pour tout* $x \in]-\infty;-2]$.
- *si* $x \in [-2;3]$*, l'inéquation devient* $3-x > x+2 \iff x < \frac{1}{2}$ *donc l'inéquation est vérifiée pour tout* $x \in [-2;\frac{1}{2}[$.
- *si* $x \in [3;+\infty[$*, l'inéquation devient* $x-3 > x+2 \iff -3 > 2$ *ce qui est toujours faux donc l'inéquation n'est vérifiée pour aucun* $x \in [3;+\infty[$.

Finalement, $|3-x| > |x+2| \iff]-\infty;\frac{1}{2}[$.

Résolution d'inéquations par une étude de fonction. Si on souhaite montrer qu'une inéquation est vraie pour tout x dans un certain sous-ensemble E (de **R**), ou même vraie sur **R** tout entier, et que l'on n'y parvient pas par inégalités successives, on peut essayer d'étudier les variations d'une certaine fonction.

Méthode **Pour montrer «** $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) \leqslant (\text{ ou } \geqslant) g(x)$ **»**

Soient $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions définies sur **R**.

- On définit la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

Commençons par un exemple complet.

Exemple 18 Résoudre sur **R** : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \longrightarrow & \boldsymbol{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - x - 1 \end{array} \right.$ *. La fonction* f *est dérivable car somme de fonctions dérivables.*

Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$*, on a* $f'(x) = \exp(x) - 1$*. Ainsi, si* $x > 0$ *alors* $f'(x) > 0$ *et si* $x < 0$ *alors* $f'(x) < 0$*. On obtient donc le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variations f *admet* 0 *pour minimum sur* $\boldsymbol{R}$ *et l'atteint en* 0*. On a donc montré que, pour tout réel* $x \in \boldsymbol{R}$*,* $f(x) \geqslant 0$ *et, par suite,* $\boxed{\textit{l'ensemble des solutions est } \boldsymbol{R}}$.

Exemple 19 Montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.

On pose f *la fonction définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :*

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \ln(1+x) - x.$$

La fonction f *est dérivable sur* $]-1;+\infty[$ *et :*

$$\forall x > -1, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

On dresse alors le tableau des variations de f *:*

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Comme $f(0) = 0$*, on a que pour tout* $x > -1, \quad f(x) \leq 0$*. Ainsi :*

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

4. PARTIES MAJORÉES, MINORÉES DE R & PARTIE ENTIÈRE

4.1. Minorant, majorant, borne inférieure/supérieure

Définition 6 | Majorant, minorant
Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$.

- On dit que A est *majoré* s'il existe un réel M tel que

$$\forall a \in A, \quad a \leqslant M.$$

On dit alors que M est ***un*** *majorant* de l'ensemble A.

- On dit que A est minoré s'il existe un réel m tel que

$$\forall a \in A, \quad a \geqslant m.$$

On dit alors que m est ***un*** *minorant* de l'ensemble A.

- Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit *borné*.

Attention
Un ensemble majoré (*resp.* minoré) admet une infinité de majorant (*resp.* de minorants). En effet, si M est un majorant, alors M + 1 en est un aussi.

Exemple 20 (Négation) Écrire la négation de «A est minoré», puis «A est majoré».

Proposition 15 | Partie bornée et valeur absolue
Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$. Alors :

$$A \text{ est borné} \iff \exists M \in \mathbf{R}^+, \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M.$$

Preuve
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons d'abord que A est borné, soit alors M un majorant de A et m un minorant de A. Alors, pour $x \in A$ on a

$$x \leqslant M \leqslant |M|, \quad x \leqslant m \leqslant -|m|.$$

Posons $R = \max\{|M|, |m|\}$, on a alors $|M| \leqslant R$ et $-|m| \geqslant -R$.
Ainsi, pour tout $x \in A$ on a $-R \leqslant -|m| \leqslant x \leqslant |M| \leqslant R$, c'est-à-dire $|x| \leqslant R$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement supposons qu'il existe $R \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant R$. Alors, pour $x \in A$ on a

$$x \leqslant |x| \leqslant R, \quad x \geqslant -|x| \geqslant -R.$$

Le réel R est donc un majorant de A et $-R$ est un minorant de A, l'ensemble A est ainsi borné.

Exemple 21

- L'ensemble $]1, 3]$ est *borné*.
- L'ensemble $]-\infty, 4]$ est *majoré mais n'est pas minoré*.
- $\mathbf{N}$ est *minoré mais n'est pas majoré*.
- $\mathbf{Q}$ *n'est ni majoré, ni minoré.*

Considérons l'intervalle $A = [0, 2[$. Ici, les réels 0 et 2 jouent un rôle particulier.

- 0 est un minorant, et il ne semble pas y en avoir de plus grand, et il **est dans** A. On dira que 0 est la «borne inférieure de A», et même un «minimum de A» car il appartient à l'snsemble.
- 2 est un majorant, et il ne semble pas y en avoir de plus petit, et il **n'est pas** dans A. On dira que 2 est la «borne supérieure de A».

Formalisons cela dans la définition/proposition qui suit.

Définition/Proposition 2 | Borne supérieure/inférieure
Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$.

- **(Borne supérieure)** Si A est majorée, alors : A admet un plus petit majorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus petit de ces majorants, noté

sup A.
- **(Borne inférieure)** Si A est minorée, alors : A admet un plus grand minorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus grand de ces minorants, noté inf A.

Nous admettons l'existence d'un plus petit/grand majorant/minorant sous les hypothèses mentionnées.

Définition 7 | Maximum / Minimum
Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$.
- Si A est majorée **et** $\sup A \in A$, alors on dit que A admet un *maximum*, et on note $\max A = \sup A$.
- Si A est minorée **et** $\inf A \in A$, alors on dit que A admet un *minimum*, et on note $\min A = \inf A$.

Un minimum ou un maximum est appelé un *extremum*.

Attention
Un ensemble n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Mais, pour nous, toujours une borne supérieure ou inférieure car nous travaillerons avec des parties non vides majorées ou minorées.

Remarque 5 **(Un peu d'orthographe)** L'Académie Française recommande d'utiliser le pluriel «à la française» pour les mots latins finissant en «- um» comme «maximum», «minimum» ou «extremum». En revanche, en Mathématiques, nous utiliserons des pluriels latins c'est-à-dire : «maxima», «minima» et «extrema».

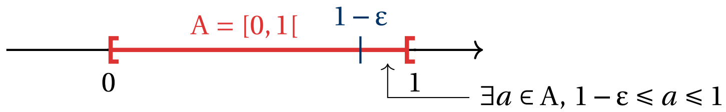
Exemple 22 On considère les ensembles suivants

$$A = [1,2],\quad B =]-\infty,3],\quad C =]0,4[,\quad D =]1,+\infty[,\quad E = \mathbf{N},\quad F = \mathbf{R}^{+\star}.$$

Préciser si ces ensembles admettent un maximum ou minimum, et donner sa valeur le cas échéant.

- A *admet comme maximum* 2 *et comme minimum* 1.
- B *admet comme maximum* 3 *et n'est pas minoré et n'admet donc pas de minimum.*
- C *est borné mais n'admet ni maximum, ni minimum.*
- D *est minoré mais n'est pas majoré,* D *n'admet ni maximum, ni minimum.*
- E *admet* 0 *comme minimum et n'est pas majoré et n'admet donc pas de maximum.*
- F *est minoré mais n'est pas majoré,* F *n'admet ni maximum, ni minimum.*

Pour terminer, on souhaite traduire mathématiquement (à l'aide de quantificateurs) les portions d'assertions «plus petit majorant» et «plus grand minorant» apparaissant dans la Définition/Proposition 2. Reprenons l'exemple de $A = [0,1[$. On a $1 = \sup A$, mais comment traduire que c'est le plus petit majorant ?



Si on se fixe $\varepsilon > 0$, alors $1-\varepsilon$ ne sera pas un majorant, c'est-à-dire il existe $a \in A$ de sorte que $1-\varepsilon \leqslant a \leqslant 1$. On peut traduire de la même façon le fait d'avoir un plus grand majorant, ce qui nous mène au théorème suivant, que nous admettons.

Théorème 4 | Caractérisation de la borne supérieure/inférieure
Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbf{R}$.
- **(Borne supérieure)** Si A est majoré, alors :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & M \text{ est un majorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ M-\varepsilon \text{ n'est pas un majorant,} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ M-\varepsilon \leqslant a \leqslant M. \end{cases}$$

- **(Borne inférieure)** Si A est minoré, alors :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & m \text{ est un minorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ m+\varepsilon \text{ n'est pas un minorant,} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ m \leqslant a \leqslant m+\varepsilon. \end{cases}$$

4.2. Partie entière

La notion de borne supérieure va nous permettre de définir proprement la notion de « partie entière » d'un réel, qui est connue depuis bien longtemps mais peut-être pas sous ce nom. Ainsi, on souhaite définir mathématiquement l'action d'ôter la partie décimale d'un nombre réel, c'est-à-dire transformer par exemple 1.1 en 1. Comment faire cela ? Une idée serait l'écriture de tout réel x de la manière suivante :

$$x = k + y, \quad k \in \mathbf{N}, \quad y \in [0,1[.$$

Puis on poserait que la partie entière de x est l'entier k, mais encore faudrait-il prouver d'abord l'existence et l'unicité de x. Par exemple $1.1 = 1 + 0.1$ donc la partie entière de 1.1 est 1. En revanche, ce n'est pas la définition classique qui consiste à dire qu'il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in [k, k+1[$, c'est-à-dire que x se trouve dans un unique intervalle de deux entiers consécutifs. Dans notre exemple, $1.1 \in [1,2[$.

Définition/Proposition 3 | Partie entière
Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle *partie entière de x* l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z}$, tel que :

$$x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[\quad (\Longleftrightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1).$$

Attention
Attention aux confusions entre $\leqslant, <$.
- Si vous confondez les deux symboles, alors on change complètement la notion. [2]
- Si vous oubliez d'utiliser une inégalité stricte, c'est pire, il n'y a plus unicité !

Exemple 23 Calculer les parties entières ci-après.

- $\lfloor 3.1 \rfloor$
  $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ *car* $3 \leqslant 3.1 < 3$,
- $\lfloor -4.5 \rfloor$
  $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$, *car* $-5 \leqslant -4.5 < -4$,
- $\lfloor 12 \rfloor$
  $\lfloor 12 \rfloor = 12$, *car* $12 \leqslant 12 < 13$,
- $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$
  $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$, *car* $2 \leqslant \frac{7}{3} < 3$.

[2]Par exemple, si on avait pris comme définition $\lfloor x \rfloor < x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, alors on aurait $\lfloor 5 \rfloor = 4$... curieux non ?

Preuve Nous devons maintenant justifier l'existence et l'unicité de la partie entière. Soit $x \in \mathbf{R}$.

Existence. (très partielle) Considérons $N_x = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant x\}$ l'ensemble des entiers inférieurs à x. Nous admettons que N_x est non vide, cet ensemble est majoré par x. Il admet donc une borne supérieure que l'on note $\lfloor x \rfloor = \sup(N_x)$. On admet que cette quantité convient.

Unicité. Supposons que $m, n \in \mathbf{Z}$ conviennent pour la partie entière de x. Alors :

$$n \leqslant x < n+1, \quad m \leqslant x < m+1.$$

On peut supposer que $n < m$, sinon on inverse les rôles. Alors en combinant les deux encadrements, on a :

$$n < m \leqslant x < n+1 < m+1.$$

En particulier, $n < m < n+1$. On aurait donc qu'un entier m serait compris strictement entre deux entiers consécutifs $n, n+1$ — absurde.

Proposition 16 | Reformulation de la définition
Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors :
- $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, *i.e.* :
$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant x\}.$$
- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, tel que :
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

De manière générale, lorsque l'on ne sait plus si on doit ouvrir ou fermer l'encadrement, on vérifie ce que l'on écrit avec un exemple, par exemple tester avec $x = 1.1$.

5. TRIGONOMÉTRIE

On rappelle dans cette section la définition géométrique du cosinus, sinus et de la tangente. Leur étude en tant que fonction sera faite dans le Chapter ANA12.

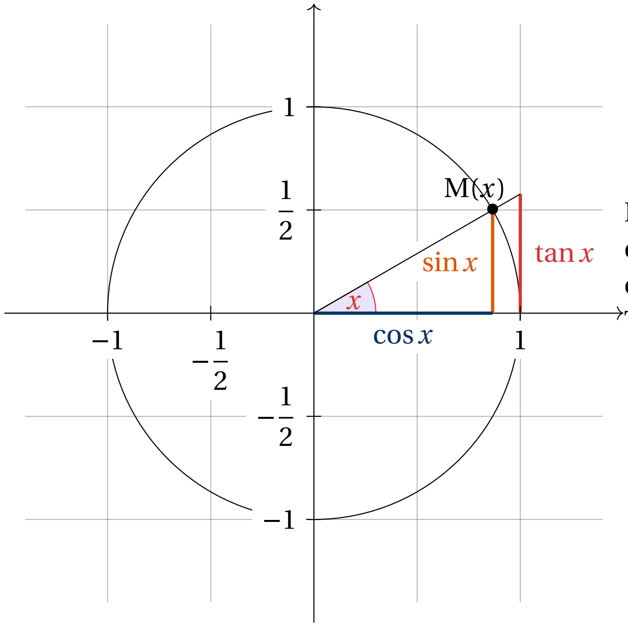
5.1. Définitions

Définition 8 | Cercle trigonométrique
Le *cercle trigonométrique* est le cercle du plan de rayon 1 et de centre O.

D'après le cours de géométrique, c'est le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$.

Définition 9 | Cosinus, sinus et tangente
Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. Soit x un réel et $M(x)$ le point de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

- On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point $M(x)$.
- On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point $M(x)$.
- Lorsque $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$, on appelle *tangente de* x, notée $\tan x$, la quantité : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.



Pourquoi indiquer $\tan x$ à cet endroit ? Ceci est une simple conséquence du théorème de THALÈS. En effet, il donne

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Remarque 6 Pour la tangente, la condition $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ garantit que $\cos x$ ne s'annule pas, donc que la fraction est bien définie. Nous le reconstaterons lors de la résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 17 | Conséquences directes de la définition

- **(Inégalités fondamentales)**

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |\cos(x)| \leqslant 1, \\ |\sin(x)| \leqslant 1. \end{cases}$$

- **(Théorème de PYTHAGORE)**

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- **(Parité)** Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

▶ **(Périodicité)** Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \tan(x + k\pi) = \tan x.$$

Remarque 7 Dans la proposition précédente $\cos^2(x)$ désigne $(\cos(x))^2$. Autrement dit, la fonction $\cos^2$ évaluée en x.

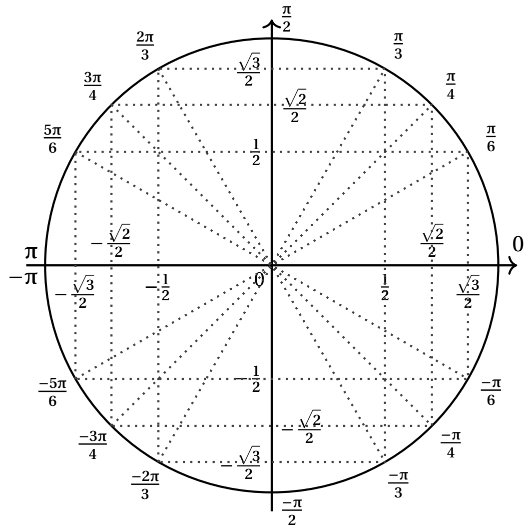
Remarque 8 **(Et le collège?)** Ces définitions sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été vues au collège et au lycée. Dans votre enfance, on vous avait expliqué qu'en considérant un angle x d'un triangle rectangle, on avait :

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

Ici, le triangle rectangle sous-jacent est celui dessiné sur le cercle trigonométrique précédent, avec la longueur de l'hypoténuse qui vaut 1 (la distance $OM(x)$). Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de Thalès. Il en est de même pour le sinus.

5.2. Valeurs remarquables

On rappel également ici un certain nombre de valeurs remarquables utiles.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Pour la tangente, à savoir retrouver rapidement plutôt que de les apprendre :					
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

5.3. Formules trigonométriques

Il existe de nombreuses formules en trigonométrie, seules quelques unes sont à notre programme, ce sont celles figurant dans les énoncés ci-après. Toutes les autres sont hors-programme, certaines d'entre elles seront vues néanmoins dans des exemples. On commence par les principales : les formules d'addition, qui seront admises (voir vos cours de lycée sur le produit scalaire).

Proposition 18 | Formules d'addition

Soient $x, y \in \mathbf{R}$.

- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$.

Attention au sinus

Pour le cosinus, le signe est inversé dans le résultat. $\pm \rightsquigarrow \mp$.

Exemple 24 **(Autre formule : anti-linéarisation)** Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. À l'aide des formules précédentes, établir une formule pour $\cos x \cos y$, $\sin x \sin y$, $\sin x \cos y$.

Corollaire 1 | Multiples de π

Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors :

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0.$$

Preuve Montrons tout d'abord la formule pour $n \in \mathbf{N}$, en faisant une récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

En prenant différentes valeurs de x, y, et en utilisant les valeurs remarquables, on déduit les formules ci-après facilement.

Corollaire 2 | Formules de transformation d'angles associés

Soit $x \in \mathbf{R}$.

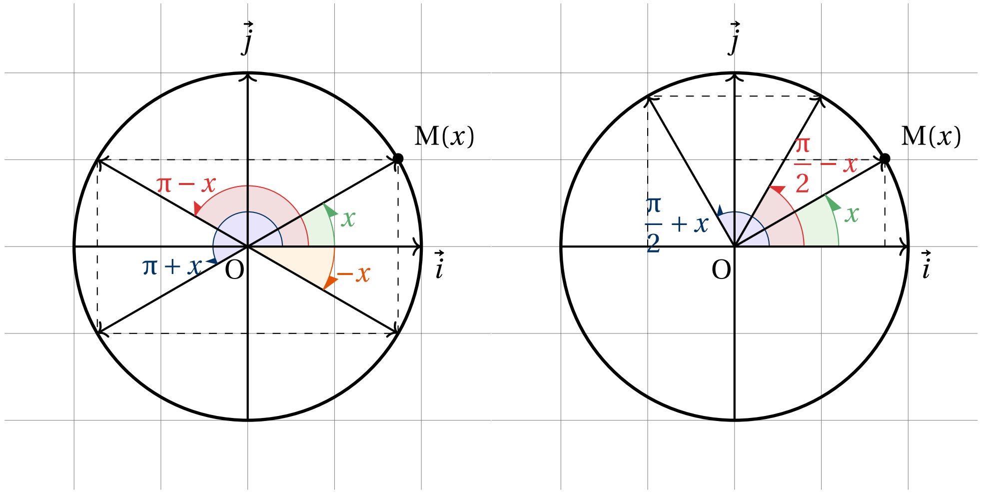
- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Remarque 9 Naturellement, des formules similaires peuvent s'obtenir pour la tangente. Mais on les retrouve facilement à l'aide de celles énoncées précédemment.

Exemple 25 À l'aide des valeurs remarquables et de propriétés sur cos, sin, déterminer les valeurs ci-après.

- $\cos \frac{2\pi}{3}$
- $\sin \frac{3\pi}{4}$

- $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
- $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
- $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$
- $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$



Et enfin, les cas particuliers $x = y$ dans les formules d'addition fournissent les formules dites de duplication.

Corollaire 3 | Formules de duplication / anti-linéarisation

Soit $x \in \mathbf{R}$.

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Ou encore, de manière équivalente, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 4 | Formules de linéarisation

Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Remarque 10 (Retenir les formules d'angles associés de manière géométrique) Les relations entre les cosinus et sinus des angles associés ne s'apprennent pas par coeur ! Mémoriser comment construire les angles $\dfrac{\pi}{2} \pm x$ et $\pi \pm x$ sur le cercle trigonométrique.

Combinaison linéaire d'expressions trigonométriques. Une dernière conséquence des formules d'addition est la transformation d'expressions trigonométriques en cos ou sin.

Méthode Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée »

Soient $a, b, x \in \mathbf{R}$. On souhaite transformer l'expression

$$\mathrm{E}(x) = a\cos x + b\sin x$$

en $\rho\cos(x+\varphi)$, avec $\rho \in \mathbf{R}^+, \varphi \in \mathbf{R}$, ou la forme $\rho\sin(x+\varphi)$. On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. Mettre $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ en facteur, de sorte que

$$\mathrm{E}(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$

2. Comme $\left(\dfrac{a}{\rho}, -\dfrac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque $\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{\rho}\right)^2 = 1$,

il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \qquad -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

3. Alors $E(x) = \cos x \cos\varphi - \sin x \sin\varphi = \cos(x+\varphi)$ d'après les formules d'addition.

Une méthode analogue existe si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Remarque 11 L'angle φ peut ne pas être explicite, en fonction des valeurs de a, b.

Exemple 26 Écrire sous forme d'un sinus puis d'un cosinus l'expression $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

5.4. Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 19 | Résolution d'équations

- Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\cos(x) = \cos(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + 2k\pi) \text{ ou } (x = -y + 2k\pi).$$

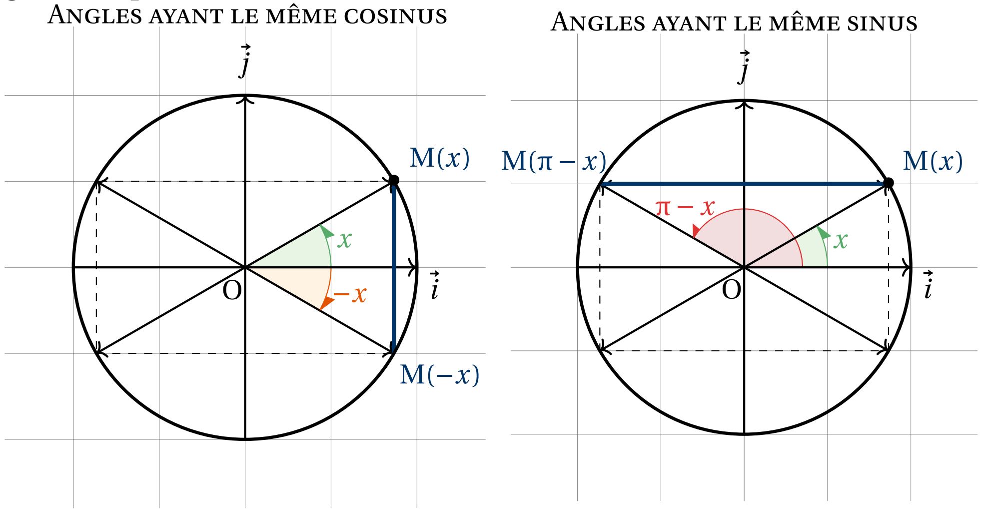
- Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\sin(x) = \sin(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + 2k\pi) \text{ ou } (x = \pi - y + 2k\pi).$$

- Soit $(x, y) \in \mathscr{D}_{\tan}^2$,

$$\tan(x) = \tan(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + k\pi).$$

Remarque 12 (Retenir les solutions d'équations trigonométriques de manière géométrique)



Exemple 27

- Résoudre $\sin x = 2$ en $x \in [0, 2\pi[$.

- Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ en $x \in]-2\pi, 0]$.

- Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en $x \in [0, 2\pi[$.

- Résoudre $\sin x = \cos x$ en $x \in \mathbf{R}$.

Exemple 28 **(Avec phase à trouver)** Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ en $x \in \mathbf{R}$.

⋆⋆⋆ Fin du chapitre ⋆⋆⋆

6. EXERCICES

6.1. Trigonométrie

Exercice ALG2.1 | (Solution : ??) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \theta \in [0, \pi], \; \left|\sin(n\theta)\right| \leqslant n \sin\theta.$$