

Chapitre ALG1.

Logique, Rudiments ensemblistes & Raisonnements

Résumé & Plan

Vous entrez dans le monde merveilleux des Mathématiques du supérieur. Il va donc falloir dans un premier temps clarifier et peaufiner la rédaction de cette discipline. On formalise en plus dans ce chapitre les différents types de raisonnements qui peuvent apparaître dans une démonstration mathématique.

1	Logique élémentaire	7	3	Raisonnements	21
1.1	Proposition logique	7	3.1	Sur l'existence/unicité de propositions	21
1.2	Quantificateurs	8	3.2	Sur les ensembles	22
1.3	Opérations logiques sur les propositions	10	3.3	Démonstration par disjonction de cas	22
1.4	Implication, Contraposée	13	3.4	Sur les liens logiques entre propositions	23
2	Bases sur les ensembles	16	3.5	Par récurrence	24
2.1	Généralités	16	4	Exercices	28
2.2	Opérations sur les ensembles	17	4.1	Logique et quantificateurs	28
2.3	Produit cartésien	20	4.2	Ensembles	29
			4.3	Raisonnements : implication, équivalence	29
			4.4	Raisonnement par récurrence	29
			4.5	Solutions des exercices	31

La logique est l'hygiène des Mathématiques

— André WEIL



Les Mathématiques sont construits à partir d'axiomes — c'est-à-dire des faits et consensus que nous ne cherchons pas à démontrer — et à partir desquels nous déduisons des propositions/théorèmes *etc.*, si possible vrais. L'objectif de ce chapitre est de formaliser les déductions de nouveaux énoncés (symboles logiques, techniques de preuve, *etc.*).

1. LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

1.1. Proposition logique

Définition 1 | Proposition

- ▶ On appelle *proposition* ou *assertion* une affirmation concernant un ou plusieurs objets mathématiques qui est, soit vraie, soit fausse.
- ▶ La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai ou le faux de cette proposition (mais pas les deux).

Définition 2 | Équivalence de propositions

Deux propositions sont dites *équivalentes* si elles ont même valeur de vérité.



Notation

On notera $P \iff Q$ lorsque deux propositions P, Q sont équivalentes.

Exemple 1

- ▶ « $3 \leq 4$ » est vraie, « $2^2 = 5$ » est fausse.
- ▶ « Il ne pleut jamais à Bordeaux », « Tous les élèves de la 1BC1 aiment les Mathématiques » sont équivalentes.
- ▶ « Tout nombre entier admet une racine carrée entière » est fausse.



- ▶ « Il existe un plus petit entier naturel » est vraie.



Booléens

En Python, il est très facile de faire différents tests logiques pour obtenir la valeur de vérité d'une proposition. Nous le verrons dans le cours d'Informatique, mais voici quelques exemples.

```
>>> 2**2 == 5
False
>>> 3 <= 4
True
>>> 3 < 4
True
```



Définition 3 | Conjecture

Une *conjecture* est une assertion non prouvée mais dont on pense que la valeur de vérité est vraie.

Exemple 2 La conjecture de GOLDBACH dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé). Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice.

Remarque 1 (Axiomatique de la logique) On a interdit depuis le début qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, mais interdit aussi qu'une proposition soit autre chose que vraie ou fausse. Ces deux principes s'appellent le principe de *non-contradiction* et le principe du *tiers exclu*.^a Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés : en effet, en 1931 GÖDEL démontra que dans tout système axiomatique de logique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés indécidables : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

^aOn évitera donc les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse », qui est subjectif et peut donc être considéré comme vrai et faux en fonction du lecteur.

1.2. Quantificateurs

On se donne un ensemble E et $P(x)$ une proposition dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E . On ne peut pas dire si la proposition P est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut x .

Définition 4 | Prédicat

Une proposition logique $P(x)$, dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E , s'appelle un *prédicat*.

Exemple 3

- ▶ $P(x)$ « $x^2 = 1$ » dépendant d'un réel x . Le cours de Mathématiques nous dit que « $x^2 = 1$ » est vraie quand $x = \pm 1$ uniquement.
- ▶ $P(n)$ « $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » dépendant d'un entier n . Le cours de Mathématiques nous dit que cette proposition est toujours vraie, nous le verrons dans le [Chapter ALG4](#).

Pour simplifier l'écriture des propositions on utilisera des symboles appelés quantificateurs.

Notation Quantificateurs

Soit $P(x)$ un prédicat vrai ou non pour x dans un certain ensemble E . On appelle *quantificateur* les symboles qui abrègent les propositions ci-après :

- ▶ « $\forall x \in E, P(x)$ vraie » qui signifie « **pour tout** x , telle que $P(x)$ soit vraie »,
- ▶ « $\exists x \in E, P(x)$ vraie » qui signifie « **il existe** x , telle que $P(x)$ soit vraie »,
- ▶ « $\exists ! x \in E, P(x)$ vraie » qui signifie « **il existe un unique** x , telle que $P(x)$ soit vraie »,

Attention

Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « \forall » et « \exists » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».

Remarque 2 (Les quantificateurs ne sont pas toujours formellement écrits)

Le quantificateur universel est parfois implicite dans les énoncés mathéma-

tiques. Par exemple, le «soit» cache souvent un « \forall ».

Par exemple, l'énoncé «Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $n(n+1)$ est pair» s'écrit :

$$\langle \forall n \in \mathbf{N}, \quad n(n+1) \text{ est pair} \rangle.$$

On peut alors écrire des propositions logiques de manière plus condensée en utilisant ces symboles.

Exemple 4 Résumer en une phrase chaque proposition, et dire si elle est vraie ou fausse.

▶ $\forall x > 0, \exists y > 0, y^2 = x.$



▶ $\forall x > 0, \exists! y > 0, y^2 = x.$



▶ $\forall x > 0, \exists! y \in \mathbf{R}, y^2 = x.$



▶ $\exists n \in \mathbf{N}, n \geq 10.$



▶ $\exists! n \in \mathbf{N}, 1 \leq 2n \leq 3.$



Attention Rédaction : pas de mélange mots/quantificateurs

Quand on rédige des Mathématiques, on essaie de ne pas mélanger les mots et les symboles. Ainsi,

- ▶ « x^2 est positif $\forall x$ » est une **mauvaise** rédaction. 😞
- ▶ « x^2 est positif pour tout réel x » est une **bonne** rédaction 😊 ,
- ▶ « $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$ » est une **bonne** rédaction 😊 .

De plus, les quantificateurs sont toujours placés avant la proposition à quantifier.

ORDRE DES QUANTIFICATEURS. Il est possible, et même fréquent en analyse, d'avoir plusieurs quantificateurs en cascade. On peut échanger deux quantificateurs identiques. Il est par exemple équivalent de dire :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}^+, x + y \geq 0, \quad \text{ou de manière condensée : } \forall x, y \in \mathbf{R}^+, x + y \geq 0.$$

En revanche,

- ▶ L'assertion « $\forall x > 0, \exists y > 0, y^2 = x$ » est vraie, elle signifie «tout réel positif admet une racine carrée».
- ▶ Alors que l'assertion « $\exists y > 0, \forall x > 0, y^2 = x$ » est fausse, elle signifie «il existe un nombre réel qui est la racine carrée de tous les nombres réels».

Attention Ne pas échanger l'ordre de deux quantificateurs différents

L'ordre dans lequel sont écrits les quantificateurs est **extrêmement** important. En particulier, un élément introduit par un symbole «il existe» ne peut dépendre que des éléments qui le précèdent.

Exemple 5 Écrire la dépendance en indice de chaque quantificateur par rapport aux autres.

- ▶ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon.$
- ▶ $\forall M > 0, \exists x \in \mathbf{R}, \sqrt{x+1} > M.$

Exemple 6 Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- ▶ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y = 0,$



- ▶ $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x + y = 0.$



1.3. Opérations logiques sur les propositions

Définition 5 | Négation, Ou, Et

Soient P et Q deux assertions. On définit alors les assertions suivantes.

- ▶ La *négation* de P, écrite «non P» ou bien « $\neg P$ », est l'assertion qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
- ▶ L'assertion P *ou* Q, écrite «P ou Q» ou bien « $P \vee Q$ » est l'assertion qui est vraie si P est vraie ou^a Q est vraie, *i.e.* si au moins une des deux propositions est vraie, et fausse si P et Q sont toutes les deux fausses.
- ▶ L'assertion P *et* Q, écrite «P et Q» ou bien « $P \wedge Q$ » est l'assertion qui est vraie si P est vraie et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

Remarque 3 Dans la pratique mathématique, nous n'utiliserons jamais les symboles \vee, \wedge . Ils le seront uniquement dans ce chapitre pour prouver des propriétés sur les symboles logiques, de manière plus concise.

Booléens

Les opérations «et» (**and**) «ou» (**or**) sur les booléens **True** et **False** existent déjà en Python, tout comme la négation (**not**). Voici quelques exemples.

^aou éventuellement les deux

```
>>> V_1 = 2**2 == 5
>>> V_2 = 3 <= 4
>>> V_1 and V_2
False
>>> V_1 or V_2
True
>>> not V_1
True
```



Méthode Prouver une Négation, Ou, Et

- ▶ Une proposition est vraie si et seulement si sa négation est fausse.
- ▶ Pour prouver que la proposition $P \vee Q$ est vraie, on prouve qu'au moins une des deux propositions est vraie.
- ▶ Pour prouver que la proposition $P \wedge Q$ est vraie, on prouve que les deux propositions sont vraies.

Exemple 7

- ▶ $\neg(3 \geq 4)$ est
 vraie puisque $3 < 4$ est vraie,
- ▶ $(3 \leq 4) \vee (2^2 = 5)$ est vraie, alors que $(2 - 1 \geq 0) \wedge (2^2 = 5)$ est fausse.
- ▶ Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^3 - x > 0$. Vérifier que la proposition « $x > -1$ ou $x < 0$ » est vraie.

- ▶ Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^3 - 3x \leq 0$. Vérifier que la proposition « $x \geq 0$ et $x \leq 3$ » est fausse.



Exemple 8

- ▶ On lance deux dés à six faces. On note P : «le résultat du premier lancer est un nombre pair» et Q : «le résultat du second lancer est un nombre pair». La proposition $P \vee Q$ est

«on obtient au moins un résultat pair».

- ▶ Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On pioche deux boules de l'urne. On note P : «le numéro de la première boule est impair» et Q : «le numéro de la seconde boule est impair». Alors la proposition $P \wedge Q$ est

«le produit des numéros des deux boules piochées est impair».

Remarque 4 Vous noterez que le «ou» mathématique est *inclusif*, ce qui n'est pas toujours le cas dans la langue française. Par exemple dans «Fromage ou Dessert» le «ou» est exclusif, vous ne pouvez pas prendre les deux.

REPRÉSENTATION PAR TABLES DE VÉRITÉ. On peut utiliser des tables de vérité pour résumer la Définition 5 précédente. Cela revient à indiquer dans chaque cellule du tableau le résultat des opérations précédentes en fonction de la véracité ou non des propositions données en entrée.

P	V	F
$\neg P$	F	V

P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

Les tables de vérité permettent de démontrer efficacement des règles opératoires sur les propositions logiques. Une table de vérité peut aussi permettre de simplifier une assertion d'apparence compliquée.

Exemple 9 En construisant une table de vérité, montrer que les assertions $\neg(\neg Q \vee P)$ et $Q \wedge \neg P$ sont équivalentes.



NÉGATION D'UNE PROPOSITION AVEC QUANTIFICATEURS. Nous utiliserons la proposition ci-après.

Proposition 1 | Nier une proposition avec quantificateurs

- ▶ La négation de «Pour tout x de E , $P(x)$ est vraie» est «Il existe $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est fausse» :

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg(P(x)).$$

- ▶ La négation de «Il existe x de E , $P(x)$ est vraie» est «Pour tout $x \in E$, $P(x)$ est fausse» :

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$



Méthode Nier une assertion avec des quantifieurs

Comment nier une assertion écrite à l'aide de quantifieurs? On garde l'ordre des quantifieurs, on transforme tous les « \exists » en « \forall » et tous les « \forall » en « \exists » puis on nie les expressions mathématiques subséquentes.

Exemple 10 Nier les assertions suivantes.

- ▶ «Tous les professeurs de IBC1 sont gentils».
- ▶ «Il existe un professeur de IBC1 méchant»
- ▶ Dans une urne contenant des boules rouges et noires, on pioche au hasard 3 boules. «On pioche 3 boules rouges», «On ne pioche aucune boule rouge».



Exemple 11 Soit I un intervalle de \mathbf{R} non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

- ▶ $\forall x \in I, f(x) \neq 0,$
- ▶ $\exists x \in I, f(x) = 0$
- ▶ $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in I, f(x) = y$

- ▶ $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$
- ▶ $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
- ▶ $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$

PROPRIÉTÉS SUR LES ASSERTIONS LOGIQUES. Comment ces opérations logiques se comportent-elles entre elles? C'est ce que précise la prochaine proposition.

Proposition 2 | Négation d'ou / et

Soient P et Q deux assertions.

- ▶ **(Principe de non-contradiction)** $P \wedge (\neg P)$ est fausse. Toute proposition de cette forme est appelée une *contradiction*.^a
- ▶ **(Principe du tiers exclu)** $P \vee (\neg P)$ est vraie.
- ▶ **(Double négation)** $\neg(\neg P) \iff P,$
- ▶ **(Négation d'une conjonction)** $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q),$
- ▶ **(Négation d'une disjonction)** $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q).$

Proposition 3 | Lois de MORGAN

Soient P et Q deux assertions.

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q), \quad \neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Proposition 4 | Propriétés de ou / et

Soit P, Q et R trois assertions. Alors :

- ▶ **(Commutativité)** $P \vee Q \iff Q \vee P, \quad P \wedge Q \iff Q \wedge P.$
- ▶ **(Associativité)**

$$(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R), \quad (P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R).$$

- ▶ **(Distributivité)**

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R), \quad P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Preuve Construire les tables de vérité associées.

^aProvient directement de ce qu'une proposition logique ne peut être vraie et fausse à la fois.

Remarque 5 (Retenir la distributivité : analogie) Imaginez que le symbole \vee est un $+$, et le symbole \wedge un \times . La seconde formule de distributivité se réécrit alors :

$$P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R).$$

1.4. Implication, Contraposée

Que signifie en Mathématiques la notion d'implication? Par exemple, soit x un réel. Si x est supérieur ou égal à 2, alors x est différent de 1, ce que vous notiez peut-être déjà au lycée :

$$x \geq 2 \implies x \neq 1.$$

Cela nous donne une nouvelle proposition logique (une implication est soit vraie, soit fausse) formée ici à partir de « $x \geq 2$ » et « $x \neq 1$ ». Mais comment définir $P \implies Q$ de manière abstraite si P, Q sont deux propositions logiques? Il faut comprendre que la négation de l'implication $P \implies Q$ sera fausse si P est vraie et Q est fausse. Ce qui se note avec nos symboles logiques de la manière suivante :

$$\neg(P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q, \text{ donc en prenant la négation : } (P \implies Q) \iff (\neg P \vee Q).$$

On a notre définition de l'implication.

Définition 6 | Implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition « P implique Q », notée $P \implies Q$, comme étant :

$$(\neg P) \vee Q.$$

Autrement dit, $P \implies Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse. On dit aussi «si P est vraie, alors Q est vraie». De plus, lorsque $P \implies Q$,

- ▶ on dit que Q est une condition *nécessaire* pour que P soit vraie,
- ▶ et on dit que P est une condition *suffisante* pour que Q soit vraie.

Attention

- ▶ Affirmer que l'implication : $P \implies Q$ est vraie n'implique ni que P est vraie, ni que Q est vraie. Il est parfaitement vrai que : «Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées», et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- ▶ Une implication : $P \implies Q$ peut être vraie alors que P et Q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent. Par exemple, il est vrai que : «Si $0 = 0$, alors les oiseaux ont des plumes». ¹

P	Q	$\neg P$	$P \implies Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On peut aussi écrire la table de vérité de $P \implies Q$.

La lecture de la table nous mène tout droit à la proposition suivante, qui est évidemment très intuitive.

Proposition 5

Soient P et Q deux assertions.

Si $\begin{cases} \text{(i)} & P \text{ est vraie} \\ \text{(ii)} & P \implies Q \text{ est vraie} \end{cases}$ alors : Q est vraie.

Exemple 12 Expliquer les valeurs logiques ci-après.

- ▶ L'assertion «SOCRATE est un homme \implies SOCRATE est mortel» est vraie. 
- ▶ L'assertion «SOCRATE est une table basse \implies SOCRATE est mortel» est vraie. 

¹Mais bien entendu en Mathématiques, nous nous intéresserons le plus souvent à des assertions P, Q liées entre elles.

- ▶ L'assertion « SOCRATE est une table basse \implies SOCRATE est une chaise » est vraie.



- ▶ L'assertion « SOCRATE est grec \implies SOCRATE est une chaise » est fausse.



Exemple 13

- ▶ Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors « $x > 1 \implies x^2 > 1$ » est vraie.



- ▶ La proposition « $3 > 5 \implies 1 + 1 = 8$ » est vraie.



Puisque la notation est bien choisie, on a la proposition ci-après.

Proposition 6 | Double implication

Soient P et Q deux assertions. Alors $(P \iff Q)$ est équivalente à :

$$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P).$$

On dit aussi « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie ».

Preuve Il suffit de construire la table de vérité associée à $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On retrouve bien que $P \iff Q$ est vraie uniquement lorsque P, Q ont même valeur de vérité, c'était bien notre définition de l'équivalence en début de chapitre.



Méthode Prouver une équivalence de propositions

Soient P, Q deux assertions logiques. Alors pour prouver $P \iff Q$, on montre :

$$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P).$$

Remarque 6 Une implication et sa réciproque ne sont pas équivalentes. Lorsqu'une implication est vraie et que sa réciproque est vraie alors les propositions sont équivalentes : c'est la base du raisonnement par « double implication ».

Proposition 7 | Négation d'une implication

Soit P une assertion. Alors :

$$\neg(P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q.$$

Preuve C'est une conséquence directe de la définition :

$$\neg(P \implies Q) \iff \neg(\neg P \vee Q) \iff P \wedge \neg Q.$$

Exemple 14

- ▶ Écrire la négation de la phrase « Si je gagne au loto, je change de voiture »

« J'ai gagné au loto et je n'ai pas changé de voiture »

- ▶ « $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbf{R}, |x - 1| < \alpha \implies |\sqrt{x} - 1| < \epsilon$ ».



Exemple 15 Soit I un intervalle de \mathbf{R} non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

1. $\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
 $\exists (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \text{ et } f(x) > f(y).$
2. $\forall (x, y) \in I^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$
 $\exists (x, y) \in I^2, \quad f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y.$
3. $\forall x \in I, \quad f(x) > 0 \implies x \leq 0$
 $\exists x \in I, \quad f(x) > 0 \text{ et } x > 0.$

CONTRAPOSÉE ET CHÂÎNES D'IMPLICATIONS.

Définition/Proposition 1 | Contraposée & Réciproque d'une implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition :

- ▶ *contraposée* de $P \implies Q$ comme étant $(\neg Q) \implies (\neg P)$. Elle est équivalente à l'implication :

$$(P \implies Q) \iff ((\neg Q) \implies (\neg P)).$$

- ▶ On définit la *réciproque* de $P \implies Q$ comme étant :

$$Q \implies P.$$



Méthode Prouver une implication de propositions

Pour montrer que $P \implies Q$ est vraie, on peut :

1. supposer que P est vraie et montrer que (nécessairement) Q est vraie aussi,
2. ou montrer la contraposée, c'est-à-dire que si Q est fausse, alors P est fausse.

Preuve (*pour la contraposée*) Construire les tables de vérité ou utiliser la définition de l'implication.

Exemple 16 Soit n un entier relatif. Démontrer par contraposition que si n^2 est impair alors n est impair.



Proposition 8 | Transitivité de l'implication

Soient P, Q, R trois assertions. Alors

$$\text{Si } \begin{cases} \text{(i)} & P \implies Q \text{ est vraie} \\ \text{(ii)} & Q \implies R \text{ est vraie} \end{cases} \text{ alors : } P \implies R \text{ est vraie.}$$

Exemple 17 Soit $x \in \mathbf{R}$. Si on note P « $x = 0$ », Q « x est pair», R « x est un entier relatif». Alors $P \implies Q, Q \implies R$ et donc $P \implies R$.^a

Corollaire 1 | Cycles d'implications

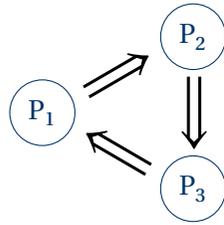
Soient P_1, P_2, P_3 trois assertions. Alors $(P_1 \iff P_2 \iff P_3)$ est équivalente à :

$$(P_1 \implies P_2) \wedge (P_2 \implies P_3) \wedge (P_3 \implies P_1).$$

Remarque 7 Ce corollaire se généralise sans difficulté à n propositions. Pour un exemple, consulter par exemple l'**Exemple 23**.

Preuve Montrons que $P_1 \iff P_2$. On a déjà $P_1 \implies P_2$, de plus $P_2 \implies P_3$ et $P_3 \implies P_1$ implique par transitivité $P_2 \implies P_1$, on a donc prouvé $P_1 \iff P_2$ par double implication. On procède de-même pour $P_2 \iff P_3$.

^aBien sûr, nullement besoin de transitivité pour prouver cela...



2. BASES SUR LES ENSEMBLES

La notion d'ensemble est difficile à définir proprement, on s'appuiera plutôt sur l'intuition que l'on a de cette notion, en le qualifiant vaguement de «collection d'éléments».

2.1. Généralités

Définition 7

- ▶ Un *ensemble* E est une collection d'éléments x qui sont dits *appartenir* à l'ensemble E , ce que l'on note $x \in E$. On note les éléments de cette collection entre accolades.
- ▶ Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, on l'appelle l'*ensemble vide* et on le note \emptyset .
- ▶ Un ensemble ne possédant qu'un seul élément est appelé un *singleton*.

Notation

Lorsqu'un élément x n'est pas dans E , on note $x \notin E$.

MODES DE DÉFINITION D'UN ENSEMBLE. On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments, ou en *compréhension*, c'est-à-dire en donnant une propriété caractérisant de manière unique les éléments de E . Par exemple,

l'ensemble ci-après est donné par extension et compréhension :

$$E = \{1, 2, 3, 4\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 1, n < 5\} \underset{\text{(nota.)}}{=} \llbracket 1, 4 \rrbracket.$$

En résumé on a les deux modes suivants :

- ▶ **(Extension)** $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- ▶ **(Compréhension)** $E = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{condition sur } x\}$.

Analogie pythonique

Ces deux modes de définition se retrouvent en Python pour construire une liste. Par exemple, avec l'ensemble E *supra*.

```
>>> E = [1, 2, 3, 4] # mode par extension
>>> E = [i for i in range(1, 10**3) if i >= 1 and i < 5] # mode par
↳ compréhension, 10**3 est ici arbitraire
```

On rappelle également à toutes fins utiles la notation ci-après.

Notation Intervalle d'entiers

Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ deux entiers. On notera

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbf{Z} \mid a \leq n \leq b\} = [a, b] \cap \mathbf{Z}.$$

Quand on définit un ensemble en compréhension il faut toujours le situer comme sous-ensemble d'un ensemble plus grand : on n'écrit pas² $\{x \mid \cos(x) \geq 0\}$ mais $\{x \in \mathbf{R} \mid \cos(x) \geq 0\}$.

Définition 8 | Inclusion, Égalité, Inclusion stricte

Soient F et E deux ensembles.

- ▶ On dit que F est un *sous-ensemble* de E ou que F est *inclus dans* E si tout élément de F est un élément de E , c'est-à-dire :

$$\forall x \in F, \quad x \in E.$$

On note cela $F \subset E$.

²Ou plutôt on évitera de l'écrire

- ▶ Les ensembles E et F sont dits égaux si :

$$E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Autrement dit, E et F ont exactement les mêmes éléments, c'est-à-dire :

$$x \in E \iff x \in F.$$

On note cela $E = F$.

- ▶ On dit que F est un *sous-ensemble strict* de E ou que F est *strictement inclus* dans E si :

$$F \subset E \text{ et } F \neq E,$$

autrement dit :

$$F \subset E, \quad \exists x \in E, x \notin F.$$

On note cela $F \subsetneq E$.

Exemple 18 Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2\}$. Alors $F \subset E$ et on a aussi $F \subsetneq E$.

Exemple 19 Écrire un symbole entre les ensembles ci-après.

- | | |
|--------------------------------|---|
| ▶ $\{1, 2, 3, 4\}$, | ▶ $\{1\} \{1, 2, 3, 4\}$, |
| ▶ $\emptyset \{1, 2, 3, 4\}$, | ▶ $\{1\} \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$. |

Attention  Appartenance \neq Inclusion! Un **élément** appartient à un ensemble, et une **partie** est incluse dans un ensemble.

Définition 9 | Ensemble des parties

Soit E un ensemble. On peut définir l'*ensemble des parties* de E, noté $\mathcal{P}(E)$, comme étant l'ensemble des sous-ensembles A de E.

On a donc

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Remarque 8 Remarquons que l'on a toujours

$$E \in \mathcal{P}(E), \text{ et } \emptyset \in \mathcal{P}(E).$$

Exemple 20 Soit $E = \llbracket 1, 3 \rrbracket$, alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

2.2. Opérations sur les ensembles

Définition 10 | Réunion & Intersection

Soit E un ensemble, soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. On définit :

- ▶ l'*union* de A et de B, notée $A \cup B$ (et lue «A union B») par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

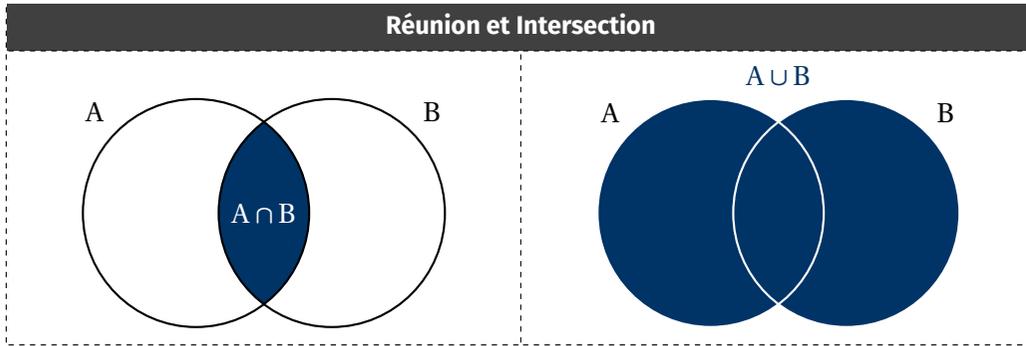
et on a : $x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$.^a

- ▶ l'*intersection* de A et de B, notée $A \cap B$ (et lue «A inter B») par :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\},$$

et on a : $x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$.

^aOn rappelle ici que par défaut, en Mathématiques, le «ou» n'est pas exclusif. Ainsi, un élément peut appartenir aux deux ensembles A et B.



Exemple 21 Si $E = \llbracket 1, 5 \rrbracket$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Alors :

$$A \cap B = \{2, 3\} \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \quad \bar{A} = \{4, 5\},$$

$$\bar{B} = \{1, 5\} \quad A \setminus B = \{1\} \quad B \setminus A = \{4\}.$$

Définition 11 | Parties disjointes & Réunion disjointe

Soit E un ensemble, soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. Alors :

- ▶ si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si A et B n'ont pas d'éléments en commun, on dit alors que A et B sont *disjointes*.
- ▶ La réunion $A \cup B$ est alors qualifiée de *réunion disjointe*, on la note $A \uplus B$.

Exemple 22 La réunion précédente $A \cup B$ n'est pas disjointe car $2, 3 \in A \cap B$. Cependant si l'on considère $C = \{4\}$, la réunion $A \uplus C$ l'est.

RÈGLES OPÉRATEURES SUR L'INTERSECTION ET LA RÉUNION. Il existe un grand nombre de règles sur les symboles d'union et d'intersection. Nous en citons quelques unes, qui se constatent facilement sur un dessin au besoin, la plupart d'entre elles seront admises mais les preuves ne présentent aucune difficulté.

Proposition 9 | Règles opératoires

Soit E un ensemble, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors :

- ▶ $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,$
- ▶ $A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B.$
- ▶ **(Commutativité)** $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A,$

- ▶ **(Associativité)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
- ▶ **(Distributivité)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Remarque 9 (Retenir la distributivité : analogie) Là encore, la distributivité est très proche de celle déjà connue. Imaginez que le symbole \cup est un $+$, et le symbole \cap un \times . La première formule de distributivité se réécrit alors :

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C).$$

Exemple 23 Soient A et B deux ensembles, on a alors :

(i) $A \subset B \iff$ **(ii)** $A \cup B = B \iff$ **(iii)** $A \cap B = A.$

▶ **(i) \implies (ii)** Supposons d'abord que $A \subset B$.

✍ On sait que $B \subset A \cup B$. De plus, si $x \in A \cup B$ alors x appartient soit à A , soit à B , et, comme $A \subset B$, si $x \in A$ alors $x \in B$. Ainsi $A \cup B \subset B$. D'où $A \cup B = B$. De même on a $A \cap B \subset A$. De plus, si $x \in A$ alors, comme $A \subset B$, $x \in B$, $x \in A \cap B$. Ainsi $A \subset A \cap B$. D'où $A \cap B = A$. On a donc montré les implications suivantes :

$$A \subset B \implies A \cup B = B \quad \text{et} \quad A \subset B \implies A \cap B = A.$$

▶ **(ii) \implies (iii)** Supposons maintenant que $A \cup B = B$.

✍ Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$, d'où $x \in B$. Ainsi tout élément de A est un élément de B , c'est-à-dire $A \subset B$. On a donc montré l'implication

$$A \cup B = B \implies A \subset B.$$

▶ **(iii) \implies (i)** Supposons que $A \cap B = A$.

✍ Soit $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. D'où $x \in B$. Ainsi $A \subset B$. On a donc montré l'implication

$$A \cap B = A \implies A \subset B.$$

Enfinement on a bien prouvé les équivalences annoncées.

COMPLÉMENTAIRE ET DIFFÉRENCE. On introduit deux dernières opérations sur les ensembles.

Définition 12 | Complémentaire & Différence

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit :

- ▶ le *complémentaire de A dans E* ou simplement le *complémentaire de A* si le contexte est clair, noté \bar{A} , ou parfois $\mathcal{C}_E A$, par :

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- ▶ L'ensemble B *privé de A*, noté $B \setminus A$, est défini par :

$$B \setminus A = B \cap \bar{A}.$$

C'est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A .

Exemple 24

- ▶ Soient $E = \llbracket 1, 5 \rrbracket$, $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$. Calculer $\mathcal{C}_E C$ et $\mathcal{C}_A C$. Que remarque-t-on?



$$\mathcal{C}_E C = \{3, 4, 5\} \neq \mathcal{C}_A C = \{3\}.$$

- ▶ Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs est l'ensemble des entiers impairs.

Attention

On portera une grande attention au fait que \bar{A} dépend du sur-ensemble E , ce qui n'est pas apparent dans la notation. Quand le contexte n'est pas absolument clair, il faudra préciser dans quel ensemble on considère le complémentaire. La notation $\mathcal{C}_E A$ a le mérite de mentionner cette dépendance. Regarder par exemple l'exemple précédent.

Proposition 10

Soit E un ensemble. Alors :

$$\bar{\bar{E}} = \emptyset, \quad \bar{\emptyset} = E, \quad \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \bar{\bar{A}} = A.$$

Théorème 1 | Lois de MORGAN

Soit E un ensemble et soit A et B deux sous-ensembles de E . Alors

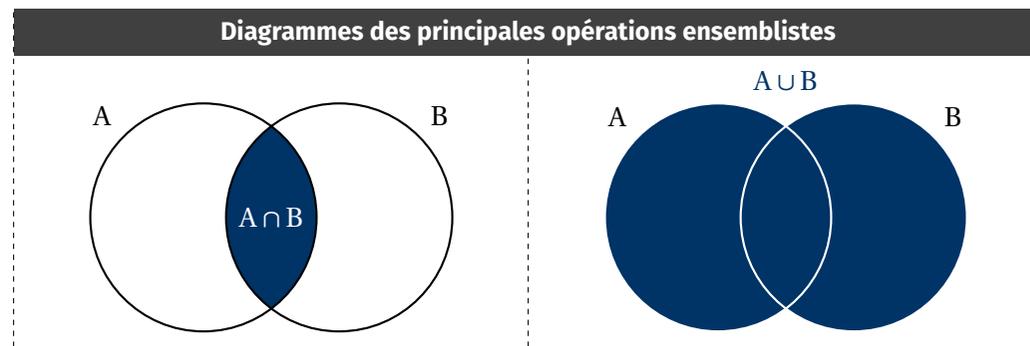
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

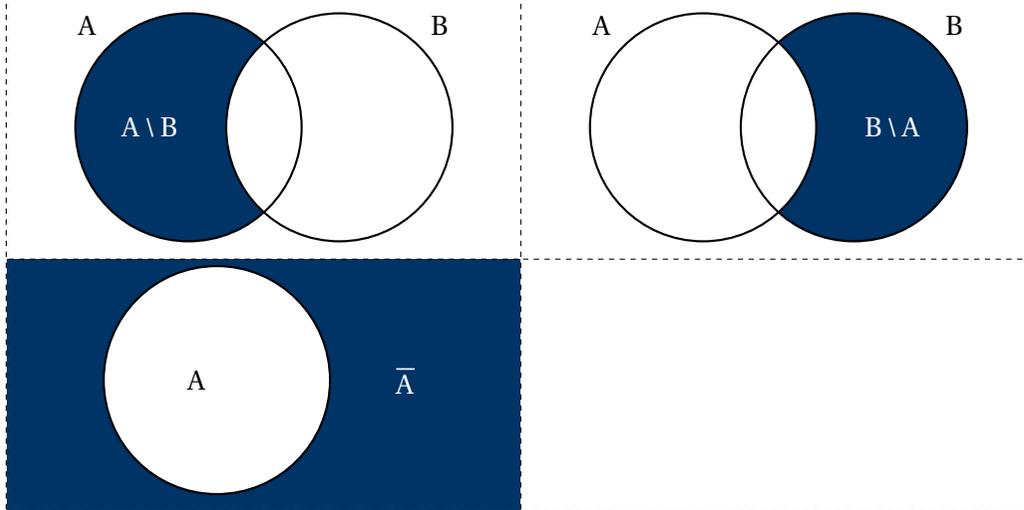
Preuve Montrons uniquement la formule pour $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, c'est-à-dire montrons que :

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$



On peut résumer à présent sur des diagrammes, dits de VENN ou de manière moins pompeuse sur des «patates», les différentes notions d'ensembles rencontrées.





2.3. Produit cartésien

Vous connaissez depuis le collège des produits cartésiens, mais vous n'avez jamais employé le mot. Par exemple, les vecteurs de la géométrie euclidienne peuvent être repérés par un couple abscisse/ordonnée noté (x, y) avec x, y deux réels. L'ensemble de ces couples forme l'ensemble des points du plan, et est noté $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ou encore \mathbf{R}^2 . Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 13 | Produit cartésien

Soient E_1, \dots, E_n une collection de n ensembles. Alors on appelle *produit cartésien* de E_1, \dots, E_n l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Plus particulièrement :

- ▶ Si $E_1 = \dots = E_n = E$, on note $E_1 \times \dots \times E_n = E^n$.
- ▶ Si $E_1 = \dots = E_n = E$ et $n = 2$ (resp. $n = 3$) : les éléments de E^2 (resp. E^3) sont appelés les *couples d'éléments* de E (resp. les *triplets d'éléments* de E).

Pour le moment nous allons assez peu utiliser cet objet à des fins mathématiques, mais plutôt pour introduire efficacement des variables comme le précise la remarque qui suit.

Remarque 10 (Se servir du produit cartésien pour quantifier des variables) Pour deux ensembles, la notion de produit cartésien possède une intuition géométrique, comme nous l'avons précisé en introduction. La notion de produit cartésien sert souvent aussi à quantifier efficacement des variables. Ainsi, si E, F sont deux ensembles.

$$\text{écrire «soient } x \in E, y \in F\text{»} = \text{«soit } (x, y) \in E \times F\text{»}$$

Si $E = F$, un abus de notation courant est «soit $x, y \in E$ ».^a

Exemple 25

1. Écrire le produit $\{1, 2, 3\} \times \{0, 1\}$.



2. Dessiner l'ensemble $[0, 1] \times [2, 3[$.



^aEn lieu et place de «soit $(x, y) \in E^2$ »

3. RAISONNEMENTS

3.1. Sur l'existence/unicité de propositions

 **Cadre**
 Dans toute cette sous-section, on considère un prédicat $\mathcal{P}(x)$, x appartenant à un ensemble E .

 **Méthode Montrer/Nier** « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ »

- ▶ **(Montrer)** Il s'agit de trouver un exemple de $x \in E$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}(x)$.
- ▶ **(Nier)** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que **pour tout** $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

 **Exemple 26** Montrer que : $\exists x \in [0, 3], x^2 - 3x + 2 < 0$.

Remarque 11 Parfois, on pourra faire appel à un théorème qui prouvera l'existence d'un x vérifiant $\mathcal{P}(x)$ sans pour autant donner d'expression de x (par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'un nombre x tel que $f(x) = 0$ si f est une fonction).

 **Méthode Montrer/Nier** « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ »

- ▶ **(Montrer)**
 1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. La rédaction type est donc : «*Soit x un élément de E , montrons $\mathcal{P}(x)$* ».
 2. On démontre que $\mathcal{P}(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent *toutes* par «*Donc*» ou «*Or*» (ou des connecteurs logiques).
 - Une phrase qui commence par «*Donc*» signifie qu'on fait une déduction.



- Une phrase qui commence par «*Or*» signifie qu'on rappelle :
 - soit une hypothèse de l'énoncé,
 - soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.

3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : «*En conclusion, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.*».

- ▶ **(Nier)** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer qu'**il existe** $x \in E$, telle que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse.

 **Exemple 27** Montrer que : $\forall x \geq 1, x^2 \geq x$.



Méthode Montrer/Nier « $\exists ! x \in E, \mathcal{P}(x)$ »

- ▶ **(Montrer)**
 1. EXISTENCE On montre l'existence d'un x vérifiant la propriété comme précédemment.
 2. UNICITÉ
 - Soit on montre que la manière dont on a construit l'élément x vérifiant $\mathcal{P}(x)$ permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre choix.
 - Soit on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $\mathcal{P}(x_1)$ et $\mathcal{P}(x_2)$ sont vraies, et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par «*Donc*» ou «*Or*». La rédaction type est donc : «*Soient x_1, x_2 deux éléments de E , montrons que $x_1 = x_2$* ».
- ▶ **(Nier)** Soit on justifie que l'existence est en défaut (voir les méthodes précédentes), soit que l'unicité est en défaut : auquel cas, on se cherche $x_1, \neq x_2 \in E$ de sorte que $\mathcal{P}(x_1), \mathcal{P}(x_2)$ soient vraies.

Remarque 12 L'existence et l'unicité peuvent aussi être démontrés d'un coup. Par exemple, en invoquant le théorème de la bijection pour les fonctions (voir cours de Terminale), on arrive à justifier l'existence et l'unicité de solutions à une équation.

Les exemples de ce type de preuve seront nombreux en fin d'année (notamment en Algèbre linéaire).

3.2. Sur les ensembles

 **Cadre**
 Dans toute cette sous-section, on considère deux ensembles A, B inclus dans un ensemble E .

Méthode Montrer/Nier « $A \subset B$ »

- ▶ **(Montrer)** Pour montrer que $A \subset B$, on se fixe $a \in A$ quelconque et on montre que $a \in B$. Autrement dit, on montre que tout élément de A est élément de B . La rédaction type est donc «Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$ ».
- ▶ **(Nier)** Il s'agit de montrer qu' il existe $a \in A$, tel que $a \notin B$.

Méthode Montrer/Nier « $A = B$ »

- ▶ **(Montrer)** On a deux possibilités.
 - **(Par double inclusion)** On montre souvent *via* deux étapes, avec une *double inclusion*, que $A \subset B$ et $B \subset A$.
 - **(Par équivalences)** On montre parfois l'équivalence ci-après :

$$x \in A \iff x \in B.$$

- ▶ **(Nier)** Il s'agit de montrer $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$ (voir la méthode précédente).

Exemple 28 Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y = 0, z = 0\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0, x - y + 3z = 0\}$. Montrer que : $A = B$.



Exemple 29 On note $A = \{x \in \mathbf{R} \mapsto \lambda x \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ l'ensemble des fonctions linéaires, et B l'ensemble des fonctions définies sur \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{R} . Montrer

que $A \subsetneq B$.



3.3. Démonstration par disjonction de cas

Méthode Disjonction de cas

On sépare la démonstration d'une propriété en sous-cas, chacun de ces sous-cas (qui doivent, bien sûr, recouvrir l'ensemble des possibilités) permettant d'exploiter des informations supplémentaires débloquant le raisonnement.

Exemple 30 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.



Exemple 31 Montrer que : $\forall a, b \in \mathbf{R}, \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$.



Exemple 32 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. Qu'en déduit-on ?



3.4. Sur les liens logiques entre propositions

Cadre Dans toute cette sous-section, on considère deux propositions logiques P, Q .

3.4.1. Implication

Rappel 1 Rappelons que nous avons montré que $P \implies Q$ est équivalente à $\neg Q \implies \neg P$. Nous avons appelé cette implication l'« implication contraposée ».

Méthode Démontrer par contraposée Pour montrer $P \implies Q$, on peut aussi montrer $\neg Q \implies \neg P$. La rédaction type est donc « Supposons Q fausse, montrons que P est fausse ».

On rappelle que pour $x \in \mathbf{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$ Par exemple, $|2| = 2$ et $|-3| = 3$ (car $-3 < 0$ et $-(-3) = 3$). Par ailleurs, étant donnés a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand élément entre a et b . Par exemple : $\max(1, 3) = 3$.

Une autre rédaction du raisonnement par contraposition (où la propriété P n'est pas explicitée au départ) est le raisonnement *par l'absurde*.

Méthode Démontrer par l'absurde On veut montrer une proposition Q . On suppose que Q est fausse, et on montre que cela implique une proposition qui est fausse (ou « absurde »), notée P' . Cela prouve que Q était vraie.

En effet, si on montre $\neg Q \implies P'$ alors par contraposition $\neg P' \implies Q$. Puisque $P = \neg P'$ est vraie et que $P \implies Q$, cela prouve bien que Q est vraie.

Exemple 33 Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$.



Méthode Montrer/Nier « $P \Rightarrow Q$ »

- ▶ **(Montrer)**
 - **(1ère méthode)** Par preuve directe,
 - **(2ème méthode)** ou par l'absurde ou contraposée.
- ▶ **(Nier)** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que P est vraie alors que Q est fausse.

Exemple 34 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.



Méthode Montrer/Nier « $P \Leftrightarrow Q$ »

- ▶ **(Montrer)**
 - **(1ère méthode)** par double implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$,
 - **(2ème méthode)** ou par équivalences successives $P \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$.
- ▶ **(Nier)** Il s'agit de montrer que l'une des deux implications est fausse.

Exemple 35 Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que : $(4x(x-1) = -1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.



Exemple 36 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Démontrer que :

f est paire et impaire $\Leftrightarrow f$ est la fonction nulle.



Considérons P_1, P_2, P_3 trois propositions logiques.

Méthode Montrer $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3$

Il faut et il suffit de montrer :

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_1.$$

3.5. Par récurrence

Il en existe différents types, l'objectif étant de démontrer des prédicats dépendant d'un entier n , naturel ou même relatif. Les raisonnements par récurrence seront prin-

ciatement fondés sur la propriété de transitivité de l'implication \implies .

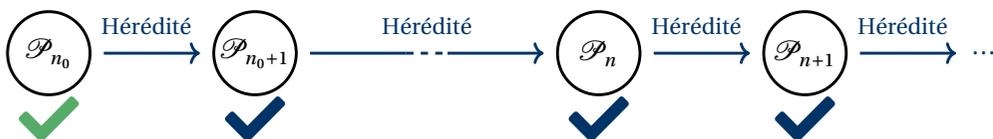
Attention On ne fait **jamais** de récurrence pour prouver une propriété qui dépend d'un nombre réel.

Théorème 2 | Principe de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. Supposons que :

- ▶ **(Initialisation)** $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- ▶ **(Hérédité)** $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geq n_0$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



Initialisation

Remarque 13

- ▶ Le principe de récurrence peut être vu comme le jeu qui consiste à faire tomber des dominos en cascade : pour que cela fonctionne, il faut s'assurer que chaque domino soit placé de sorte qu'il entraîne le suivant dans sa chute, c'est l'hérédité, et il faut aussi faire tomber le premier domino, c'est l'initialisation.
- ▶ Le raisonnement par récurrence est adapté à tous les objets mathématiques définis par récurrence (suites récurrentes par exemple). Le plus souvent, on vérifiera l'initialisation au rang $n_0 = 0$.

Exemple 37 (Terme général de suite récurrente à 1 pas) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par récurrence par

$$u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 1 - 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Initialisation.



Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



Par principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 1$.

Exemple 38 (Divisibilité) Montrons que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $13^n - 4^n$ est un multiple de 9, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{P}(n) : \ll \exists k_n \in \mathbf{Z}, \quad 13^n - 4^n = 9k_n \gg \text{ est vraie.}$$

Initialisation. $13^0 - 4^0 = 0 = 0 \times 9$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie en choisissant $k_0 = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $13^n - 4^n = 9k_n$ pour un certain $k_n \in \mathbf{Z}$, et on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $k_{n+1} \in \mathbf{Z}$ tel que : $13^{n+1} - 4^{n+1} = 9k_{n+1}$. Or,

$$\begin{aligned} 13^{n+1} - 4^{n+1} &= (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= 9 \times 13^n + 4 \times (13^n - 4^n) \\ &= 9 \times 13^n + 4 \times 9k_n \\ &= 9(13^n + 4k_n). \end{aligned}$$

} *hypothèse de récurrence*

$:= k_{n+1}$

Il est clair que 9×13^n est un multiple de 9 et, par hypothèse $13^n - 4^n$ est un multiple de 9. Ainsi $13^{n+1} - 4^{n+1}$ est bien un multiple de 9.

On a donc montré que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n + 1)$.

Par récurrence on a ainsi montré que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $13^n - 4^n$ est un multiple de 9.



Méthode Rédaction d'une récurrence simple

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbf{N}$.

1. Initialisation : montrer $\mathcal{P}(n_0)$.
2. Hérédité : « Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n + 1)$. »
[...] « Alors : par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. »



Attention à la rédaction d'une récurrence

- ▶ Dans l'hérédité, on n'écrit **surtout pas** « Supposons que pour tout n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie » — sinon la récurrence est terminée, c'est justement ce que l'on veut montrer.
- ▶ Une erreur moins grave à présent, mais c'est incorrect : « Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$. » Le problème est que la bonne traduction de « pour un certain $n \in \mathbf{N}$ » est « $\exists n$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie », ce qui ne correspond pas au principe de récurrence.

Théorème 3 | Principe de récurrence double

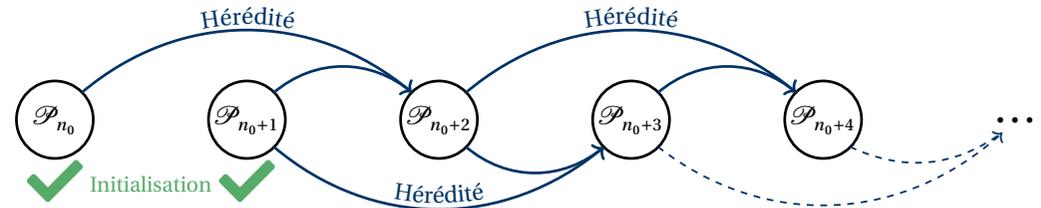
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. Supposons que :

- ▶ **(Initialisation double)** $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies,
- ▶ **(Hérédité)** $\forall n \geq n_0 + 1, \mathcal{P}(n - 1) \wedge \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$.

Alors : pour tout entier $n \geq n_0$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque 14

- ▶ Dans cette seconde version de la récurrence, on « gagne » finalement dans l'hérédité (on peut supposer en hypothèses deux propriétés) mais on y « perd » dans l'initialisation puisqu'il faut montrer deux propriétés.
- ▶ On peut aussi très bien supposer dans l'hérédité $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n + 1)$ et montrer $\mathcal{P}(n + 2)$, à voir en fonction du contexte ce qui est le plus intuitif.



Exemple 39 (Terme général de suite récurrente à 2 pas) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Initialisation.

Les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont manifestement vraies par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ sont vraies et on va montrer qu'alors $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

On sait que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, or, par hypothèse de récurrence, $u_n = 1$ et $u_{n+1} = 1$, ainsi :

$$u_{n+2} = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

La propriété $\mathcal{P}(n + 2)$ est donc vraie.

Par principe de récurrence double, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$.

Remarque 15 Une récurrence double peut aussi être rédigée avec une récurrence simple sur $\mathbf{P}(n) \ll \mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n + 1) \gg$, mais cela paraît moins naturel. Voir l'exemple ci-après.

Exemple 40 (Récurrence doubles ↔ Récurrence simple) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

Récurrence double	Récurrence simple
<p>Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :</p> $\mathcal{P}_n : u_n = 3^n.$ <p>Initialisation. On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1}$ sont vérifiées.</p> <p>Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\boxed{\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}}$ sont vérifiées, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite :</p> $\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ &= (2 + 1) \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+2}. \end{aligned}$ <p>Ainsi \mathcal{P}_{n+2} est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.</p>	<p>Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :</p> $\mathbf{P}_n : u_n = 3^n, u_{n+1} = 3^{n+1}.$ <p>Initialisation. On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathbf{P}_0}$ est bien vérifiée.</p> <p>Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\boxed{\mathbf{P}_n}$ est vérifiée, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite :</p> $\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ &= (2 + 1) \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+2}. \end{aligned}$ <p>Ainsi \mathbf{P}_{n+1} est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.</p>

Exemple 41 Rédiger l'Exemple 39 précédent à l'aide d'une récurrence simple.



Théorème 4 | Principe de récurrence forte
 Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- ▶ **(Initialisation)** $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies.
- ▶ **(Hérédité)** $\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n + 1)$.

Alors : pour tout entier $n \geq n_0$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque 16 Finalement, on peut toujours utiliser une récurrence forte en lieu et place d'une double. Dans le cas d'une récurrence forte, on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang ambiant alors que dans le cas d'une récurrence double on la suppose vraie aux deux rangs précédents.

Exemple 42 (Suite définie par tous ses termes précédents) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation.



Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que les propriétés $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies et on va monter qu'alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.



Par principe de récurrence forte, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Dans tous ces exemples, nous avons introduit une notation pour les différentes propriétés. Avec un peu plus d'expérience, vous ne le ferez plus. Notez le point ci-après, qui est très important.

4. EXERCICES

4.1. Logique et quantificateurs

Exercice ALG1.1 | (Solution : 31) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq 0.$ | 2. $\exists y \in \mathbf{R}, y \geq 0.$ |
| 3. $\forall x \in \mathbf{R}^+, \exists y \in \mathbf{R}, x = y^2.$ | 4. $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^+, x = y^2.$ |
| 5. $\exists x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}, x = y^2.$ | 6. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0.$ |
| 7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0.$ | 8. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0.$ |

Exercice ALG1.2 | Propositions sur les suites (Solution : 31) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier :

- | | |
|--|--|
| 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante. | 2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante. |
| 3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est constante. | 4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée. |
| 5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est minorée par $m \in \mathbf{R}.$ | 6. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est minorée. |

Exercice ALG1.3 | Propositions sur les fonctions (Solution : 31) Soit (f, g) deux fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

- | | |
|--|---|
| 1. L'application f est croissante. | 2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0.$ |
| 3. La fonction f est paire. | 4. La fonction f ne s'annule jamais. |
| 5. La fonction f est inférieure à la fonction $g.$ | 6. La fonction f est périodique. |

Exercice ALG1.4 | (Solution : 31) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$.
2. $(x^2 = 1, x \in \mathbf{R}^+) \implies x = 1$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}, (x \neq x') \implies f(x) \neq f(x')$.

4.2. Ensembles

Exercice ALG1.5 | (Solution : 31) Montrer que

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 2x + y = 1\} = \{(x, 1 - 2x), x \in \mathbf{R}\}.$$

Représenter graphiquement cet ensemble.

Exercice ALG1.6 | (Solution : 32) On considère les sous-ensembles suivants de \mathbf{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}.$$

Montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

Exercice ALG1.7 | (Solution : 32) Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B.$$

Exercice ALG1.8 | (Solution : 32) Soit E un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cap B = A \cap C, A \cup B = A \cup C) \implies B = C.$$

Exercice ALG1.9 | (Solution : 32) Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C.$$

Exercice ALG1.10 | (Solution : 33) Soit $E = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

4.3. Raisonnements : implication, équivalence

Exercice ALG1.11 | (Solution : 33) On considère les deux propositions suivantes :

- ▶ A : « m et n sont deux entiers pairs », et
- ▶ B : « $m + n$ est un entier pair ».

A-t-on : $A \implies B$? $B \implies A$? $A \iff B$?

Exercice ALG1.12 | (Solution : 33) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0, y = 0.$$

Exercice ALG1.13 | (Solution : 33) Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice ALG1.14 | (Solution : 33) Soit $x \in \mathbf{R}^+$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon \implies x = 0.$$

Exercice ALG1.15 | (Solution : 33) On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, si n^2 est pair alors n pair. En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

4.4. Raisonnement par récurrence

Exercice ALG1.16 | (Solution : 34) Soit $a \in \mathbf{R}^+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice ALG1.17 | (Solution : 34) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$.

Exercice ALG1.18 | (Solution : 34) On définit une suite (u_n) par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Exercice ALG1.19 | (Solution : 35) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par ses termes impairs et pairs :

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, u_{2n} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}.$$

Conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, puis l'établir par récurrence.

4.5. Solutions des exercices

Solution (exercice ALG1.1)

(Énoncé 28) Étude de chaque assertion :

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x = -1$.
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, x < 0$.
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y = 1$.
Négation : $\forall y \in \mathbf{R}, y < 0$.
3. Vrai : soit $x \in \mathbf{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}, x \neq y^2$.
4. Faux : soit $y \in \mathbf{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y .
Négation : $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}^+, x \neq y^2$.
5. Faux : soit $x \in \mathbf{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.
Négation : $\forall x \in \mathbf{R}^+, \exists y \in \mathbf{R}, x \neq y^2$.
6. Faux : soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$ est faux. Il suffit pour cela de prendre y tel que $x + y \leq 0$ c'est-à-dire $y \leq -x$. Prenons par exemple $y = -x - 1$. On a alors $x + y = -1 \leq 0$. Donc on a bien un contre-exemple.
Négation : $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y \leq 0$.
7. Vrai : soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$, c'est-à-dire $y > -x$. Prenons par exemple $y = -x + 1$. On a bien alors $x + y = 1 > 0$.
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y \leq 0$.
8. Faux : on peut prendre comme contre-exemple $x = -1$ et $y = -2$. Alors $x + y = -3 < 0$.
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y \leq 0$.

Solution (exercice ALG1.2)

(Énoncé 28) Étude de chaque propriété :

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$
Négation : $\exists n \in \mathbf{N}, u_{n+1} < u_n$. | 2. $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} < u_n$
Négation : $\exists n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$. |
| 3. $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0$
Négation : $\exists n \in \mathbf{N}, u_n \neq u_0$ | 4. $\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$
Négation : $\forall M \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n > M$. |
| 5. $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m$
Négation : $\exists n \in \mathbf{N}, u_n < m$. | 6. $\exists m \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m$
Négation : $\forall m \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n < m$. |

Solution (exercice ALG1.3)

(Énoncé 28) Étude de chaque propriété :

- | | |
|--|---|
| 1. $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2 (a \leq b \implies f(a) \leq f(b))$
Négation : $\exists (a, b) \in \mathbf{R}^2, a \leq b$ et $f(a) > f(b)$. | 2. $\exists x \in \mathbf{R}^+, f(x) \geq 0$
Négation : $\forall x \in \mathbf{R}^+, f(x) < 0$. |
| 3. $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, f(-x) \neq f(x)$. | 4. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$. |
| 5. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq g(x)$
Négation : $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) > g(x)$. | 6. $\exists T \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x+T) = f(x)$
Négation : $\forall T \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x+T) \neq f(x)$. |

Solution (exercice ALG1.4)

(Énoncé 28)

1. L'inégalité $1 \leq x < y$ correspond à $1 \leq x$ et $x < y$. Or la négation de (A et B) est (non A) ou (non B). Ainsi ici on obtient : $x < 1$ ou $x \geq y$.
2. La négation de $P \implies Q$ est (P et (non Q)). Ainsi ici on obtient : $x^2 = 1, x \in \mathbf{R}^+$ et $x \neq 1$.
3. La négation est : $\exists x \in \mathbf{R}, \exists x' \in \mathbf{R} : x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

Solution (exercice ALG1.5)

(Énoncé 29) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Ainsi, par définition de \mathbf{Q} , il existe $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible. On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbf{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible. Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Solution (exercice ALG1.6)

(Énoncé 29)

- ▶ Montrons que $A \subset B$: soit $(x, y) \in A$, montrons que $(x, y) \in B$. Par définition de l'ensemble A , on sait que $y = x - 2$. Pour montrer que $(x, y) \in B$, vérifions que : $(3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0$. On a :

$$(3x + y + 2)(x + 2y + 4) = (3x + x - 2 + 2)(x + 2x - 4 + 4) = 4x \times 3x = 12x^2 \geq 0.$$

Ainsi on a bien que $(x, y) \in B$ et on vient de montrer que $\overline{A \subset B}$.

- ▶ On veut montrer que l'on n'a pas égalité. Il suffit de trouver un couple $(x, y) \in B$ tel que $(x, y) \notin A$. Par exemple $(1, 0)$ est bien dans l'ensemble B mais il n'est pas dans l'ensemble A .

Solution (exercice ALG1.7)

(Énoncé 29) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin C$. On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. On doit étudier deux cas :

- ▶ Si $x \in A$: on a alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Donc : $A \cap B \neq A \cap C$.
- ▶ Soit $x \notin A$: on a alors $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$. Donc : $A \cup B \neq A \cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Par contraposée, on a donc montré que : $\overline{(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C}$.

Solution (exercice ALG1.8)

(Énoncé 29) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin C$. On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. On doit étudier deux cas :

- ▶ Si $x \in A$: on a alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Donc : $A \cap B \neq A \cap C$.
- ▶ Soit $x \notin A$: on a alors $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$. Donc : $A \cup B \neq A \cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Par contraposée, on a donc montré que : $\overline{(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C}$.

Solution (exercice ALG1.9)

(Énoncé 29) On doit montrer une équivalence, on raisonne donc par double implication.

- ▶ On commence par exemple par supposer que $B \subset A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$. Comme $B \subset A$, on a : $A \cup B = A$ (faire un dessin pour le voir). De même, comme $A \subset C$, on a : $A \cap C = A$. Ainsi, on a : $A \cup B = A = A \cap C$. Ainsi on a montré l'implication directe.
- ▶ On suppose alors que $A \cup B = A \cap C$. Montrons que $B \subset A \subset C$:

- On montre d'abord que $B \subset A$: Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in A$. On a bien montré que $B \subset A$.
- On montre ensuite que $A \subset C$: Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in C$. On a bien montré que $A \subset C$.

Ainsi on a montré que $B \subset A \subset C$ et on a démontré l'implication réciproque.

Par double implication, on a bien montré que $(A \cup B = A \cap C) \iff B \subset A \subset C$.

Solution (exercice ALG1.10)

(Énoncé : 29) Soit $E = \{1\}$. On a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Puis, on obtient : $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{1, \emptyset\}\}$.

Solution (exercice ALG1.11)

(Énoncé : 29) On a $A \implies B$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc $m + n = 2k + 2k' = 2(k + k')$, ce qui implique $m + n$ pair.

Le sens réciproque est faux, B n'implique pas A . Pour contre exemple on peut choisir $m = 3$ et $n = 5$. On a $3 + 5 = 8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.

On en déduit donc que l'équivalence est fautive.

Solution (exercice ALG1.12)

(Énoncé : 29) On montre l'équivalence par double implication. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- ▶ \Leftarrow On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. On a alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. Ainsi, on a montré que $(x = 0 \text{ et } y = 0) \implies (x^2 + y^2 = 0)$.

- ▶ \Rightarrow On raisonne par contraposée. On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
 - Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2 > 0$, et de plus $y^2 \geq 0$. Donc par somme $x^2 + y^2 > 0$, et donc $x^2 + y^2 \neq 0$.
 - Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2 + y^2 \neq 0$.
 Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : on a bien démontré que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0).$$

Solution (exercice ALG1.13)

(Énoncé : 29) On cherche à montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x + y > 2 \implies x > 1 \text{ ou } y > 1).$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Par contraposée, on suppose que $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x + y \leq 2$. Donc $\text{non}(x + y > 2)$ est vérifiée.

Conclusion : par contraposée, on a bien démontré

$$(x + y > 2) \implies (x > 1 \text{ ou } y > 1).$$

Solution (exercice ALG1.14)

(Énoncé : 29) Soit $x \in \mathbf{R}^+$, on raisonne par contraposée. On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x > 0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \epsilon > 0$ tel que $x > \epsilon$.

En faisant un dessin, on remarque qu'il suffit de prendre (par exemple) $\epsilon = \frac{x}{2}$. En effet, on a alors bien $\epsilon > 0$ car $x > 0$ et $x > \frac{x}{2}$ (car $x > 0$) donc on a aussi $x > \epsilon$. D'où par contraposition :

$$(\forall \epsilon > 0, x \leq \epsilon) \implies x = 0.$$

Solution (exercice ALG1.15)

(Énoncé 29) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Ainsi, par définition de \mathbf{Q} , il existe $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible. On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbf{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible. Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Solution (exercice ALG1.16)

(Énoncé 29)

Initialisation. Pour $n = 0$, la propriété est $(1 + a)^0 = 1 \geq 1$, elle est donc vérifiée.

Hérédité. Supposons-là vraie au rang n , c'est-à-dire $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Alors

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) \\ &= (1 + a)(1 + na) \quad \left. \vphantom{(1 + a)^{n+1}} \right\} \text{hypothèse de réc} \\ &\geq 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a + 0. \quad \left. \vphantom{(1 + a)^{n+1}} \right\} na^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.}$$

Solution (exercice ALG1.17)

(Énoncé 29)

Initialisation. Pour $n = 4$, la propriété est $4^2 = 16 \leq 2^4 = 16$. Elle est donc vérifiée.

Hérédité. Supposons-là vraie en un rang $n \geq 4$, c'est-à-dire que $n^2 \leq 2^n$. Alors en multipliant l'hypothèse de récurrence par 2, on déduit :

$$2n^2 \leq 2^{n+1}.$$

Il suffit alors d'établir que $(n + 1)^2 \leq 2n^2$, cela impliquera que $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$. Mais

$$\begin{aligned} (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2n^2 &\iff 2n + 1 \leq n^2 \\ &\iff 0 \leq n^2 - 2n - 1. \end{aligned}$$

De plus, le discriminant de $x \mapsto x^2 - 2x - 1$ est 8, donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - 2x - 1 = (x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2})).$$

Mais, $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$, le trinôme précédent est positif à l'extérieur des racines, et $n \geq 4$ donc $n^2 - 2n - 1$ est positif. C'est terminé. Par principe de récurrence, on a établi :

$$\boxed{\forall n \geq 4, \quad n^2 \leq 2^n.}$$

Solution (exercice ALG1.18)

(Énoncé 29) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Initialisation. pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

- ▶ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^1 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ▶ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^2 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n et $n + 1$, vérifions que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie. Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$. Ainsi

on obtient que :

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(2^{n+1} + (-1)^n) \\
 &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} + 2(-1)^n \\
 &= 2^{n+2}(1+1) + (-1)^n(-1+2) \\
 &= 2^{n+3} + (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$. Ainsi on a : $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$, et $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n.$$

Solution (exercice ALG1.19)

(Énoncé : 29)

- ▶ $A = \frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = \boxed{7}$
- ▶ $B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2} = \frac{3 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} = \boxed{2}$
- ▶ $C = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n}$
- ▶ $D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2)}$
- ▶ $E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n(n^2 - 1 + 1) = \boxed{n^3}$