Chapitre ANA.11.

Intégration

Résumé & Plan

Ce chapitre se découpe en deux grandes parties : une première de révisions à propos des calculs de primitives et d'intégrales un segment, une seconde ayant pour but de d'étendre l'intégrale à des intervalles plus généraux que les segments. Nous en aurons besoin plus tard pour définir la notion de variable aléatoire réelle à densité. Comme pour les séries, tout sera une affaire de passage à la limite.

Le nombre d'or φ *— i.e. la plus grande des solutions de* $x^2 - x - 1 = 0$ *— et* π *vérifient les identités ci-après :*

- $\pi\varphi = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{5}{1+x^{10}}\,\mathrm{d}x$,
- $\frac{\pi}{\varphi} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{5x^2}{1+x^{10}}\,\mathrm{d}x$.

Eh oui !

— Le saviez-vous ?

1. PRIMITIVES & INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Commençons ce chapitre par des révisions d'intégration de première année. On définit l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide d'une primitive de cette fonction, l'existence d'une telle primitive sera quant à elle admise.

1.1. Primitives

Définition ANA.11.1

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application définie sur un *intervalle* I de **R**. On appelle *primitive* de f sur I toute application $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que $\mathrm{F}' = f$.

Proposition ANA.11.1 | Ensemble des primitives

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ est **une** primitive de f sur l'intervalle I, alors **les** primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $\mathrm{F} + c$, où $c \in \mathbf{R}$.

On retiendra notamment que si f admet une primitive, alors elle en admet même une infinité[1] ! Il n'est donc pas question de parler de *la* primitive de f.

Preuve

Théorème ANA.11.1 | Existence de primitives pour les fonctions continues

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors f possède une primitive sur I.

Comme déjà annoncé, ce théorème est admis.

[1] Puisque si F est une primitive, toutes les fonctions $\mathrm{F} + c$ avec c une constante en sont aussi

Méthode Justifier l'existence d'une primitive

Il suffit de montrer la continuité de la fonction.

1.2. Intégrale sur un segment

Cadre

Dans toute cette sous-section, la notation $[a, b]$ désignera toujours un segment, avec $a, b \in \mathbf{R}$.

Nous allons commencer par les fonctions continues sur un segment puis nous généraliserons aux fonctions continues par morceaux, *i.e.* continues sauf en quelques points en lesquels elle est prolongeable par continuité.

Définition/Proposition ANA.11.1 | Intégrale d'une fonction continue ou prolongeable par continuité sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, **ou** continue sur $[a, b[$ (*resp.* $]a, b]$, *resp.* $]a[b]$) et prolongeable par continuité en a (*resp.* b, *resp.* a et b).

- **(Si f est continue sur $[a, b]$)** On appelle *intégrale de f sur le segment* $[a, b]$ le réel noté $\int_a^b f$ $\left(\text{ou encore } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\textbf{(défi.)}}{=} [\mathrm{F}(x)]_a^b \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

où F désigne une primitive de f.

On appelle *intégrande de* $\int_a^b f$ la fonction f.

- **(Si f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$)** Si f est seulement continue sur $[a, b[$, $]a]b$ ou $]a[b$ et **prolongeable par continuité aux bornes**, on appelle *intégrale de f sur le segment* $[a, b]$ l'intégrale de son prolongement continue.

Remarquez que si $a = b$, alors avec les notations de la définition précédente, on a :

$$\int_a^a f = [\mathrm{F}]_a^a = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a) = 0.$$

Preuve La quantité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la primitive choisie.

La définition de l'intégrale est donc bien posée.

Nous verrons dans la suite de ce chapitre ce que l'on peut faire si f n'est ni continue, ni prolongeable par continuité.

Exemple 1 — L'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

Extension aux fonctions continues par morceaux.

Définition ANA.11.2 | Fonction continue/constante par morceaux sur un segment

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision de $[a,b]$, *i.e.* une famille de points $x_0 < \cdots < x_\mathrm{N}$ avec N un entier, vérifiant $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{\mathrm{N}-1} < x_\mathrm{N} = b$, et telle que, pour tout $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$,
- f est prolongeable par continuité en x_k et en x_{k+1}.

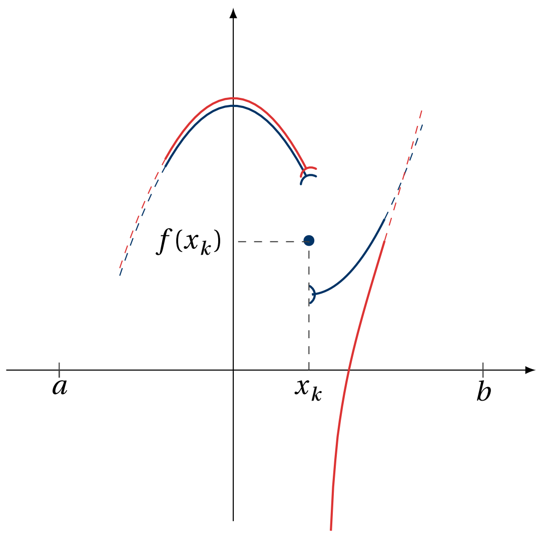
Si de plus f est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$ pour tout $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$ alors elle est dite *constante par morceaux*.

Notation

On note $\mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Attention

Nous n'avons pas défini la notion de fonction continue par morceaux sur **R** ! Seulement sur un segment.



La courbe bleue correspond à une fonction continue par morceaux. La rouge en revanche n'admet pas de limite finie en x_k et donc n'est pas continue par morceaux.

FIG. ANA.11.1. : Fonction continue (et non) par morceaux

Définition ANA.11.3 | Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Avec les notations de la définition précédente, on définit alors l'*intégrale de la fonction continue par morceaux f* comme étant le réel noté $\int_a^b f$ (ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x$) égal à :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f|_{]x_k,x_{k+1}[}.$$

On peut vérifier que ce nombre est indépendant de la subdivision choisie.

Méthode Justifier que l'intégrale d'une fonction définie sur un segment existe

Montrer que la fonction est :
- continue sur le segment,
- ou que l'on peut la prolonger en une fonction continue,
- ou encore qu'elle est continue par morceaux.

Remarque 1.1 — Changer une fonction en un nombre fini de points ne change pas l'intégrale. On observe que si deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ sont égales sauf en un nombre fini de points — autrement dit elles ne sont pas discontinues forcément aux mêmes points — alors elles ont même intégrale sur $[a,b]$: en effet, les prolongements aux bornes seront alors uniques, donc les intégrales associées seront égales.

Exemple 2 — Justifier l'existence et calculer $\int_0^n e^{\lfloor t \rfloor}\, dt$.

Valeur moyenne. Les éléments qui suivent seront le coeur de la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité. Nous savons déjà «moyenner» des valeurs discrètes, à l'aide de séries, dans le cas continu on remplace essentiellement le symbole $\sum$ par $\int$.

Définition ANA.11.4 | Valeur moyenne & Valeur moyenne pondérée

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.
- **(Moyenne)** On appelle *valeur moyenne de f sur le segment* $[a,b]$ le réel :
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$
- **(Moyenne pondérée)** Si $p : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^+$ est une fonction continue par morceaux positive telle que :
$$\int_a^b p = 1.$$
Alors on appelle *valeur moyenne de f, pondérée par p* le réel
$$\int_a^b p \cdot f.$$

Exemple 3 — Par exemple, cela permet de donner un sens à la valeur moyenne d'une intensité électrique i sur un intervalle de temps $[0,T]$: $\frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$, ou de toute autre grandeur physique sur un intervalle de temps borné.

Exemple 4 —

- Déterminer la valeur moyenne de sin et de $\sin^2$ sur $[0,2\pi]$.
- Déterminer la valeur moyenne de $t \longmapsto t$ sur $[0,2\pi]$ pondérée par $p : t \in [0,2\pi] \longmapsto \frac{1}{2\pi}$.

1.3. Propriétés

Proposition ANA.11.2 | Propriétés de l'intégrale.

Soient I un intervalle et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

1. **(Linéarité)** L'application $\psi : \begin{array}{|ccc} \mathscr{C}^0_m(\mathrm{I},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ est une forme linéaire, *i.e.* pour tout $(f,g) \in (\mathscr{C}^0_m(\mathrm{I},\mathbf{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, on a :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b + \mu \int_a^b g.$$
2. **(Positivité)** Si $f \in \mathscr{C}^0_m(\mathrm{I},\mathbf{R})$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors :
$$f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \geqslant 0.$$
3. **(Croissance)** Si $(f,g) \in (\mathscr{C}^0_m(\mathrm{I},\mathbf{R}))^2$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors :
$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$
4. **(Relation de Chasles)** Soient $f \in \mathscr{C}^0_m(\mathrm{I},\mathbf{R})$ et $c \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Preuve

1. Constater que si F et G sont des primitives de f et g, alors $\lambda\mathrm{F}+\mu\mathrm{G}$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.
2. Si F est une primitive de f, alors l'hypothèse nous donne $\mathrm{F}' \geqslant 0$, donc que F est croissante. On obtient immédiatement $\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \geqslant 0$ puisque $a \leq b$.
3. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $g - f$ et d'utiliser la linéarité.
4. Si F est une primitive, alors $\int_a^c f = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(b) = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Exemple 5 — *Intégrale à paramètre* Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, posons : $\mathrm{A}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

La fonction A est bien définie sur $\mathbf{R}_+$ et elle est décroissante.

Théorème ANA.11.2 | Inégalité triangulaire & Majoration de l'intégrale d'un produit

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\boxed{a \leqslant b}$ et deux fonctions $f \in \mathscr{C}^0_m([a,b],\mathbf{R})$, $g \in \mathscr{C}^0_m([a,b],\mathbf{R})$ telle que g est bornée. Alors :

- $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$,
- $\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \cdot \int_a^b |f|$.[2]

Preuve

[2] On rappelle que la borne supérieure d'une fonction bornée désigne le plus petit des majorants.

- On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Donc en intégrant entre a et b, on déduit

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f| \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

- Pour la deuxième, on pose $\mathrm{M} = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$, puis on écrit : $\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \int_a^b |fg| \leqslant \int_a^b \mathrm{M}.|f| = \mathrm{M}.\int_a^b |f|$.

Exemple 6 —

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \arctan(1-nx)\,\mathrm{d}x$. Montrons que les suites $(n\mathrm{I}_n)$ et $(n\mathrm{J}_n)$ sont bornées.

2. Donnons un équivalent en 0^+ de la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
<u>*Indication :*</u> *On pourra, par exemple, chercher à encadrer le numérateur de l'intégrande.* *Il s'agit d'encadrer* F *pour* x *assez proche de zéro. Pour* $x \in [0,1]$, $x^2 \leqslant x$, *les bornes de l'intégrale ne sont donc pas dans le bon sens. Notons plutôt* $\mathrm{G}(x) = -\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ *et cherchons un équivalent de* G. *Puisque* exp *est croissante, on a*

$$\forall x \in]0,1], \quad \mathrm{e}^{x^2} \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{G}(x) \leqslant \mathrm{e}^{x} \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

ou de manière équivalente :

$$-\ln x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{G}(x) \leqslant -\ln x \cdot \mathrm{e}^{x}.$$

On déduit alors un équivalent, puisque pour $x \in]0,1[$ *:*

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{G}(x)}{-\ln x \cdot \mathrm{e}^{x^2}} \leqslant \frac{-\ln x \cdot \mathrm{e}^{x}}{-\ln x \cdot \mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{x-x^2} \xrightarrow[]{x\longrightarrow 0^+} 1.$$

En conclusion : $\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \cdot \mathrm{e}^{x^2}}$.

Théorème ANA.11.3 | Fonction positive d'intégrale nulle

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est <u>**continue**</u> et de signe constant. Alors :

1. $\displaystyle\int_a^b f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est la fonction nulle.
2. $f > 0 \quad (\textit{resp.} > 0) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f > 0 \quad (\textit{resp.} < 0)$.

Attention

La continuité est indispensable, continue par morceaux ne suffit pas.[3]

Pour une fonction continue par morceaux, on peut utiliser ce résultat au prolongement continu de la fonction, sur chaque sous-intervalle.

Preuve

1. Seule l'implication directe n'est pas triviale. On la montre pour $f \geqslant 0$ (quitte à changer f en $-f$) en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Alors, en utilisant la définition de la continuité, on obtient l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$,

$$f(x) \in \left]\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2}\right[.$$

En notant $g = \frac{3f(x_0)}{2}\mathbb{1}_{]x_0-\eta,x_0+\eta[}$, on a alors $f \geqslant g$ puisque f est positive, et donc

$$\int_a^b f \geqslant \int_a^b g = 2\eta\frac{3f(x_0)}{2} = 3\eta f(x_0) > 0.$$

[3] Il faudrait sinon remplacer « f est la fonction nulle » par « f est nulle sauf en un nombre fini de points » dans la conclusion.

Donc $\int_a^b f > 0$ — contradiction.

2.

Preuve

Remarque 1.2 — L'écriture d'une fonction sous la forme Eq. (RFA) peut donner de précieux renseignements sur f si on en connaît certains sur f'. Voir l'exemple ci-après.

1.4. Lien entre primitive et intégrale

Par définition de l'intégrale, il est nécessaire de connaître une primitive pour la calculer, il existe donc un fort lien entre les deux notions. Voyons lequel.

Théorème ANA.11.4 | Lien primitive / intégrale.
Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors l'application

$$\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f \end{array} \right.$$

est **<u>l'unique primitive de f sur</u> I <u>qui s'annule en</u> a** et est de classe $\mathscr{C}^1$. Par conséquent, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors elle est égale à l'intégrale de sa dérivée :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'.\qquad \text{(RFA)}$$ [4]

Méthode — Primitiver une fonction en utilisant une intégrale

Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, choisir $a \in \mathrm{I}$, puis calculer $\int_a^x f$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

[4] Cette égalité est appelée assez pompeusement « relation fondamentale de l'analyse ». Pour notre définition de l'intégrale, elle est évidente. Mais pour d'autres définitions, il faut travailler pour l'établir.

Exemple 7 — *Inégalité des accroissements finis* Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbf{R})$ avec $a < b$ et telle que f' soit bornée par $\mathrm{M} \in \mathbf{R}^+$. Montrer, en écrivant f comme intégrale de sa dérivée,[5] que :

$$\left| f(b) - f(a) \right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|.$$

Les intégrales à borne(s) variable(s). Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux intégrales de fonctions dont une ou plusieurs bornes de l'intégrales dépendant d'une variable. Le théorème ci-dessous est clairement hors-programme, il faut donc uniquement en connaître la démarche de la preuve associée.

[5] Mais on peut aussi appliquer l'égalité des accroissements finis

Théorème ANA.11.5 | Intégrale à deux bornes variables [H.P]

Soient I un intervalle, a un point de I et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Soient par ailleurs $u, v : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ deux fonctions dérivables sur J où J est un intervalle réel. Alors la fonction

- $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f$ est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par :
- $\forall x \in \mathrm{J}, \quad g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f\right) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x).$

Preuve *(Point clef — **Introduire une primitive de l'intégrande**)*

Puisque f est continue, choisissons une primitive de f notée F.

Méthode Calcul d'une intégrale à bornes variables

Soient I un intervalle, a un point de I et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Soient par ailleurs $u, v : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ deux fonctions définies sur J où J est un intervalle réel. Pour étudier la dérivabilité de $x \in \mathrm{J} \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f$, on :

1. introduit une primitive de f, notée F.
2. Alors : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f = \mathrm{F} \circ v(x) - \mathrm{F} \circ u(x).$
3. Justifier la dérivabilité et dériver à l'aide la formule de dérivation d'une composée.
4. On obtient *in fine* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f\right) = f \circ v(x) v'(x) - f \circ u(x) u'(x)$ — cette formule ne doit pas être apprise par coeur, il faut savoir la retrouver en dérivant une composée.

Un point important est que le résultat ne dépend pas de F; inutile donc de chercher à calculer F explicitement.

Exemple 8 — *Fonction d'une variable dépendant d'une intégrale* Justifier que f, g sont dérivables, où f, g sont définies ci-dessous, puis calculer leur dérivée.

1. $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire les variations de f.
2. $g : x \in \mathbf{R} \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{x^2} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$. En déduire les variations de g sur $\mathbf{R}^+$.

Exemple 9 — *Fonction de deux variables dépendant d'une intégrale* La fonction $i : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{y^2} \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$, et déterminer son gradient en tout point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

1.5. Calculs d'intégrales

Nous avons vu précédemment que calculer une primitive revient à un calcul d'intégrale. Pour ces dernières nous disposons de deux techniques principales de calcul : l'intégration par parties et le changement de variable.

Notez bien que les deux théorèmes qui suivent sont vraies pour des fonctions intégrées **continues** : pour les continues par morceaux, il faut les appliquer entre deux points d'une subdivision.

1.5.1. Intégration par parties

Théorème ANA.11.6 | Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v.$$

Attention

Toute intégration par parties doit être justifiée.

Preuve *(Point clef — **Intégrer la formule de dérivation d'un produit**)*
Notons que les hypothèses assurent que les fonctions intégrées (uv' et $u'v$) sont continues, donc intégrables, sur $[a, b]$. En regroupant les deux intégrales, on fait apparaître la dérivée d'un produit :

$$\int_a^b u' \cdot v' + \int_a^b u' \cdot v = \int_a^b \left(u' \cdot v' + u' \cdot v\right) = \int_a^b (uv)'(t) = [u \cdot v]_a^b.$$

d'où le résultat annoncé.

Méthode Quand utiliser l'intégration par parties ?

Pour intégrer un *produit* de deux fonctions, dont l'une est facile à *primitiver* et l'autre est facile à *dériver*. Exemple : une exponentielle multipliée par un polynôme.

Exemple 10 — Calculer les intégrales suivantes (où $x \in \mathbf{R}$).

1. $\displaystyle\int_0^x \arctan t \, \mathrm{d}t,$

2. $\displaystyle\int_0^x t \ln(t^2+1) \, \mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_0^x (t^2 - t + 3)e^{2t}\,dt.$

4. $\displaystyle\int_0^x e^t \sin t\,dt.$

5. Calculer une primitive de $t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2}$ sur un domaine à préciser.

1.5.2. Changement de variable

Théorème ANA.11.7 | Changement de variables.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle I, et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ appelée *changement de variables*. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

«On pose $u = \varphi(t)$»

Attention

Tout changement de variable doit être justifié.

Dans la pratique, on réalise assez peu souvent un changement de variable en essayant de «coller» à cette formule. On utilise plutôt les calculs formels ci-après, qui correspondant à la formule de changement de variable non-intégrée[6] :

$$«f(u)\,du = f(\varphi(t))\,d\big(\varphi(t)\big) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.»$$

[6] Et avec des gros guillemets, car cette version sans intégrale n'a aucun sens mathématique.

Ainsi, pour réaliser le changement $u = \varphi(t)$, on commence par écrire formellement :

« $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\big(\varphi(t)\big) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ » — on calcule donc ni plus ni moins la dérivée de φ !

Méthode Mise en place d'un changement de variable

En pratique, on écrit les calculs formels ci-après au brouillon[7] :

$$\begin{cases} \quad u & = & \varphi(t) \\ \quad \mathrm{d}u & = & \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ x = \varphi(\alpha) & \Longleftarrow & t = \alpha \\ x = \varphi(\beta) & \Longleftarrow & t = \beta \end{cases}$$

en **justifiant que φ est de classe $\mathscr{C}^1$**[8]. Ce n'est qu'après que l'on pourra écrire l'égalité :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve *(Point clef — **Intégrer la formule de dérivation d'une composée.**)*
Notons que f et $f \circ \varphi.\varphi'$ sont continues sur I et sur $[\alpha, \beta]$ respectivement, ce qui assure l'existence des intégrales. Introduisons une primitive F de f sur I (il en existe puisque f est continue). Alors $\mathrm{F} \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $\mathrm{F}' \circ \varphi.\varphi' = f \circ \varphi.\varphi'$. Ainsi :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \mathrm{F}(\varphi(\beta)) - \mathrm{F}(\varphi(\alpha))$$

et

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F} \circ \varphi(t)]_{\alpha}^{\beta} = \mathrm{F}(\varphi(\beta)) - \mathrm{F}(\varphi(\alpha))$$

d'où le résultat.

Remarque 1.3 — On peut lire la formule de changement de variable dans les deux sens

- Soit on réalise un changement « implicite » en l'ancienne variable u, on pose « $u = \varphi(t)$ » (de gauche à droite dans la formule), et parfois on peut avoir besoin d'expliciter t en fonction de u, ou au moins de savoir exprimer les bornes initiales comme image par φ de deux bornes α, β :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Soit on réalise un changement « explicite » en l'ancienne variable t, on pose « $u = \varphi(t)$ » (de droite à gauche dans la formule). La formule de changement de variable est donc ici assez peu utilisée, puisque l'on sait primitiver l'intégrande $f \circ \varphi \times \varphi'$ — c'est une dérivée de composée.

Exemple 11 — *Formule de changement de variable dans le « sens →»*

1. Soit $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue (où $a > 0$). Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. Que peut-on dire si f est impaire ?

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

[7] Ils n'ont pas vocation à servir de preuve de la formule de changement de variable
[8] Le changement de variable vous sera donné dans la pratique

3. Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,dx$. Montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \,dx$, *puis* déterminer la valeur de I.

Exemple 12 — ***Formule de changement de variable dans le sens « sens ← »*** Comme déjà précisé dans une remarque, la formule de changement de variable n'est pas indispensable dans ce cens, puisque l'on reconnaît à chaque fois des dérivées de composées usuelles. Cependant on va tout de même rédiger ces deux exemples en utilisant un changement de variable.

1. Calculer $\int_1^4 \frac{e^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \,dt$.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^2 t \,dt$. *Faisons le changement* $u = \cos^3(t)$, $du = -3\cos^2(t)\sin(t)\,dt$, *et la fonction* $\cos^3$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$. *Par ailleurs,* $\sin^2 t = 1 - \cos^2(t) = 1 - u^{2/3}$, *donc*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^2 t \,dt = -\frac{1}{3}\int_1^0 \left(1 - u^{2/3}\right) du = \left[u - \frac{3}{5}u^{5/3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

1.5.3. Primitives usuelles

Dans les tableaux suivants, pour chaque fonction f définie sur un *intervalle* I précisé, on donne *une* primitive F. Les primitives suivantes doivent être connues par cœur, ou *a minima* être retrouvées rapidement.

$f(x) = \ldots$	$F(x) = \ldots$	$x \in I \subset \ldots$	**Condition**
$(x-a)^\alpha$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]a,\infty[$	$\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbf{R}\setminus\{a\}$	$a \in \mathbf{R}$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$	$\mathbf{R}$	$a \in \mathbf{R}^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbf{R}^*$	
$\sin(ax)$	$\frac{-\cos(ax)}{a}$		
$\cos(ax)$	$\frac{\sin(ax)}{a}$	$\mathbf{R}$	$a \in \mathbf{R}^*$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\mathbf{R}$	

Méthode — Essayer de se ramener à une notation sous forme de fonction puissance

Beaucoup d'expression peuvent se mettre sous la forme « $(x-a)^\alpha$ » : la formule de primitivation de cette expression est donc centrale.

Exemple 13 — Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$.

2. $g : x \longmapsto x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$.

Méthode Primitives de fractions rationnelles

On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

1. si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, puis on écrit la fraction comme somme de deux autres qui se primitivent avec un logarithme.
2. Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$,
3. si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on effectue un changement de variable pour se ramener à $u \longmapsto \dfrac{1}{u^2+1}$.

Exemple 14 — Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \frac{1}{2x^2+x-1}, \quad x \longmapsto \frac{1}{4x^2-4x+1} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Et enfin, nous rappelons une méthode usuelle concernant les fonctions trigonométriques.

Méthode Calcul d'une primitive avec des fonctions trigonométriques

1. Commencer par linéariser l'expression, à l'aide de nombres complexes si besoin.
2. Primitiver avec les formules usuelles.

Exemple 15 — Déterminer, *via* deux méthodes, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x \sin x$ sur un ensemble à préciser.

1.6. Sommes de Riemann & Intégration Numérique

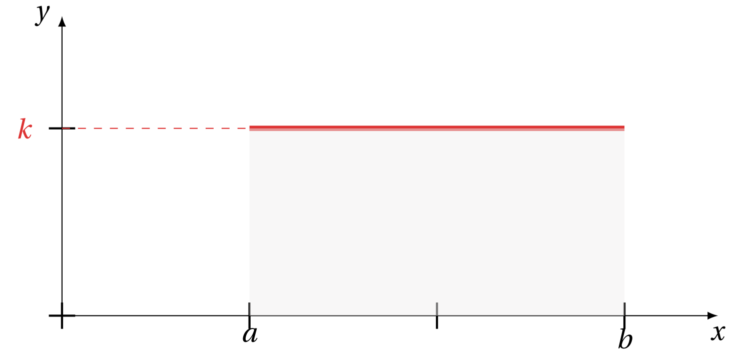
La motivation première de l'introduction du calcul intégral fut celle du calcul d'airs, et de volumes (pour les intégrales doubles). Pour le moment nous n'avons pas encore réalisé cette interprétation, c'est l'objectif de cette sous-section. Commençons avec un premier exemple : celui d'une fonction constante.

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction constante égale à $k \in \mathbf{R}$, alors : $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)k$.

Maintenant si f est constante par morceaux, alors avec les notations de la Définition ANA.11.3, l'intégrale de f vaut :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\big|_{]x_k,x_{k+1}[} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k)\alpha_k$$

où α_k désigne la valeur que prend le prolongement continue de f sur $[x_k, x_{k+1}]$. Cette quantité est donc une somme d'aires de rectangles. Maintenant, dans le cas général, nous avons le théorème suivant.



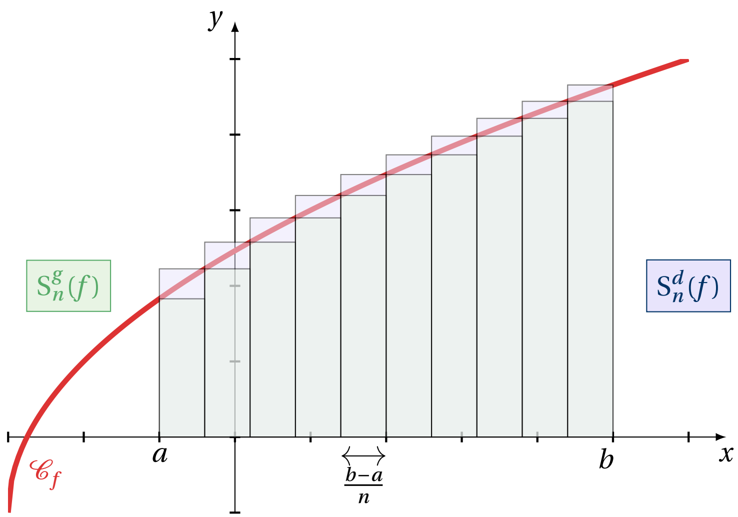


FIG. ANA.11.2. : Méthode des rectangles.

Définition/Proposition ANA.11.2 | Convergence des sommes de RIEMANN

1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle *somme de RIEMANN gauche* (*resp. droite*) ou *somme des rectangles gauche* (*resp. droite*) les quantités :
$$S_n^g(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right), \qquad S_n^d(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
Alors :
$$S_n^g(f) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \int_a^b f, \qquad S_n^d(f) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \int_a^b f.$$

2. **(Estimation de l'erreur dans le cas $\mathscr{C}^1$)** Si on suppose en outre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors on a la majoration de l'erreur suivante :
$$\left|\int_a^b f - S_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{[a,b]}|f'|,$$
où $S_n(f)$ désigne l'une ou l'autre des sommes $S_n^g(f), S_n^d(f)$.

Les quantités $S_n^g(f)$ (*resp.* $S_n^d(f)$) correspondent à la somme des aires des rectangles verts (*resp.* bleus) sur le dessin précédent. Les points $a = x_0, \dots, x_n = b$ sont espacés d'un pas $\frac{b-a}{n}$ et « découpent » donc l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de même largeur.

Par ailleurs, connaissant une expression de f, il est alors très facile d'en déduire une valeur approchée de son intégrale sur $[a, b]$ à l'aide d'un outil informatique.

Preuve *(Point clef — **Relation de CHASLES, majoration d'intégrales, inégalité des accroissements finis**)*
La convergence dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^0$ est admise. Nous allons montrer la majoration de l'erreur dans le cas $\mathscr{C}^1$ et, par exemple, pour la somme des rectangles à gauche, ce qui suffira à prouver la convergence par théorème d'encadrement : en effet,
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{[a,b]}|f'| = 0.$$
En notant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, et $M_1 = \sup\limits_{[a,b]}|f'|$. Cette borne supérieure

existe puisque f' est continue sur le segment $[a, b]$, elle est donc bornée. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left| \int_a^b f - S_n^g(f) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M_1\, |t - x_k|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_1 \left[\frac{(t-x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&\leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

inégalités triangulaires pour les sommes/intégrales

Donc par théorème d'encadrement, nous obtenons :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left| \int_a^b f - S_n^g(f) \right| = 0.$$

Preuve *(Dans le cas monotone)* *(Point clef — **Comparaison série-intégrale**)*
On propose une preuve dans un contexte simplifié, en supposant que f est monotone. Supposons par exemple que f est croissante, alors soit $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$ alors par croissance :

$$\forall x \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right], \quad f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right).$$

Dans la fin de la preuve précédente, on a aussi finalement montré que si f est croissante ; les rectangles à gauche sont « en-dessous » des rectangles à droite, ce qui se constate aisément sur un dessin.

Exemple 16 — ***Sommes de Riemann*** Identifier les sommes ci-dessous comme des sommes de Riemann, et en déduire les valeurs données des limites.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ln 2.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \frac{\pi}{4}.$

Intégration numérique. Lorsque l'on ne sait pas calculer explicitement une intégrale, nous pouvons l'approcher à l'aide d'une somme de Riemann comme nous venons le voir. Avec les notations de Définition/Proposition ANA.11.2, la quantité $S_n(f)$ pour n assez grand peut donc servir d'approximation de $\displaystyle\int_a^b f$. On en déduit alors le script Python suivant.

Approximation d'intégrales par la méthode des rectangles

Méthode des rectangles (gauche)

```
def rectangle_RG(f, a, b, n):
    """
    Calcule la somme des rectangles gauche associée à f
    """
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        S += f(a+h*i)
    return S*h
```

Méthode des rectangles (droite)

```
def rectangle_RD(f, a, b, n):
    """
    Calcule la somme des rectangles droite associée à f
    """
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(1,n+1):
        S += f(a+h*i)
    return S*h
```

Par exemple,

```
>>> rectangle_RG(lambda x:x**2, 0, 1, 10**3)
0.33283349999999995
>>> rectangle_RD(lambda x:x**2, 0, 1, 10**3)
0.33383349999999995
```

Ce que l'on peut retrouver par le calcul.

$$\int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Il existe beaucoup d'autres méthodes : celle du point milieu (méthode des rectangles où l'on choisit le milieu des intervalles comme hauteur), celle des trapèzes (les rectangles sont remplacés par des trapèzes), de Simpson (les rectangles sont des branches de paraboles). Une méthode sera d'autant meilleure qu'elle converge rapidement vers la bonne valeur théorique inconnue.

2. Intégration sur un intervalle quelconque

En 1ère année, et dans la section précédente, nous avons donné un sens $\int_a^b f$ avec a, b deux réels, pour une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$. On souhaiterait étendre la notion pour intégrer des fonctions continues définies sur I un intervalle quelconque. Par exemple $\mathrm{I} = [a, +\infty[$ ou $\mathrm{I} = [a, b[$, $\mathrm{I} =]a, b[$. Disons-le de suite, comme pour les sommes inifinies de nombres réels, cela ne sera pas toujours possible. Regardons un premier exemple.

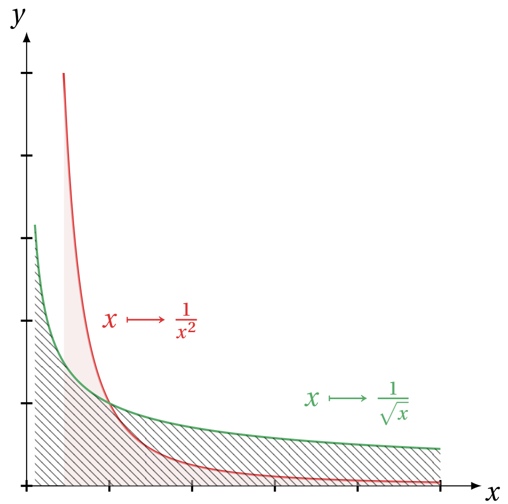
Exemple 17 — ***Est-il possible de définir*** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$ ***et*** $\int_0^1 \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ ***?***

Les deux fonctions $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ ne sont ni continues sur $[0, 1]$ ni prolongeables par continuité sur ce même intervalle, il n'est donc pas possible de définir leur intégrale avec la Section 1.

1. Une idée est donc d'analyser l'existence éventuelle des deux limites suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

 (cc)



On constate que l'aire rouge semble être de plus en plus grande lorsque l'on se rapproche de l'origine, alors que la verte semble converger vers une limite finie. En langage sur les fonctions, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ diverge beaucoup plus vite en zéro que $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Plus précisément, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$:

Ainsi, par ce biais, nous pouvons définir $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ même si $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas continue ou prolongeable en zéro. En revanche, ce n'est pas le cas de $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$.

2. Peut-on, et comment, définir $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$?

Tout l'enjeu est donc, comme nous venons de le voir, de justifier l'existence des limites précédentes. Et, comme pour les séries, les difficultés se présenterons lorsque nous ne saurons pas primitiver les intégrandes.

Toute fonction du type $\varepsilon > 0 \longmapsto \displaystyle\int_\varepsilon^a f$ $\left(\textit{resp.}\ \mathrm{A} > 0 \longmapsto \displaystyle\int_a^{\mathrm{A}} f\right)$ avec f fonction continue sur $[\varepsilon, a]$ pour tout ε et a (*resp.* pour tout a et A) est **monotone** si f est **de signe constant**. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, il nous suffira de montrer qu'elles sont majorées pour justifier l'existence de leur limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ (*resp.* $\mathrm{A} \longrightarrow \infty$).

Ainsi, nous aurons le même type de résultats dans la suite que dans le Chapter ANA.10 sur les suites et séries :

- des résultats sur les fonctions positives incluant un théorème de comparaison (l'hypothèse sera vérifiée ou non grâce à des équivalents, développements limités, *etc.*) comme pour les séries.
- Puis nous passerons à l'extension aux fonctions à valeurs quelconques. La convergence absolue des séries sera remplacée par l'existence de l'intégrale de la valeur absolue, on parlera toujours de « convergence absolue ».

2.1. Généralités

2.1.1. Intégrale impropre sur $[a, b[$

Cadre

Dans cette sous-section, les fonctions seront définies sur un intervalle $[a, b[$ avec a un réel et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Par exemple : $[0, 1[$ ou $[0, +\infty[$.

Définition ANA11.5 | Intégrale partielle

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbf{R})$. Alors on appelle *intégrale partielle de f en b* la fonction

$$\left|\begin{array}{rcl} [a,b[& \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ \mathrm{B} & \longmapsto & \displaystyle\int_a^{\mathrm{B}} f. \end{array}\right.$$

Définition ANA11.6 | Intégrale convergente/divergente

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ *converge* si $\lim\limits_{\mathrm{B}\longrightarrow b-} \int_a^{\mathrm{B}} f$ existe. On pose alors :

$$\int_a^b f = \lim_{\mathrm{B}\to b-} \int_a^{\mathrm{B}} f.$$

  On appelle alors *intégrande de* $\int_a^b f$ la fonction f.
- La limite est alors appelée l'intégrale de f entre a et b.
- *Déterminer la nature de l'intégrale* c'est déterminer si elle converge ou diverge.

La notion d'intégrale partielle est analogue à la notion de somme partielle, la terminologie « $\int_a^b \dots$ converge » est analogue à « $\sum_{n=0}^{\infty} \dots$ converge » mais en revanche il n'y a pas de vocabulaire analogue de la notion de « série » pour les intégrales (*i.e.* la **suite** des sommes partielles).[9]

Définition/Proposition ANA11.3 | Intégrale faussement impropre

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbf{R})$ et supposons que f est prolongeable par continuité en b, de prolongement $\tilde{f}$. Alors :

$$\text{l'intégrale } \int_a^b f \quad \text{est convergente, et :} \quad \int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$$

On dit alors que l'intégrale est *faussement impropre* en b.

Rappelons que $\int_a^b \tilde{f}$ était notre définition de l'intégrale dans la Section 1.

[9] Mais ce serait la fonction intégrale partielle.

Preuve En effet, notons F une primitive de $\tilde{f}$ ainsi que $\mathrm{B} \in [a,b[$. Alors, puisque $\mathrm{B} < b$,

$$\begin{aligned} \int_a^{\mathrm{B}} f = \int_a^{\mathrm{B}} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t &= \mathrm{F}(\mathrm{B}) - \mathrm{F}(a) && \textit{car F est continue} \\ &\xrightarrow[]{\mathrm{B}\longrightarrow b-} \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) && \textit{par définition de l'intégrale} \\ &= \int_a^b \tilde{f}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exemple 18 — L'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 1.

Définition ANA11.7

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbf{R})$. L'intégrale $\int_a^b f$ est dite *impropre* (ou *généralisée*) en b si :

- $\int_a^b f$ converge, **mais que**
- f n'est **pas** prolongeable par continuité en b.

L'adjectif « impropre » signifie qu'il y a un passage à la limite derrière, et donc que l'on ne peut définir l'intégrale qu'avec la seule Section 1.

Définition ANA11.8 | Reste d'une intégrale impropre

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbf{R})$ telle que $\int_a^b f$ converge, on appelle *reste en a de* $\int_a^b f$, la fonction

$$\left|\begin{array}{rcl}]a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ \mathrm{B} & \longmapsto & \underbrace{\boxed{\int_a^b f}}_{\text{intégrale totale}} - \underbrace{\boxed{\int_a^{\mathrm{B}} f}}_{\text{intégrale partielle}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^b f. \end{array}\right.$$

La définition est analogue à celle du reste ($R_n = S - S_n$) pour les séries (voir le Chapter ANA.10).

Proposition ANA.11.3 | Le reste d'une intégrale convergente tend vers zéro (au point généralisé)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbf{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f$ converge. Alors son reste tend vers zéro au point où l'intégrale est impropre, *i.e.*

$$\lim_{x \longrightarrow b-} \int_x^b f = 0.$$

Preuve

La propriété précédente est donc identique à celle déjà connue pour les séries.

Proposition ANA.11.4 | Si généralisée en b, la borne du bas n'a pas d'importance

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbf{R})$ et $c \in [a,b[$. Alors :

$$\int_a^b f \text{ converge} \iff \int_c^b f \text{ converge.}$$

La nature d'une intégrale impropre ne dépend donc que du comportement de f au voisinage de la borne impropre. De-même que si l'on enlève un nombre fini de termes dans l'étude d'une série, cela ne change pas sa nature.

Preuve

Exemple 19 — Étudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,\mathrm{d}t.$

2.1.2. Intégrale impropre sur $]a, b]$

Dans le cas d'une fonction f continue sur $]a, b]$ avec b un réel et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, on définit de la même manière l'intégrale de f comme la limite éventuelle de $\int_{\mathrm{A}}^{b} f$ lorsque A tend vers a à droite. En particulier on appellera :

1. *intégrale partielle de f en a* la fonction $\left| \begin{array}{ccc}]a, b] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \int_{\mathrm{A}}^{b} f. \end{array} \right.$ L'intégrande d'une intégrale désigne alors encore une fois la fonction f.
2. Et *reste en a de* $\int_a^b f$, lorsque $\int_a^b f$ converge, la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc}]a, b] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \int_a^b f - \int_{\mathrm{A}}^{b} f = \int_a^{\mathrm{A}} f. \end{array} \right.$$

Exemple 20 — L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ est faussement impropre en $\frac{\pi}{2}$.

Exemple 21 — Étudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leur valeur en cas de convergence.

1. $\int_0^1 t \ln(t) \,\mathrm{d}t,$
2. $\int_0^1 \ln(t) \,\mathrm{d}t,$

2.1.3. Intégrale impropre sur $]a, b[$

On traite dans ce paragraphe le cas d'une fonction définie sur $]a, b[$, avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition/Proposition ANA.11.4 | Intégrale doublement impropre

Soit $f \in \mathscr{C}^0(]a, b[, \mathbf{R})$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge si :

$$\boxed{\exists} c \in]a, b[, \quad \int_a^c f, \quad \underline{\textbf{et}} \quad \int_c^b f \quad \text{convergent.}$$

On définit dans ce cas : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. De plus, la définition — du point de vue de la convergence et de la valeur de l'intégrale — ne dépend pas du choix de c.

Preuve Montrons que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c. En effet, si l'on choisit $c' \in \mathbf{R}$ tel que $c' \geqslant c$ par exemple et que les intégrales convergent, alors :

$$\begin{aligned}\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f &= \int_a^c f + \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f \\ &= \int_a^c f + \int_c^b f.\end{aligned}$$

On montre de-même que la convergence ne dépend pas du c considéré.

Remarque 2.1 — Puisque la définition vous autorise n'importe quel c, choisissez-en un qui vous arrange. Par exemple, pour l'étude de $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$, il est plus intéressant d'étudier

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t,$$

que d'étudier

$$\int_{\frac{17}{3}}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\frac{17}{3}} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t.$$

Attention **Deux limites distinctes**

Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, il ne suffit pas que $\lim\limits_{A \longrightarrow \infty} \int_{-A}^{A} f$ existe et soit finie pour garantir l'existence de l'intégrale, mais plutôt que :

$$\lim_{A \longrightarrow \infty} \int_{-A}^{c} f, \quad \text{et} \quad \lim_{B \longrightarrow \infty} \int_{c}^{B} f$$

existent et sont finies pour un certain $c \in \mathbf{R}$.
Un contre-exemple très simple existe : la fonction $t \longmapsto t$. Pour tout $A \in \mathbf{R}^{+}$, $\int_{-A}^{A} t\,\mathrm{d}t = 0$ et pourtant $\int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge puisque $\int_{0}^{\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple 22 — L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, et de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Exemple 23 — Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-1|}\,\mathrm{d}t$.

Il y aura beaucoup d'analogies avec le cours sur les séries dans ce chapitre. Cependant, voici une différence notable : il n'existe pas de divergence grossière pour les intégrales.

Attention Différence avec les séries

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, \infty[$. Alors :

$$\int_a^{\infty} f \quad \text{converge} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Il n'existe donc pas de notion de « divergence grossière » pour les intégrales.

Exemple 24 — ***Contre-exemple*** Considérons une fonction « triangulaire par morceaux » dont les triangles sont d'aires $\frac{1}{n^2}$, de hauteur 1, centrés sur le milieu du segment $[n, n+1]$, *i.e.*

$$f(x) = \begin{cases} n^2\left(x - n - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{si } x \in \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{2}\right], \\ -n^2\left(x - n - \frac{1}{2}\right) - 1 & \text{si } x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

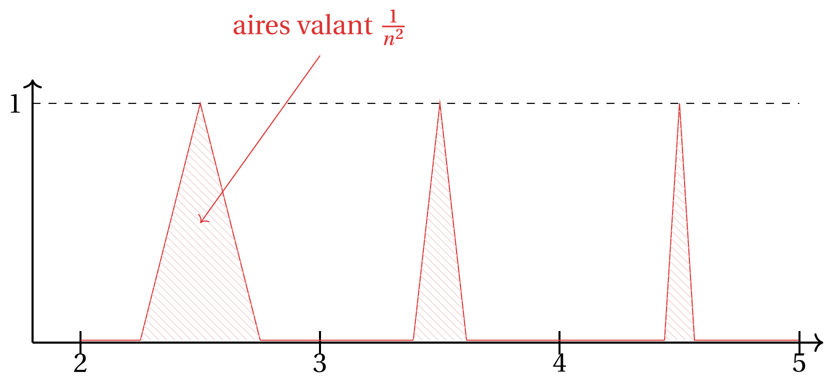


FIG. ANA.11.3. : Graphe de la fonction f

Rappelons que la série $\left(\sum \frac{1}{k^2}\right)_{k \geqslant 1}$ est convergente. Soit $x \geqslant 2$, alors grâce à la relation de CHASLES, nous avons :

$$\forall x \geqslant 2, \quad \int_2^x f \leqslant \sum_{k=2}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Donc les intégrales partielles sont majorées, la fonction f est positive, donc f est d'intégrale convergente. Et pourtant, il est clair qu'elle ne converge pas vers zéro.

2.1.4. Intégrale impropre en un nombre fini de points

Définition ANA.11.9 | Intégrale d'une fonction continue sauf en un nombre fini de points

Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. On suppose qu'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, et telle que, pour tout $k \in [\![0\,,\, n-1]\!]$, f est définie et continue sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. On dit que f *est continue sur* $]a, b[$ *sauf en un nombre fini de points*.

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ *converge* si, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f$ converge.
- En cas de convergence, on pose

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f.$$

Remarque 2.2 —

- L'hypothèse ne signifie pas que f est continue par morceaux : on ne suppose pas que f est prolongeable par continuité aux points x_k (mais certaines peuvent l'être), les intégrales intervenant dans la somme ne sont donc pas « faussement impropres ».
- Le résultat ne dépend pas de la subdivision choisie.
- Il faut vérifier la convergence de toutes les intégrales aux bornes où elle est généralisée.

Exemple 25 — Que faut-il étudier comme intégrales pour étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}\, \mathrm{d}t$? *Nous réaliserons l'étude complète plus tard.*

VALEUR MOYENNE GÉNÉRALISÉE. On généralise ici sans peine la notion de valeur moyenne sur un intervalle quelconque, en cas de convergence.

Définition ANA.11.10 | Valeur moyenne & Valeur moyenne pondérée

Soit f une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur un intervalle I de la forme $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, ainsi que $p:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points telle que :

$$\int_a^b p = 1.$$

En cas de convergence de l'intégrale, on appelle *valeur moyenne de f sur* I *pondérée par p* le réel :

$$\int_a^b p \cdot f.$$

Cette définition sera la base de la définition de l'espérance pour les variables aléatoires à densité dans le Chapter ALEA.14.

Exemple 26 — Déterminer la valeur moyenne de $t \longmapsto t$ sur $\mathbf{R}^+$ pondérée par $p : t \in \mathbf{R}^+ \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. *(On admettra que p est d'intégrale 1)*

2.1.5. Intégrales de référence

Tous les résultats, sauf le tout dernier sur l'intégrale de GAUSS, qui suivent doivent être vus comme des exercices, aucun résultat sur les intégrales usuelles n'est clairement au programme de BCPST.

Proposition ANA.11.5 | Intégrande exponentielle décroissant vers zéro [H.P]

Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge $\iff$ $a > 0$.

Preuve

Le résultat ci-dessous précise la convergence des intégrales associées à des fonctions du type $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Rappelons-nous que nous avons établi en introduction les natures suivantes :

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge
- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge,
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge,
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Il semble donc se dessiner deux critères suivant que l'on se place autour de zéro, ou au voisinage de $+\infty$. Précisons cela.

Proposition ANA.11.6 | Intégrales de Riemann [H.P]

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. **(Caractère impropre en $+\infty$)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.
2. **(Caractère impropre en zéro)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge $\iff$ $\alpha < 1$.

Attention

Vous devez savoir refaire la preuve de cette proposition pour la valeur de α considérée.

Attention

Le critère au voisinage de $+\infty$ est le même que pour les séries. En revanche, en zéro, la convergence a lieu pour les valeurs strictement inférieures à 1.

Preuve

1. *Soit* $\mathrm{A} > 1$. *Calculons* : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{A}} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\mathrm{A}} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathrm{A}^{1-\alpha}-1\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \left[\ln|t|\right]_1^{\mathrm{A}} = \ln \mathrm{A} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$. *On constate alors que, lorsque* $\mathrm{A} \longrightarrow \infty$, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *converge vers une limite finie si et seulement si* $1-\alpha < 0$ *i.e.* $\alpha < 1$.
2. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Calculons* : $\displaystyle\int_\varepsilon^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^{1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \left[\ln|t|\right]_\varepsilon^{1} = -\ln \varepsilon & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$. *On constate alors que, lorsque* $\varepsilon \longrightarrow 0+$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *converge vers une limite finie si et seulement si* $1-\alpha > 0$ *i.e.* $\alpha < 1$.

Le résultat suivant est admis, cette intégrale interviendra dans un chapitre ultérieur.

Théorème ANA.11.8 | Intégrale de Gauß

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Preuve La valeur est admise, la convergence est provisoirement admise.

2.2. Propriétés des intégrales convergentes

Proposition ANA.11.7 | Propriétés de l'intégrale.

Soent $a, b \in \mathbf{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ tels que $a \neq b$. Alors :

1. **(Linéarité)** L'ensemble des fonctions f des fonctions définies et continues (ou éventuellement sauf en un nombre fini de points) sur $]a,b[$ ($[a,b[$ ou $]a,b]$) telles que $\displaystyle\int_a^b f$ converge est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et l'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire sur cet espace, *i.e.* si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent avec f, g continues (ou éventuellement sauf en un nombre fini de points) sur $]a,b[$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge aussi et
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$
2. Avec les mêmes notations que précédemment,
   - si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ diverge.
   - Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ divergent, **on ne peut pas conclure** pour la nature de $\displaystyle\int_a^b (f+g)$.
3. **(Positivité)** Soit f définie et continue sur $[a,b[$ ($[a,b[$ ou $]a,b]$) ou éventuellement sauf en un nombre fini de points. Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, et si f est positive, alors on a $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
4. **(Croissance)** Avec les hypothèses précédentes, si, pour tout $t \in]a,b[$ ($[a,b[$ ou $]a,b]$), $f(t) \leq g(t)$, et les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent, alors
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$
5. **(Relation de Chasles)** Soit $c \in]a,b[$. Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, il en est de même

de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$, et on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve Nous admettons toutes ces propriétés qui découlent de simples passages à la limite dans celles que nous connaissons déjà pour l'intégrale sur un segment.

Attention

On veillera donc, avant d'invoquer la linéarité de l'intégrale pour des intégrales généralisées, à *justifier la convergence de toutes les intégrales* apparaissant dans le calcul.

Exemple 27 — ***d'égalité illicite*** L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais on **ne peut pas écrire** :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \underbrace{\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}}}_{\text{interdit}}$$

car les deux intégrales du membre de droite sont divergentes.

Enfin, nous pouvons généraliser sans peine la relation fondamentale de l'analyse dans le cas où l'une des bornes est infinie. Cela nous servira notamment dans le Chapter ALEA.14.

Proposition ANA.11.8 | Intégrale généralisée à une borne variable

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ converge. Alors :

- la fonction

$$g : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} f \text{ est bien définie.}$$

- g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-\infty}^{x} f\right) = f(x).$$

Preuve

2.3. Calculs d'intégrales

Nous cette sous-section, nous voyons comment intégrer par parties et réaliser des changements de variable dans les intégrales généralisées.

2.3.1. Technique d'intégration par parties

En pratique, les intégrations par parties se feront *toujours* en revenant à des intégrales sur un segment, et en passant à la limite dans les bornes ensuite (ce qui montrera alors la convergences des intégrales généralisées qui apparaissent dans le calcul). La formule déjà connue reste donc vraie.

Méthode intégration par parties pour les intégrales généralisées

1. Revenir à une intégrale partielle.
2. Utiliser la formule déjà connue sur le segment.
3. Chercher à passer à la limite.

Attention

Toute intégration par parties doit être justifiée !

Exemple 28 — Calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2.3.2. Changement de variables

Pour simplifier, on énonce la formule de changement de variable dans le cas d'intégrales généralisées en deux points. Puisqu'une intégrale sur un intervalle du type $]a,b]$ ou $[a,b[$ peut être vue comme généralisée sur $]a,b[$, la formule est donc vraie pour tout type d'intégrale généralisée.

Théorème ANA.11.9 | Changement de variables

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $\alpha < \beta$, et φ une fonction, appelée *changement de variables*, de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone sur $]\alpha,\beta[$ de limites :

$$a = \lim_{\alpha^+} \varphi, \quad b = \lim_{\beta^+} \varphi.$$

Soit de plus $f \in \mathscr{C}^0(]a,b[,\mathbf{R})$ (si $a < b$) ou $f \in \mathscr{C}^0(]b,a[,\mathbf{R})$ (si $a > b$). Alors les intégrales

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{sont de même nature,}$$

et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

«On pose $u = \varphi(t)$»

Attention

- Tout changement de variable doit être justifié !
- Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en intégrale généralisée et vice-versa. Dans ce cas, à condition de le remarquer, la convergence des deux intégrales est immédiate.

Preuve Écrivons tout d'abord la formule de changement de variable déjà connue sur les segments. Soient alors $x \in]\alpha,\beta[$ et $y \in [x,\beta[$, alors puisque φ est de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_x^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(ChgtVarSeg)}$$

Constatons également que par hypothèse φ réalise une bijection de $]\alpha,\beta[$ vers $]a,b[$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ converge, *i.e.* pour tout $c \in]a,b[$, les intégrales

$$\int_a^c f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_c^b f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{convergent.}$$

Ainsi, par hypothèse la fonction $y \longrightarrow \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(u)\,\mathrm{d}u$ admet une limite lorsque $y \longrightarrow \beta-$, donc c'est le cas aussi de $y \longrightarrow \int_x^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ d'après (ChgtVarSeg). Ceci étant vrai pour tout x, et comme φ est bijective donc tout réel $c \in]\alpha,\beta[$ s'écrit sous la forme $\varphi(x)$ pour un certain x, on obtient que :

$$\forall c \in]\alpha,\beta[, \quad \int_c^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

En faisant de-même pour $x \longrightarrow \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(u)\,\mathrm{d}u$ lorsque $x \longrightarrow \alpha+$, on obtient que

$$\forall c \in]\alpha,\beta[, \quad \int_\alpha^c f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On montre exactement de la même façon, *i.e.* en exploitant (ChgtVarSeg) que si $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ converge, alors $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi. Enfin, reprenons (ChgtVarSeg) : pour $x \in]\alpha,\beta[$ et $y \in [x,\beta[$, nous avons

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_x^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc en faisant $x \longrightarrow \alpha$, on déduit

$$\int_a^{\varphi(y)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

puis le résultat en faisant $y \longrightarrow \beta$.

On notera que, étant donné que φ est une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, nous avons $\lim_{t\longrightarrow\alpha} \varphi(t) = a$ et $\lim_{t\longrightarrow\beta} \varphi(t) = b$ dans le cas où φ est strictement croissante (et l'inverse sinon). C'est ce point qui est utilisé de manière centrale dans la preuve et qui n'a pas lieu d'être sur un segment car on ne passe pas à la limite.

Attention

L'hypothèse de monotonie est cruciale. En effet, si on réalise le changement de variable $t = u^2$ dans

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{u}\,du,$$

qui diverge $\left(\text{car par exemple } \int_{-1}^{0} \frac{1}{u}\,du \text{ diverge}\right)$, alors on obtiendrait que I_1 a même nature que

$$I_2 = \int_{1}^{1} \frac{1}{2t}\,dt = 0$$

qui elle, converge.

Exemple 29 — Déterminer la nature des intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué. Les calculer en cas de convergence.

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^2}\,du$. <u>Indication :</u> *On posera* $u = \tan(t)$.

2. $I = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))}\,dt$. <u>Indication :</u> *On posera* $t = e^v$.

Corollaire ANA.11.1 | Conséquence à l'aide de la parité

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $]-a, a[$ avec $a \in]0, +\infty]$. Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f$, $\int_0^a f$ sont de même nature et, en cas de convergence :
$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f.$$
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle $]-a, a[$ avec $a \in]0, +\infty]$. Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f$, $\int_0^a f$ sont de même nature et, en cas de convergence :
$$\int_{-a}^{a} f = 0.$$

Preuve Nous faisons la preuve dans le cas pair, l'autre est identique.

Exemple 30 — On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *Puisque* *la fonction* $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ *est une fonction paire, et que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ *converge,*[10] *alors* $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ *converge également. De plus,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Faisons le changement de variable « $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ *» dans* $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$*, ce changement de variable est possible puisque la fonction* $t \longmapsto \frac{t}{\sqrt{2}}$ *est* $\mathscr{C}^1$ *strictement croissante. Ainsi,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

2.4. Intégrales de fonctions de signe constant

Cadre

Nous nous intéressons dans cette section aux intégrales de fonctions positives, et continues sauf éventuellement aux bornes.[11] **Les résultats analogues s'appliquent aux fonctions négatives en considérant** $\int(-f)$.

Comme pour les séries, l'étude spéciale des intégrandes positives est motivée par le fait suivant ; l'intégrale partielle d'une intégrale de fonction positive est monotone. Soit donc f une fonction continue et positive sur $[a,b[$, alors pour tous $x \leqslant y$ tels que $x,y \in [a,b[$:

$$\int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f \geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad \int_a^y f \geqslant \int_a^x f.$$

[10]Résultat toujours admis pour le moment

[11]Pour les fonctions continues sauf en un nombre fini de points, il suffit d'appliquer ces résultats à plusieurs intégrales

La fonction $x \in [a,b[\longmapsto \int_a^x f$ est donc croissante, et sa convergence (la convergence de l'intégrale donc) se réduit à son éventuel caractère majoré (d'après le théorème de convergence monotone pour les fonctions). Le même constat peut être fait pour une intégrale généralisée en b par exemple, ou même généralisée en les deux bornes.

En résumé :

les intégrales partielles d'une intégrale de signe constant sont monotones !

On déduit alors immédiatement le théorème suivant.

Proposition ANA.11.9 | Convergence des intégrales de fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b[$ (*resp.* $]a,b]$). Alors :

$$\int_a^b f \quad \text{converge} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{la fonction } x \longmapsto \int_a^x f \text{ est majorée sur } [a,b[\left(\textit{resp. } x \longmapsto \int_x^b f \text{ sur }]a,b]\right).$$

Comparaison d'intégrales de fonctions positives.

Théorème ANA.11.10 | Comparaison des intégrales de fonctions positives

Soient $f,g \in \mathscr{C}^0([a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$, **positives**, telles que pour tout $t \in [a,b[$ (ou $]a,b]$) ou $]a,b[$,

$$0 \leq f(t) \leq g(t).$$

- Si l'intégrale $\int_a^b g$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge.
- Si l'intégrale $\int_a^b f$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g$ diverge.

Preuve Commençons par traiter le cas où $f,g \in \mathscr{C}^0([a,b[)$.

- On contrapose simplement la première partie.

Le cas $f,g \in \mathscr{C}^0(]a,b])$ se traite de la même manière. Enfin, supposons que $f,g \in \mathscr{C}^0(]a,b[)$.

- Si $\int_a^b g$ converge, alors pour tout $c \in]a,b[$, $\int_a^c g$, $\int_c^b g$ convergent. Donc en appliquant les deux cas précédents, on déduit que pour tout $c \in]a,b[$, $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ convergent aussi. Ainsi, $\int_a^b f$ converge.
- On contrapose simplement la première partie.

L'utilisation du théorème de comparaison se fera en général au travers de deux moyens :

- soit on vous a fait trouver un encadrement (ou alors elle est évidente comme dans les exemples précédents),
- soit on utilise la formulation avec des équivalents ci-après. Elle est officiellement [H.P] , comme pour les séries, mais les sujets la nécessitant l'admettent en préambule d'exercice.

Corollaire ANA.11.2 | Comparaison des intégrales de fonctions positives avec ∼ [H.P]

Soient $f,g \in \mathscr{C}^0([a,b])$ (*resp.* $]a,b]$) **positives**, et telles que

$$f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t), \quad \left(\textit{resp.} \quad f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)\right).$$

Alors : $\quad \int_a^b f \quad$ et $\quad \int_a^b g \quad$ sont de même nature.

On utilisera donc ce résultat **uniquement si l'énoncé vous le permet**.

Attention — Faux si les fonctions ne sont pas positives

Pour les fonctions qui ne sont pas de signe constant, les théorèmes de comparaison ne s'appliquent pas : considérer sur $[1,+\infty[$ les fonctions f,g définies par :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}, \quad g(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \frac{|\sin(t)|}{t}.$$

Elles sont équivalentes en $+\infty$ mais leurs intégrales ne sont pas de même nature.

Preuve *(Point clef — **Traduire l'équivalent à l'aide d'une inégalité**)*

Faisons par exemple le cas où f,g sont définies sur $[a,b[$, supposons que $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$. Cela signifie que $g(t)$ est non nulle pour t assez proche de b et que $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t\to b]{} 1$, *i.e.*

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [b-\eta, b+\eta], \quad \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| < \frac{1}{2}.^{a}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on constate que pour t assez proche de b, $\frac{f(t)}{g(t)}$ est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$:

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [b-\eta, b+\eta], \quad -\frac{1}{2} < \frac{f(t)}{g(t)} - 1 < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{f(t)}{g(t)} < \frac{3}{2}.$$

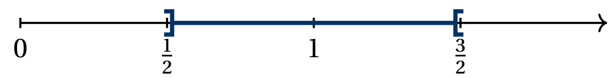


FIG. ANA.11.4. : Le quotient $\frac{f(t)}{g(t)}$ est dans cet intervalle, au moins pour t assez proche de t_0

Donc pour t assez proche de b, on a finalement l'encadrement ci-après :

$$0 \leqslant \frac{g(t)}{2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{3g(t)}{2}. \quad (\star)$$

On peut à présent appliquer le théorème de comparaison.

- Supposons que $\int_a^b f$ converge, alors puisque $0 \leqslant \frac{g(t)}{2} \leqslant f(t)$ pour t assez proche de b — partie gauche de $(\star)$ — le théorème de comparaison livre que $\int_a^b \frac{g}{2}$ converge et donc la convergence de $\int_a^b g$.

 🅭

- Supposons que $\int_a^b f$ diverge, alors puisque $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{3g(t)}{2}$ pour t assez proche de b — partie droite de ($\star$) — le théorème de comparaison livre que $\int_a^b \frac{3g}{2}$ diverge et donc $\int_a^b g$ diverge.

On a donc montré que les deux intégrales ont la même nature.

Exemple 31 — Déterminer la nature des intégrales ci-après, en appliquant le théorème de comparaison si une inégalité est évidente, ou le critère sur les équivalents sinon.

1. L'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3. Retour sur l'Exemple 25. Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$?

[a] Définition de la limite avec « $\varepsilon = \frac{1}{2}$ »

Méthode Convergence d'intégrale à intégrande exponentielle décroissante

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(t) \xrightarrow[]{t\longrightarrow\infty} \infty$. Alors :

1. $t^2\mathrm{e}^{-f(t)} \xrightarrow[]{t\longrightarrow\infty} 0$ par croissances comparées,
2. donc pour t assez grand, $t^2\mathrm{e}^{-f(t)} \leqslant 1 \implies 0 \leqslant \mathrm{e}^{-f(t)} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

3. Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, le théorème de comparaison donne la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-f(t)}$.[12]

2.5. Fonctions de signe quelconque & Convergence absolue

Nous considérons de nouveau dans cette section des fonctions non forcément positives. Nous allons regarder une notion de convergence plus forte que la convergence des intégrales partielles : il s'agit de la *convergence absolue.*

Définition ANA.11.11 | Intégrale absolument convergente

Soit f une fonction continue définie sur $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est *absolument convergente* (ou que f est *intégrable*) si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 2.3 — L'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est d'intégrande positive, tous les critères vus précédemment s'appliquent donc.

Définition ANA.11.12 | Intégrale semi-convergente

Soit f une fonction continue définie sur $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est *semi-convergente* si $\displaystyle\int_a^b f$ converge mais pas $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Théorème ANA.11.11 | La convergence absolue implique la convergence

Soit f une fonction continue définie sur $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$.

$$\int_a^b f \quad \text{est absolument convergente} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \quad \text{est convergente.}$$

Autrement dit, toute intégrale absolument convergente est convergente.

[12] Attention à bien démarrer l'intégrale à une borne strictement différente de zéro, 1 par exemple.

Preuve Nous avons :

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f| \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \left(f+|f|\right)$ est d'intégrande positive, tout comme $\displaystyle\int_a^b |f|$ qui converge par hypothèse, donc en appliquant le théorème de comparaison, nous déduisons que :

$$\int_a^b \left(f+|f|\right) \quad \text{converge.}$$

Mais comme $f = \left(f+|f|\right) - |f|$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ s'exprime alors comme la différence de deux intégrales convergentes, elle est donc elle aussi convergente.

Exemple 32 — L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Exemple 33 — Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exemple 34 — Déterminer la nature et la valeur en cas de convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t^4)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Proposition ANA.11.10 | Structure d'espace vectoriel

Soient f et g deux fonctions définies sur $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$ d'intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ absolument convergentes et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ est absolument convergente.
- En particulier, l'ensemble des fonctions définies sur $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$ d'intégrales absolument convergentes est un espace vectoriel.

Preuve

Proposition ANA.11.11 | Inégalité triangulaire généralisée

Soit f une fonction continue définie sur $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$. Si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente, alors :

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Preuve

2.6. Plan d'étude d'une intégrale

Méthode Plan d'étude d'une intégrale

Soit f continue ou continue sauf en un nombre fini de points sur $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Il s'agit de se poser les questions dans l'ordre suivant afin d'analyser l'existence de l'intégrale.

1. Suis-je capable de calculer l'intégrale $\int_a^A f$ $\left(\text{ou } \int_A^a f \text{ en fonction du cas}\right)$, ou les deux dans le cas de $]a, b[$) explicitement pour A dans l'intervalle d'intégration ? Si oui, on la calcule et on analyse l'existence d'une limite en A.
2. Sinon, et ce sera l'immense majorité des cas, on se demande si :
   - elle est positive, dans ce cas on essaie de la majorer ou minorer par une fonction simple dont on connaît la nature de l'intégrale. On utilise éventuellement des développements limités et relations de comparaisons pour cela.
   - elle n'est pas positive, on étudie la convergence absolue.

⋆⋆⋆ Fin du chapitre ⋆⋆⋆

3. EXERCICES

Exercice ANA.11.1 | Vrai ou Faux ?

1. Une primitive de $x \mapsto \cos(-x+1)$ est $x \mapsto \sin(x-1)$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(a^2+x^2)^n}$ est $x \mapsto \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$.
3. $\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$,
4. Si f est continue sur $[0,1]$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x$ converge.

3.1. Intégrales sur un segment

Exercice ANA.11.2 | Avec décomposition d'une fraction rationnelle On considère la fonction f définie sur $]-3,2[$ par $f(x) = \frac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$ pour tout $x \in]-3,2[$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b, c que l'on déterminera, tels que

$$\forall x \in]-3,2[, \quad f(x) = a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2}.$$

2. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution (exercice ANA.11.2)

1. On cherche a, b, c de sorte que :

$$\forall x \in]-3,2[, \quad f(x) = a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(x+3)(x-2)+b(x-2)+c(x+3)}{(x+3)(x-2)}.$$

En développant puis en factorisant numérateur suivant les degrés, on déduit la condition :

$$\forall x \in]-3,2[, \quad a\cdot x^2 + x(-2a+3a+b+c) + (-6a-2b+3c) = 3x^2+4x-25.$$

Soit le système de conditions

$$a = 3, \quad b+c = 1, \quad -2b+3c = -7.$$

Après résolution : $5c = -5$, $c = -1$ puis $b = 2$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]-3,2[, \quad f(x) = 3 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2}}.$$

2. La fonction f est continue sur $[0,1]$, en tant que quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale existe bien. Et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f &= \int_0^1 3\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-2}\\ &= 3 + 2\left[\ln|x+3|\right]_0^1 - \left[\ln|x-2|\right]_0^1\\ &= 3 + 2\ln 4 - 2\ln 3 + \ln 2\\ &= \boxed{3 + 5\ln 2 - 2\ln 3.}\end{aligned}$$

Exercice ANA.11.3 | Changements de variables

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
   2.1) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$,
   2.2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$, *Indication : Poser $x = \tan t$.*

Solution (exercice ANA.11.3)

1. Faisons le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, la fonction $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ étant $\mathscr{C}^1$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\boxed{\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t.}$

2. 2.1) Posons $u = \frac{1}{t}$, $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. Donc comme $t \in [1, \mathrm{e}] \longmapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on déduit que :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2} \,\mathrm{d}t = \int_1^{1/\mathrm{e}} (-\ln u)(-\mathrm{d}u) = \int_1^{1/\mathrm{e}} \ln u \,\mathrm{d}u.$$

Puis en utilisant une primitive du logarithme, on obtient :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2} \,\mathrm{d}t = [u \ln u - u]_1^{1/\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \boxed{1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}.$$

2.2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$. Faisons le changement $x = \tan t, \mathrm{d}x = (1+\tan^2(t))\,\mathrm{d}t$. Donc comme tan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on déduit :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2(t))\,\mathrm{d}t}{(1+\tan^2(t))^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}.$$

Mais comme $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, on a $\sqrt{1+\tan^2} = \frac{1}{|\cos t|}$. Donc puisque cos est positive sur $[0, \pi/4]$, on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Exercice ANA.11.4 | Intégrale au service d'un équivalent

1. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(x)\mathrm{d}x.$
2. En déduire que : $\quad \ln(n!) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n).$

Solution (exercice ANA.11.4)

1. Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Alors :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \ln(k) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(k+1).$$

Donc en intégrant entre k et $k+1$:

$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln(k+1).$$

Sommons entre $k = 1$ et $k = n$:

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n \ln(k+1).$$

Puis par propriété du logarithme et relation de Chasles,

$$\ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln((n+1)!).$$

On peut ensuite remettre le terme souhaité au milieu :

$$\boxed{\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x.}$$

2. On sait qu'une primitive du logarithme est $x \longmapsto x\ln(x) - x$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Donc

$$[x\ln(x) - x]_1^n \leqslant \ln(n!) \leqslant [x\ln(x) - x]_1^{n+1}.$$

D'où, après calculs :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1.$$

Et enfin, en mettant $n \ln n$ en facteur :

$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \leqslant \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n}{\ln n}. \quad (\star)$$

Mais

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le théorème d'encadrement dans $(\star)$ permet alors de conclure : $\boxed{\ln(n!) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n).}$

Exercice ANA.11.5 | Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ des suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad v_n = \frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Solution (exercice ANA.11.5)

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

car $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue

Pour la seconde, on va plutôt passer au logarithme pour faire apparaître des sommes.

$$\ln v_n = -\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Or, puisque $x \in [0,1] \longmapsto \ln(1+x)$ est continue, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\ln v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ par opération sur les limites. Donc par composition : $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$

Exercice ANA.11.6 | **Méthode des trapèzes sur un exemple** On pose pour tout $t \in [0,1]$,

$$h(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}, \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 h \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,$$

$$\mathrm{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right), \qquad \mathrm{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

1. Vérifier que h est croissante.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$,
$$\frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{J} \leqslant \mathrm{V}_n$.
4. Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\left|\mathrm{J} - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2}\right| \leqslant \frac{h(1)-h(0)}{2n}.$$
5. Écrire une fonction qui prend en paramètre et qui retourne une valeur approchée de J à ε près.
6. Que représente géométriquement la quantité $\frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2}$?

Solution (exercice ANA.11.6)

1. Soit $t \in [0,1]$. Alors
$$h'(t) = \frac{\mathrm{e}^t(1+t)-\mathrm{e}^t}{(t+1)^2} = \frac{t\cdot\mathrm{e}^t}{(t+1)^2} \geqslant 0.$$
Donc $\boxed{h \text{ est une fonction croissante.}}$
2. Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$, alors pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a :
$$h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant h(t) \leqslant h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$
$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}t.$$
intégration

Puis en calculant la différence des deux bornes, on déduit l'encadrement souhaité :
$$\boxed{\frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right).}$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

On reconnaît alors :

$$\boxed{\mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{J} \leqslant \mathrm{V}_n}.$$

4. Soit $n \geqslant 1$, la majoration est équivalente à :

$$-\frac{h(1)-h(0)}{2n} \leqslant \mathrm{J} - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2} \leqslant \frac{h(1)-h(0)}{2n}.$$

Mais comme $\mathrm{J} \leqslant \mathrm{V}_n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2} &\leqslant \mathrm{V}_n - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2} \\
&= \frac{\mathrm{V}_n-\mathrm{U}_n}{2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(h\left(\frac{k+1}{n}\right) - h\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{h(1)-h(0)}{2n}.
\end{aligned}$$

téléscopage

De-même pour le minorant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2} &\geqslant \mathrm{U}_n - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2} \\
&= \frac{\mathrm{U}_n-\mathrm{V}_n}{2} \\
&= \frac{h(0)-h(1)}{2n}.
\end{aligned}$$

téléscopage

Donc :

$$\boxed{\left|\mathrm{J} - \frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2}\right| \leqslant \frac{h(1)-h(0)}{2n}}.$$

5. D'après la question précédente, la moyenne des sommes est une bonne approximation de J.

```python
import math as ma

def h(x):
    return ma.exp(x)/(1+x)

def trapeze(h, eps):
    n = 1
    while (h(1)-h(0))/(2*n) > eps:
        n += 1
    # on a calculé le bon n, puis on calcule le T associe
    T = 0
    for k in range(0, n):
        T += h(k/n)+h((k+1)/n)
    return T/(2*n)
```

On peut comparer par exemple avec les méthodes des rectangles du cours.

```
>>> trapeze(h, 10**(-3))
1.125387830946576
>>> rectangle_RD(h, 0, 1, 10**3)
1.1255657101712513
>>> rectangle_RD(h, 0, 1, 10**3)
1.1255657101712513
```

6. Que représente géométriquement la quantité $\frac{\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n}{2}$? La somme des aires des trapèzes de base les segments $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

Exercice ANA.11.7 | Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0.

2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$?
3. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$. Déduire des résultats précédents la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et la valeur de sa limite.

Solution (exercice ANA.11.7)

1. $\mathrm{I}_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} = \left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\sqrt{\mathrm{e}}-1}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors, en faisant une intégration par parties, on déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^1 (1-t)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1 (n+1)(1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t + 2\left[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^1\\ &= 2(n+1)2^{n+1}n!\mathrm{I}_n - 2.\end{aligned}$$

$t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}, t \longmapsto (1-t)^{n+1}$ *sont* $\mathscr{C}^1$

Donc finalement

$$2^{n+2}(n+1)!\mathrm{I}_{n+1} = 2(n+1)2^{n+1}n!\mathrm{I}_n - 2.$$

Ou autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}}.$$

Cette relation de récurrence n'est pas standard. En revanche, on peut majorer l'intégrale :

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 \left|(1-t)^n\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right|\mathrm{d}t.$$

Or, en utilisant la croissance de l'exponentielle

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|(1-t)^n\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right| \leqslant 1\sqrt{\mathrm{e}}.$$

Donc :

$$0 \leqslant |\mathrm{I}_n| \leqslant \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n+1}n!} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = 0}$.

3. Nous avons établi

$$\mathrm{I}_{k+1} = \mathrm{I}_k - \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}.$$

Donc en sommant entre 0 et n, on déduit

$$\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}.$$

Ce qui, par téléscopage, donne :

$$\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{S}_{n+1} - \frac{1}{2^0 0!}.$$

Donc en faisant $n \to \infty$, on déduit :

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \mathrm{I}_0 + 1 = \boxed{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

En d'autres termes, la série associée converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^k}{k!} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Ce que l'on savait déjà grâce au cours sur les séries.

Exercice ANA.11.8 | On pose $f(t) = \frac{\exp(t)-1}{t^2} - \frac{1}{t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}^\star$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. On suppose $0 < a < b$. On note

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad g(x) = \int_{ax}^{bx}\frac{\exp(t)-1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+.

Solution (exercice ANA.11.8)

1. Faisons un développement limité au voisinage de 0 pour la fonction f. On a :

$$f(t) = \frac{\exp(t)-1}{t^2} - \frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t+t^2+o(t^2)}{t^2} - \frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1+o(1) \xrightarrow{t\longrightarrow 0} 1.$$

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en zéro, en posant } f(0)=1.}$

2. On suppose que $0<a<b$. Faisons intervenir la fonction f en écrivant :

$$g(x) = \int_{ax}^{bx} f + \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Choisissons une primitive de f sur $\mathbf{R}^+$, que l'on note F. Alors

$$g(x) = \mathrm{F}(bx) - \mathrm{F}(ax) + \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Or, F est continue car dérivable sur $\mathbf{R}^+$, donc

$$\mathrm{F}(bx) - \mathrm{F}(ax) \xrightarrow{x\longrightarrow 0^+} \mathrm{F}(0)-\mathrm{F}(0)=0.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{x\longrightarrow 0^+} g(x) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Exercice ANA.11.9 | **Intégrale à bornes variables** Soit $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xu)^2}\,\mathrm{d}u$ pour tout $x\in\mathbf{R}$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\forall x \in \mathbf{R},\quad \mathrm{F}(x) = x\mathrm{G}(x)$.

2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et que :

$$\forall x \neq 0 \quad \mathrm{G}'(x) = \frac{xf(x)-\mathrm{F}(x)}{x^2}, \quad \text{où } f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Est-elle dérivable en zéro ?

3. En déduire les variations de G.

Solution (exercice ANA.11.9)

1. On a envie de poser $t = xu$ dans la seconde intégrale. Le changement est licite puisque $u \longmapsto xu$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ pour tout $x \neq 0$ — on ne peut faire ce changement si $x=0$ puisqu'on ici on a besoin de diviser par la dérivée, qui est nulle. Donc,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xu)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{x}.$$

Donc en multipliant par x, on déduit :

$$\forall x \neq 0 \quad \mathrm{F}(x) = x\mathrm{G}(x).$$

Notez que la formule est vraie aussi pour $x=0$ puisque $\mathrm{F}(0)=0$ et $0\mathrm{G}(0)=0$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{F}(x) = x\mathrm{G}(x)}.$$

2. Soit $x \neq 0$, on a

$$\mathrm{G}(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x}.$$

Donc G est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ car F l'est (c'est l'unique primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ s'annulant en zéro). Et :

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star, \quad \boxed{\mathrm{G}'(x) = \frac{f(x)\cdot x - \mathrm{F}(x)}{x^2}}.$$

Montrons que G est dérivable en zéro. Et en fait elle n'est pas continue en zéro ! Puisque $\mathrm{G}(0)=1$, alors que :

$$\forall x \neq 0, \quad \mathrm{G}(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x-0} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} f(0) = 1 = \mathrm{G}(0).$$

Donc : $\boxed{\text{G est continue en zéro.}}$ De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{G(x)-G(0)}{x-0} = \frac{\frac{F(x)}{x}-1}{x} = \frac{F(x)-x}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{(F(x)-x)-(F(0)-0)}{x}.$$

Or, puisque $x \longmapsto F(x)-x$ est dérivable en zéro,

$$\frac{(F(x)-x)-(F(0)-0)}{x} \xrightarrow[]{x\longrightarrow 0} f(0)-0=1,$$

et donc

$$\frac{G(x)-G(0)}{x-0} \xrightarrow[]{x\longrightarrow 0^{\pm}} \pm\infty.$$

Ainsi, $\boxed{\text{G n'est pas dérivable en zéro.}}$

3. La meilleure option est de ne pas utiliser la dérivée. Soient $x \leqslant y$ deux réels. Alors

$$\forall u \in [0,1], \quad e^{-(yu)^2} \leqslant e^{-(xu)^2}.$$

Donc en intégrant entre 0 et 1, on déduit : $G(y) \leqslant G(x)$. Ainsi, $\boxed{\text{G est une fonction décroissante.}}$

Exercice ANA.11.10 | **Intégrale sur une période d'une fonction continue périodique** Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, supposée de plus T-périodique avec $T > 0$.

1. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt.$$

2. En déduire :

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \int_0^T f = \int_a^{a+T} f.$$

Solution (exercice ANA.11.10)

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors faisons le changement $u = t - T$, qui est $\mathscr{C}^1$, donc puis f est T-périodique, on déduit que :

$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du.$$

2. De plus, par la relation de CHASLES : $\forall a \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f &= \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f \\ &= \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_0^a f(u)\,du.\end{aligned}$$

Les termes 1 et 3 s'annulant, il vient le résultat.

Exercice ANA.11.11 | **Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ** Soient $a < b$ deux réels, et f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

1. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f\cdot g\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}.\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

On pourra introduire

$$P : \left| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \longrightarrow & \boldsymbol{R}, \\ \lambda & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)^2. \end{array} \right.$$

2. Dans le cas où f et g sont continues, on a égalité si et seulement si (f,g) est une famille liée.

Solution (exercice ANA.11.11)

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\mathrm{P}(\lambda) = \int_a^b (\lambda^2 f^2 + g^2 + 2\lambda f g).$$

Donc par linéarité de l'intégrale, on déduit :

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 = \int_a^b (\lambda f + g)^2 \geqslant .$$

Donc P est un trinôme en λ, qui est de plus positif et coefficient dominant positif aussi. Ainsi, le discriminant de P est négatif, de sorte que

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4 \cdot \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2 \leqslant 0.$$

En passant à la racine, on déduit alors

$$\boxed{\left|\int_a^b f \cdot g\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} . \sqrt{\int_a^b g^2}}.$$

2. On a égalité dans dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \quad &\iff \quad \exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ &\iff \quad \exists \lambda \in \mathbf{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + g)^2 = 0 \\ &\iff \quad \lambda f + g = 0 \\ &\iff \quad \boxed{(f, g) \text{ liée.}} \end{aligned}$$

intégrande positive

Exercice ANA.11.12 | Intégrale à paramètre Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que f est bien définie et calculer $f(0)$.
2. À l'aide d'une méthode des rectangles, proposer un script permettant de réaliser son tracé sur l'intervalle $[0, 10]$.
3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $\quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{\ln 2}{2} \left|x - y\right|$.
4. Montrer que f est continue bornée sur $\mathbf{R}$.

Solution (exercice ANA.11.12)

1. Puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t \longmapsto \frac{\sin(tx)}{1+t^2}$ est continue, la fonction f est bien définie. De plus,

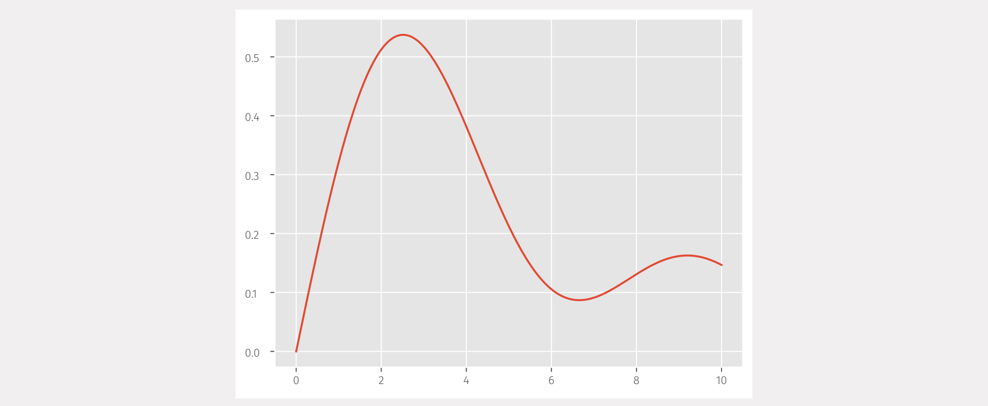
$$f(0) = \int_0^1 0 = \boxed{0}.$$

2.
```python
def g(t, x):
    return ma.sin(t*x)/(1+t**2)

def f(x):
    """
    retourne une approximation de f(x) suivant la méthode des rectangles à gauche
    """
    a = 0
    b = 1
    n = 10**3
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        S += g(a+h*i, x)
    return S*h
```

Ensuite, on trace.

```python
X = np.linspace(0, 10, 10**3)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
```



3. Constatons déjà que pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, on a l'existence d'un $c \in]a, b[$ (puisque sin est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$) vérifiant :

$$|\sin(a) - \sin(b)| = |cos(c)|\,|b-a|,$$

donc finalement on a montré que :

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \quad |\sin(a) - \sin(b)| \leqslant |b-a|. \quad (\star)$$

Soient x, y deux réels. Alors

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(y)\right| &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left|\sin(tx) - \sin(ty)\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left|tx - ty\right| \mathrm{d}t \qquad (\star) \\ &\leqslant \left|x-y\right| \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left|x-y\right| \left[\ln(1+t^2)\right]_0^1.\end{aligned}$$

Finalement, on a établi :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{\ln 2}{2}\left|x-y\right|}.$$

4. Vérifions par exemple la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $a \in \mathbf{R}$ et (x_n) telle que $x_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} a$. Montrons que $f(x_n) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} f(a)$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant \left|f(x_n) - f(a)\right| \leqslant \frac{\ln 2}{2}\left|x_n - a\right|,$$

puisque $\left|x_n - a\right| \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$, le théorème d'encadrement permet alors de conclure : $f(x_n) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} f(a)$. Donc f est continue en a pour tout a, donc est $\boxed{\text{continue sur } \mathbf{R}}$.
De plus, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\left|f(x)\right| \leqslant \int_0^1 |\sin(tx)| \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est bornée.}}$

Exercice ANA.11.13 | **Application linéaire définie par une intégrale** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\mathrm{L}_n \left| \begin{array}{lll} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F}, \\ f & \longmapsto & \mathrm{L}_n(f) : \left(x \in [0,1] \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t\right). \end{array}\right.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que $\mathrm{L}_n(f)$ est dérivable et que $\left(\mathrm{L}_n(f)\right)' = \mathrm{L}_{n-1}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{L}_n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que L_n est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

Solution (exercice ANA.11.13)

1. Le problème majeur est que la variable x est présente aussi dans l'intégrale. Nous allons développer l'intégrande à l'aide de la formule du binôme. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k(-1)^{n-k} t^{n-k}}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Rappelons que $x \longmapsto \int_0^x t^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $t \longmapsto t^{n-k} f(t)$ s'annulant en zéro. On peut alors dériver en utilisant la dérivée d'un produit. Pour tout

$x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_n(f)'(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\left(kx^{k-1}\cdot\int_0^x t^{n-k}f(t)\,\mathrm{d}t + x^k\cdot x^{n-k}f(x)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\left(kx^{k-1}\cdot\int_0^x t^{n-k}f(t)\,\mathrm{d}t + x^n f(x)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}\cdot\int_0^x t^{n-k}f(t)\,\mathrm{d}t + \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)\cdot x^n f(x) && \text{changement d'indice et binôme}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}}{k!(n-k-1)!}x^{k}\cdot\int_0^x t^{n-k-1}f(t)\,\mathrm{d}t + n!(1-1)^n\cdot x^n f(x) && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(-t)^{n-1-k}f(t)\,\mathrm{d}t + 0 && \text{binôme}\\
&= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(\mathrm{L}_n(f))' = \mathrm{L}_{n-1}(f)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Par récurrence immédiate à partir de la première question, on a que $\mathrm{L}_n(f)$ est n fois dérivable, et que $\mathrm{L}_n(f)^{(n)} = \mathrm{L}_0(f)$. Or

$$\mathrm{L}_0(f) : x \in [0,1] \longmapsto \int_0^x f$$

est l'unique primitive de f s'annulant en zéro, elle est donc aussi dérivable et

$$\mathrm{L}_n(f)^{(n+1)} = \mathrm{L}_0(f)' = f.$$

Mais f est $\mathscr{C}^1$ donc $\mathrm{L}_n(f)$ est $n+2$ fois dérivable de dérivée $(n+2)$-ième continue. Ainsi $\boxed{\mathrm{L}_n(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^{n+2}}$.

3. Si $f \in \mathrm{E}$, alors $\mathrm{L}_n(f) \in \mathrm{E}$ d'après la question précédente. De plus, soient $f, g \in \mathrm{E}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_n(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}(\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lambda\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}g(t)\,\mathrm{d}t. && \text{linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\mathrm{L}_n \text{ est un endomorphisme de E}}$. Soit de plus $f \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{L}_n$ *i.e.* telle que $\mathrm{L}_n(f) = 0$. Alors en dérivant $n-1$ fois, on obtient que : $\mathrm{L}_0(f)(x) = 0 = \int_0^x f$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi, en redérivant, on déduit que f est nulle, donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,\mathrm{L}_n = \{0\}}$.

3.2. Intégrales impropres

Exercice ANA.11.14 | Déterminer la nature des intégrales ci-dessous.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$,
- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{(3t+1)^2}\right)\mathrm{d}t$,
- $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 4t + 3}$,
- $\displaystyle\int_0^{5} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(5-t)}}$,
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$,
- $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$,
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$,
- $\displaystyle\int_0^{1} \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser, uniquement en cas de besoin, le résultat sur les équivalents.

Solution (exercice ANA.11.14)

- L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$, on étudie donc $\int_0^1 \frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$. Mais $\frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ donc la fonction est prolongeable en zéro par continuité donc la première intégrale converge. De plus, $t^2\frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1} \xrightarrow{t\to\infty} 0$

par croissances comparées, donc pour t assez grand

$$0 \leqslant \frac{t^2}{e^t - 1} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or, $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc par théorème de comparaison, on déduit que $\int_1^{\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,dt$ converge. Ainsi, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,dt \text{ converge.}}$

- L'intégrande est bien une fonction positive, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. De plus,

$$\forall t \in [2,\infty[, \quad 0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{(3t+1)^2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{(3t+1)^2} \leqslant \frac{1}{9t^2}$$

puisque pour tout $y \in \mathbf{R}^+$, $\sin(y) \leqslant y$ — à montrer par étude de fonction. Puisque $\int_2^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, on obtient par théorème de comparaison que $\boxed{\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{(3t+1)^2}\right)dt \text{ converge.}}$

- Remarquons que 3 est l'unique racine du dénominateur sur $[3,\infty[$, l'intégrale est donc généralisée en $3, \infty$. On étudie $\int_3^4 \frac{dt}{t^2-4t+3}$ et $\int_4^{\infty} \frac{dt}{t^2-4t+3}$. De plus, $t^2-4t+3 = (t-3)(t-1)$ pour tout t. Cherchons a, b deux réels de sorte que

$$\forall t > 3, \quad \frac{1}{t^2-4t+3} = \frac{a}{t-3} + \frac{b}{t-1} = \frac{a(t-1)+b(t-3)}{t^2-4t+3}.$$

Par identification, on déduit que $a+b=0$, $-a-3b=1$ soit $b = -\frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}$. On est donc capables de calculer les intégrales partielles.

— Soit $A \in]3,4]$:

$$\begin{aligned}\int_A^4 \frac{dt}{t^2-4t+3} &= \frac{1}{2}\left([\ln|t-3|]_A^4 - [\ln|t-1|]_A^4\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln|A-3| - \ln 3 + \ln(A-1)\right)\\ &\xrightarrow{A \longrightarrow 4} \frac{\ln(2/3)}{2}.\end{aligned}$$

— On obtient de-même sur $[4,\infty[$, pour $B \in]4,\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_4^B \frac{dt}{t^2-4t+3} &= \frac{1}{2}\left([\ln|t-3|]_4^B - [\ln|t-1|]_4^B\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|B-3| + \ln 3 - \ln(B-1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{B-3}{B-1} + \ln 3\right)\right)\\ &\xrightarrow{B \longrightarrow \infty} \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

L'intégrale $\boxed{\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^2-4t+3} \text{ est donc convergente.}}$

- On va procéder par équivalents. L'intégrale est généralisée en 0 et 5, on étudie donc $\int_0^{5/2} \frac{dt}{\sqrt{t(5-t)}}$ et $\int_{5/2}^5 \frac{dt}{\sqrt{t(5-t)}}$. La fonction intégrée est bien positive. De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{t(5-t)}} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{t(5-t)}} \underset{t \to 5}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5-t}}.$$

Mais, $\int_0^{5/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et $\int_{5/2}^5 \frac{1}{\sqrt{5-t}}\,dt$. En effet, montrons la convergence de la deuxième : soit $B \in [5/2, 5[$,

$$\int_{5/2}^B \frac{dt}{\sqrt{5-t}} = \left[-2\sqrt{5-t}\right]_{5/2}^B = 2\left(\sqrt{5-\frac{5}{2}} - \sqrt{5-B}\right)$$

qui converge lorsque B tend vers 5. D'après le critère de comparaison avec équivalents, on a donc prouvé que

$$\int_0^5 \frac{dt}{\sqrt{t(5-t)}} \text{ converge.}$$

- Un calcul explicite de primitive est possible. L'intégrale est généralisée en 1, soit donc $A \in [0,1[$, alors

$$\int_0^A \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1-A^2) \xrightarrow{A \longrightarrow 1} +\infty.$$

Donc $\boxed{\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ diverge.}}$

- Le résultat sur les équivalents nous convainc assez vite de la divergence. Pour le montrer, constatons que :

$$\forall x \geqslant 3, \quad \frac{\sqrt{x^3}}{x^2-1} \geqslant \frac{\sqrt{x^3}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or, pour tout $A > 3$,

$$\int_3^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_3^A \xrightarrow[A\to\infty]{} \infty.$$

Le théorème de comparaison pour les fonctions positives permet alors de conclure : $\boxed{\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \text{ diverge.}}$

- Il suffit d'établir la convergence de $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, l'intégrande étant continue sur $[0,1]$. Mais, pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Or, d'après le cours $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\boxed{\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

- La fonction n'est clairement pas positive, on majore donc la valeur absolue :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \quad 0 \leqslant \left|x \sin x \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant x\mathrm{e}^{-x}.$$

Or, par intégration par parties (*cf.* cours), $\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge, donc par théorème de comparaison $\boxed{\int_0^{\infty} x \sin x \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$ car converge absolument.

- Pour les dernières intégrales, on s'autorise le critère sur les équivalents. On a : $\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, mais $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge (*cf.* cours, avec une intégration par parties) et ln est de signe constant sur $]0,1]$ donc par théorème sur les équivalents, $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, par croissances comparées :

$$t^2 \ln(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

donc pour t assez grand, $\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}$. Mais $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, d'où la convergence par théorème de comparaison. Ainsi, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

- Là encore, on s'autorise le critère sur les équivalents. On a $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{1-t}$, les fonctions mises en jeu sont positives, et en calculant les intégrales partielles on montre facilement que $\int_{1/2}^1 \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ diverge. Donc $\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \text{ diverge.}}$

-

- On a la majoration évidente suivante $\left|\cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqslant 1$ pour tout $t \in]0,1]$, donc par théorème de comparaison, puisque $\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ converge, on déduit que $\boxed{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \text{ converge}}$ aussi.

Exercice ANA.11.15 | On considère l'intégrale c-dessous, en cas de convergence

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)(1+\mathrm{e}^{-t})}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)(1+\mathrm{e}^{-t})} = \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
2. Étudier la convergence de I, et calculer la valeur de I le cas échéant.

Solution (exercice ANA.11.15)

1. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})} &= \frac{e^t}{(1+e^t)(e^t+1)}\\ &= \boxed{\frac{e^t}{(1+e^t)^2}}.\end{aligned}$$

2. Cette précédente formule nous permet de calculer l'intégrale partielle. Constatons déjà que l'intégrande est paire, donc il suffit d'étudier la nature de $I' = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})}\,dt$. Soit $A > 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})}\,dt &= \left[-\frac{e^t}{(1+e^t)^2}\right]_0^A\\ &= \frac{1}{2} - \frac{e^A}{(1+e^A)^2} \xrightarrow[]{A\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc l'intégrale converge et $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$.

Exercice ANA.11.16 | **Factorielles sous forme d'intégrale** On définit une suite d'intégrales (I_n) par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt.$$

1. Montrer que I_n est définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer l'expression de I_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Solution (exercice ANA.11.16)

1. Montrer la convergence par récurrence.

■ **Initialisation.** Soit $A > 0$, alors $\int_0^A 1e^{-t}\,dt = 1 - e^{-A} \xrightarrow[]{A\longrightarrow\infty} 1$. Donc I_0 converge et vers 1. Donc

■ **Hérédité.** Supposons que I_n converge, alors la fonction $A \longmapsto \int_0^A t^n e^{-t}\,dt$ admet une limite quand $A \longrightarrow \infty$. Alors, puisque les fonctions $t \longmapsto t^{n+1}$, $t \longmapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, on obtient par intégration par parties :

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t}\,dt = -(n+1)\int_0^A t^n\left(-e^{-t}\right)dt + \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^A.$$

Mais $\left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^A \xrightarrow[]{A\longrightarrow\infty} 0$ par croissances comparées, et par hypothèse de récurrence, $-(n+1)\int_0^A t^n\left(-e^{-t}\right)dt \xrightarrow[]{A\longrightarrow\infty} (n+1)I_n$. Donc I_{n+1} converge.
Finalement, par principe de récurrence, on a montré que $\boxed{I_n \text{ converge pour tout } n \in \mathbf{N}}$ et $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n.}$

2. Par récurrence évidente, on a $I_n = (n-1)!I_0 = \boxed{(n-1)!}$.

Exercice ANA.11.17 | Déterminer la nature des intégrales ci-dessous en effectuant le changement de variable donné.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$ <u>*Indication :*</u> *On pourra poser* $u = \sqrt{1+e^t}$.
2. $\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,dt$. <u>*Indication :*</u> *On pourra poser* $t = \frac{1}{u}$.
3. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du$. <u>*Indication :*</u> *On pourra poser* $u = \cos t$.

Solution (exercice ANA.11.17)

1. On a $du = \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}\,dt$, ou de manière équivalente

$$\frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} = \frac{2\,du}{u^2-1}.$$

Donc, puisque $t \longmapsto \sqrt{e^t+1}$ est strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$ a même nature que

$$2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2-1}.$$

Mais pour tout $A \in \left[\sqrt{2}, \infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
2\int_{\sqrt{2}}^{A} \frac{du}{u^2-1} &= \int_{\sqrt{2}}^{A} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \left[\ln|u-1|\right]_{\sqrt{2}}^{A} - \left[\ln|u+1|\right]_{\sqrt{2}}^{A} \\
&= \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&\xrightarrow[A\to\infty]{} \boxed{\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)}.
\end{aligned}$$

2. On a $dt = -\frac{du}{u^2}$, puisque la fonction inverse est de classe $\mathscr{C}^1$ et est strictement décroissante sur $]0, \infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt$ a même nature que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt = -\int_{+\infty}^{0} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)^2-1}{\left(1+\left(\frac{1}{u}\right)^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^4}} \frac{du}{u^2}.$$

Après simplifications, on observe que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt$ a même nature que $-I$ (mais on le savait déjà !), et en cas de convergence sont égales. Donc, en cas de convergence, $I = -I$ donc $\boxed{I = 0}$. Reste à montrer la convergence. On a pour tout $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or, $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge en calculant l'intégrale partielle, donc par théorème de comparaison $\int_1^{\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt$ converge. De plus, $\int_0^1 \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt$ converge puisque l'intégrande est continue sur cet intervalle, donc I converge bien.

3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du$. On a $du = -\sin t\, dt$, et $0 = \cos(\pi/2), 1 = \cos(0)$, or $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0,1]$ est $\mathscr{C}^1$ strictement monotone donc $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du$ a même nature que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} (-\sin t)\, dt.$$

Mais

$$1+\cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right), \quad 1-\cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Donc on obtient comme nouvelle intégrale à étudier :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left|\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right| (-\sin t)\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

où à la dernière étape nous avons utilisé $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Puis enfin :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+1)\, dt,$$

qui donne après calculs de l'intégrale :

$$\left[\sin(t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1+\frac{\pi}{2}}.$$

On a donc obtenu la convergence et la valeur associée.

Exercice ANA.11.18 | **Intégrales couplées** On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

1. Montrer que ces intégrales convergent et que I = J.
2. En effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dans l'intégrale I + J, calculer la valeur commune de I et J.

Solution (exercice ANA.11.18)

1. L'intégrale I est généralisée en $+\infty$, et pour tout $t \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{1+t^4} \leqslant \frac{1}{t^4}$. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$ converge (refaire la démonstration avec l'intégrale partielle). Donc $\boxed{\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$ par critère de comparaison pour les fonctions positives. On effectue ensuite un changement de variable, qui montrera à la fois l'égalité entre les deux intégrales, et la convergence de J. Plus précisément, posons $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$. Puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est strictement monotone $\mathscr{C}^1$ de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, on a alors, sous réserve de convergence :
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} &= \int_{\infty}^{0} -\frac{1}{u^2}\frac{du}{1+\frac{1}{u^4}}\\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{u^2}}\\ &= \mathrm{J}.\end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{\text{J est aussi convergente et I = J.}}$

2. En tant que somme de deux intégrales convergentes, $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge. Faisons, comme suggéré par l'énoncé, le changement de variable $x = t - \frac{1}{t} \implies \mathrm{d}x = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2+1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Le changement est licite puisque la fonction $t \longmapsto t - \frac{1}{t}$ est strictement monotone $\mathscr{C}^1$ de $[0,\infty[$ vers $]-\infty,0]$. De plus $\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{1+t^2}{t^2} \times \frac{1}{\frac{1}{t^2}+t^2}$ et $x^2 = \left(t-\frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = x^2+2$. Donc $\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. D'où $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Or I = J, donc $\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{J} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

Exercice ANA.11.19 | Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, continue décroissante et telle que
$$\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$:
$$\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant x f(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$
3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0$.

Solution (exercice ANA.11.19)

1. Soit $x \geqslant 0$, alors puisque f est décroissante :
$$\forall t \in [x,2x], \quad f(t) \leqslant f(x),$$
donc en intégrant :
$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (2x-x)\cdot f(x) = x f(x).$$
Pour le majorant, on écrit :
$$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right], \quad f(x) \leqslant f(t),$$
donc en intégrant :
$$\int_{x/2}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2} f(x) \leqslant \int_{x/2}^{x} f(x) f(t)\,\mathrm{d}t.$$
D'où en réunissant les deux inégalités :
$$\boxed{\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant x f(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t}.$$

2. Il suffit d'écrire :

$$\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \boxed{=0}.$$

3. On a d'après la question précédente et par composition des limites la convergence suivante :

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 0.$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0}$ d'après le théorème d'encadrement appliqué à la première question.

Exercice ANA.11.20 | Lemme de Riemann-Lebesgue

1. **(Sur un segment)** Soient $a<b$ et $f\in\mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. **(Sur $\mathbf{R}^+$)** Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ telle que

$$\int_0^\infty \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t \text{ converge}, \quad f \text{ est bornée.}$$

Montrer que :

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty}\int_0^\infty f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. Les résultats précédents vous semblent-ils maintenus si cos est remplacé par sin ?