Chapitre ALEA.13.

Variables aléatoires discrètes

Résumé & Plan

Nous avons étudié dans le Chapter ALEA.12 les espaces probabilisés, cadre pour définir sur ces espaces des variables et vecteurs aléatoires. Dans ce chapitre, nous allons étudier ces objets à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable. Dans ce cas précis, nous allons donner une expression de l'espérance en terme de somme de série, qui généralisera la définition vue en première année.

La notion d'espérance a été initialement introduite par Huygens en 1657, dans son traité De Ratiociniis in Aleae Ludo («de la logique du jeu de dé»). Le nom d'espérance y apparaît en latin sous le nom de expectatio, avec l'interprétation d'être «le juste prix auquel un joueur accepterait de céder sa place dans une partie».

— Le saviez-vous?

Cadre

Dans tout le chapitre, et même lorsque cela n'est pas précisé, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

Nous avions déjà motivé l'introduction de variables aléatoires, dans le chapitre précédent.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Si Ω était fini — *i.e.* le contexte de première année — on pouvait donc l'écrire sous la forme $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec $n = \#\,\Omega$. Ainsi

$$X(\Omega) = \{X(\omega_1), \dots, X(\omega_n)\} \qquad \text{est aussi un ensemble fini.}$$

Puisque nos univers sont désormais des ensembles quelconques, le support $X(\Omega)$ devient lui aussi un ensemble quelconque. Nous étudions dans la suite le cas particulier où il est au plus dénombrable, c'est l'objet précisément de ce chapitre.

1. GÉNÉRALITÉS

On ne rappelle é pas la définition de variable aléatoire vue précédemment : consulter pour cela le Chapter ALEA.12 si besoin.

1.1. Définitions

Définition ALEA.13.1 | Variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire.

- On dit que X est *discrète* si $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable, *i.e.* en bijection avec $\mathbf{N}$ **ou** fini.
- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on parle de *variable aléatoire discrète finie*.

Pour rappel, l'hypothèse «$X(\Omega)$ est au plus dénombrable» signifie que cet ensemble s'écrit sous la forme :

- $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ s'il est dénombrable, les $x_n, n \in \mathbf{N}$ étant deux à deux distincts,
- $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in [\![0\,,\,N]\!]\}$ avec $N \in \mathbf{N}$ s'il est fini.

Notation Somme infinie sur un ensemble dénombrable

Considérons E un ensemble au plus dénombrable et $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$, on souhaite donner un sens à la quantité $\sum_{x \in E} f(x)$.

- Si E est fini, alors $E = \{x_n,\ n \in [\![0\,,\,N]\!]\}$ avec $N \in \mathbf{N}$. Alors on pose :
$$\sum_{x\in E} f(x) \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$
C'est une somme finie de première année, rien de plus à dire puisqu'elle ne dépend pas de la numérotation des éléments de E.
- Si E est dénombrable, alors $E = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Alors, **si** $\left(\sum f(x_n)\right)_{n\geqslant 0}$ converge absolument, on pose :
$$\sum_{x\in E} f(x) \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n).$$
En effet, on sait depuis le Chapter ANA.10, qu'en cas de convergence absolue, la somme ainsi définie ne dépendra pas de la numérotation (x_n) choisie pour E. Ainsi, pour utiliser cette notation, il faudra d'abord justifier la convergence absolue.

Lorsque le support est au plus dénombrable, la condition VaProp du Chapter ALEA.12 (définition d'une variable aléatoire) se réécrit comme ci-dessous.

Proposition ALEA.13.1 | Réécriture de l'hypothèse « $\{X \leqslant a\} \in \mathscr{T}$ »

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $X(\Omega)$ au plus dénombrable. Alors :

$$X \text{ est une variable aléatoire discrète} \iff \forall x \in X(\Omega), \quad \{X = x\} \in \mathscr{T}.$$

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Notons $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ avec (x_n) supposée croissante, et soit $x = x_n \in X(\Omega)$ avec $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\{X = x_n\} = \{X \leqslant x_n\} \setminus \{X \leqslant x_{n-1}\} \in \mathscr{T}$$

par propriété de stabilité par différence d'une tribu.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in X(\Omega), \quad \{X = x\} \in \mathscr{T}$. Alors

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \{X \leqslant a\} = \biguplus_{\substack{x \leqslant a \\ x \in X\Omega}} \{X = x\} \in \mathscr{T}$$

par propriété de stabilité par réunion dénombrable d'une tribu.

Proposition ALEA.13.2 | Variable aléatoire définie sur un univers au plus dénombrable

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire avec Ω au plus dénombrable. Alors :

X est une variable aléatoire discrète.

Preuve

Remarque 1.1 — Ainsi, sur les univers finis de première année, il ne pouvait exister que des variables aléatoires discrètes.

Exemple 1 — *Cas fini : lancé d'un dé et gain associé* Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur :

1. gagne le double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire.
2. Sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

Décrire l'expérience en précisant un triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ associé ainsi qu'une variable aléatoire X décrivant le gain, c'est une variable aléatoire discrète.

Exemple 2 — ***Cas dénombrable*** On lance une infinité de fois une pièce non truquée. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers nécessaires jusqu'à obtention du premier pile. Décrire l'expérience en précisant un triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ associé ainsi qu'une variable aléatoire X. On admettra qu'il existe une tribu $\mathscr{T}$ telle que X soit bien une variable aléatoire.

Système complet associé.

Définition/Proposition ALEA.13.1 | Système complet associé à une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire réelle discrète, alors :

- $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.
- En particulier, il est quasi-complet :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1, \quad \{X = x, X = x'\} = \emptyset, \quad \forall x \neq x' \in X(\Omega).$$

On l'appelle le *système complet associé à* X.

Preuve

1. Existence de $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$.

2. On a clairement $\{X = x\} \cap \{X = x'\}$ dès que $x \neq x'$ sont deux éléments de $X(\Omega)$, par définition même d'une application (un élément de l'espace de départ ne peut avoir deux images!). Reste à montrer que :

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega.$$

On a

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} \subset \Omega,$$

puisqu'une réunion de parties de Ω est encore une partie de Ω. Inversement, soit $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega)) \in X(\Omega)$ donc ω est dans l'un des $\{X = x\}$ pour $x \in X(\Omega)$, ce qui prouve

$$\Omega \subset \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}.$$

1.2. Loi & fonction de répartition

Rappelons que nous avons défini la loi de X comme l'application qui à tout tout intervalle réel I associe

$$\mathbf{P}_{\mathrm{X}}(\mathrm{I}) = \mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I}).$$

Comment simplifier cette définition dans le cas de variables aléatoires discrètes ?

$$\{\mathrm{X} \in \mathrm{I}\} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{I} \cap \mathrm{X}(\Omega)\}, \quad \text{donc} \quad \mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = \mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I} \cap \mathrm{X}(\Omega)).$$

Or,

$$\{\mathrm{X} \in \mathrm{I} \cap \mathrm{X}(\Omega)\} = \biguplus_{\substack{x \in \mathrm{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{I}}} \{\mathrm{X} = x\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I} \cap \mathrm{X}(\Omega)) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{I}}} \mathbf{P}(\mathrm{X} = x).$$

Ainsi, pour obtenir la loi, il suffit de connaître :

- d'une part l'univers-image $\mathrm{X}(\Omega)$,
- et d'autre part tous les $\mathbf{P}(\mathrm{X} = x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}(\Omega)$.

Ce constat nous mène tout droit à la définition suivante.

Définition ALEA.13.2 | Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

- **(Loi)** On appelle *loi* de la variable aléatoire réelle discrète X — par abus de langage — ou parfois *fonction de masse* la fonction encore notée $\mathbf{P}_{\mathrm{X}}$ et définie par :

$$\mathbf{P}_{\mathrm{X}} : x \in \mathrm{X}(\Omega) \longmapsto \mathbf{P}(\mathrm{X} = x).$$

- **(Déterminer la loi)** *Déterminer la loi* d'une variable aléatoire discrète c'est calculer $\mathrm{X}(\Omega)$ et $\mathbf{P}(\mathrm{X} = x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}(\Omega)$.
- **(Avoir même loi que)** Soit Y une autre variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. On dit que X, Y *ont même loi* si :

$$\forall z \in \mathrm{X}(\Omega) \cup \mathrm{Y}(\Omega)^{1}, \quad \mathbf{P}(\mathrm{X} = z) = \mathbf{P}(\mathrm{Y} = z).$$

[1] la plupart du temps, dans des contextes d'expériences aléatoires, les ensembles $\mathrm{X}(\Omega), \mathrm{Y}(\Omega)$ seront égaux

Notation

- Lorsque X, Y ont même loi, on note $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$.
- Si Y suit une loi usuelle $\mathscr{L}$ (une BERNOULLI, binomiale, *etc.*), on note $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{L}$.

Exemple 3 — Une pièce amène pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $1-p$, $0 < p < 1$. On la lance n fois de suite. Soit X le nombre de fois où pile apparaît au cours de ces lancers. Chercher la loi de X sans utiliser de résultat sur les lois usuelles.

Exemple 4 — ***Variable aléatoire constante*** Soit $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$. Alors C peut être vu comme une variable aléatoire constante, et on peut déterminer sa loi.

Exemple 5 — ***Variable aléatoire indicatrice*** Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{A} \in \mathscr{T}$ un évènement. Alors l'application $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$, et on peut déterminer sa loi.

Définition ALEA.13.3 | Loi conditionnelle

Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. On appelle *loi conditionnelle sachant* A de X la fonction

$$\mathbf{P}_X(.\mid A) : x \in X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{P}(X = x \mid A) = \frac{\mathbf{P}(\{X = x\} \cap A)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Notation

Si la loi conditionnelle précédente est une loi usuelle $\mathscr{L}$, on notera $X \hookrightarrow |_A \mathscr{L}$.

Exemple 6 — *Lancé d'un dé et gain associé conditionnel* On renconsidère l'Exemple 1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A «le résultat du dé est pair», même question sachant B «le résultat du dé est un multiple de 3».

Proposition ALEA.13.3 | La loi ne dit rien sur l'égalité de deux variables aléatoires

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

1. $X = Y \implies X \sim Y$.
2. En revanche, la réciproque est fausse : si $X \sim Y$ alors X n'est pas forcément égale à Y.

Preuve

1.

2. **est faux.** Par exemple si $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ est l'espace probabilisé associé au lancer d'une pièce **équilibrée**. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient pile, égale à 0 si on obtient face. On note Y la variable aléatoire égale à 1 si on obtient face, égale à 0 si on obtient pile.

Résumons les points précédents dans une méthode.

Méthode Répondre à la question «déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X»

1. Commencer par déterminer son support $X(\Omega)$ s'il n'est pas déjà donné *i.e.* l'ensemble de départ de $\mathbf{P}_X$.
2. Calculer les $\mathbf{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Si $X(\Omega)$ est fini, il n'y a donc qu'un nombre fini de probabilités à déterminer, on peut alors les représenter sous forme d'un tableau comme ceci :

$X = k$	k_1	k_2	$\cdots$
$\mathbf{P}(X = k)$	$\mathbf{P}(X = k_1)$	$\mathbf{P}(X = k_2)$	$\cdots$

Lien entre loi & fonction de répartition.

Proposition ALEA.13.4 | Lien avec la fonction de répartition

Soit X est une variable aléatoire discrète.

1. Si $X(\Omega)$ est fini, notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_N\}$ où $(x_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est supposée croissante. Alors pour tout $n \in [\![1\,,\,N]\!]$:
$$\mathbf{P}_X(x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1}).$$
2. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, notons $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ où (x_n) est supposée croissante, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:
$$\mathbf{P}_X(x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1}).$$
En particulier, si $X(\Omega) = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{N}$, on a :
$$\forall k \in \mathbf{Z} \text{ ou } \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$ [2]

Preuve Faisons, pour simplifier, la preuve dans le cas $X(\Omega) = \mathbf{N}$.

[2] Cette égalité est en fait une reformulation dans le cas discret de l'égalité $\mathbf{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$ vue dans la Section 3 du Chapter ALEA.12 pour les variables aléatoires générales.

Corollaire ALEA.13.1 | La fonction de répartition caractérise la loi

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. Alors :
$$X \sim Y \iff F_X = F_Y.$$

On dit aussi que la fonction de répartition *caractérise la loi* au sens suivant : deux variables aléatoires discrètes ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Preuve Faisons, pour simplifier, la preuve dans le cas $X(\Omega) = \mathbf{N}$.

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Existence d'une variable aléatoire réelle discrète de loi fixée. Un certain nombre d'énoncés de probabilité commencent par la phrase suivante :
« soit X une variable aléatoire telle que $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$ » avec $p_i \in [0,1]$, i entier et (x_i) une famille.
Ces énoncés supposent l'existence de X. Mais cela ne définit pas X en tant qu'application, c'est-à-dire $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, mais existe-t-elle vraiment ? On aimerait donc au moins savoir si une telle variable aléatoire existe sur un certain $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ à trouver : la réponse est oui dès que la somme des p_i supposés positifs vaut un, comme le

précise le théorème qui suit.

Théorème ALEA.13.1 | Variable aléatoire associé à une famille de somme un

Soit $\mathbf{X} = \{x_i,\ i \in \mathrm{N}\}$ $\left(resp.\ \mathbf{X} = \{x_i,\ i \in [\![0\,,\mathrm{N}]\!]\}\text{ avec } \mathrm{N} \in \mathbf{N}\right)$ une partie au plus dénombrable de $\mathbf{R}$, et $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ $\left(resp.\ (p_i)_{i\in[\![1\,,\mathrm{N}]\!]}\right)$ une famille de réels tels que :

$$\sum_{i\in\mathbf{N}} p_i = 1 \quad \left(resp.\ \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p_i = 1\right) \quad \text{et} \quad p_i \geqslant 0.$$

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire réelle $\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ discrète tels que :

- $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbf{X}$.
- Pour tout i, $\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{X} = x_i\right) = p_i$.

Dans la plupart des situations que nous étudierons en pratique, le travail commencera par la donnée d'une ou plusieurs variables aléatoires de lois prescrites que nous étudierons sans jamais préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ sur lequel elles sont définies.

Celui-ci est voué à rester caché et ne présente de toute façon aucun caractère d'unicité, et de nombreux choix d'espace probabilisé sont possibles pour la description d'une même situation (en voici un dans la preuve ci-après).

Preuve Faisons la preuve par exemple dans le cas dénombrable $\mathbf{X} = \{x_i,\ i \in \mathrm{N}\}$.

1. On cherche un exemple, rien qu'un, d'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et de variable aléatoire qui répondent au problème posé. Posons alors :

$$\begin{aligned}(\Omega, \mathscr{T}) &= (\mathbf{X}, \mathscr{P}(\mathbf{X}))\,,\\ \mathrm{X} &= \mathrm{Id}_\Omega = \mathrm{Id}_\mathbf{X},\end{aligned}$$

puis enfin pour $\mathbf{P}$ l'unique probabilité telle que : $\quad \mathbf{P}\left(\{x_i\}\right) = p_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ — *i.e.* celle définie dans la Section 2.4 du Chapter ALEA.12. Alors ce choix convient, puisque

- $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{Id}_\Omega(\Omega) = \Omega$,
- et si $i \in \mathbf{N}$ alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{X} = x_i\right) &= \mathbf{P}\left(\mathrm{Id}_\Omega = x_i\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega,\ \omega = x_i\}\right)\\ &= \mathbf{P}\left(x_i\right) = p_i.\end{aligned}$$

Exemple 7 — Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que : $\quad \mathrm{X}(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{X} = n\right) = \frac{1}{n(n+1)}$. Justifier l'existence de X et calculer F_X.

Exemple 8 — Existe-t-il une variable aléatoire réelle discrète X de support $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ de loi donnée par les $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geqslant 1}$?

1.3. Propriétés des variables aléatoires réelles discrètes

Dans la Section 3 nous avons vu qu'une combinaison linéaire de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle. Tout ceci reste vrai pour les variables aléatoires réelles discrètes et en plus toutes les variables aléatoires obtenues par ces opérations sont encore discrètes.

Exemple 9 — Soit $\lambda > 0$. À quelle condition sur $a \in \mathbf{R}$ existe-t-il une variable aléatoire réelle discrète X de support $X(\Omega) = \mathbf{N}$ de loi donnée par les $(p_n)_{n\geqslant 0} = \left(a\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$?

Proposition ALEA.13.5 | Structure d'espace vectoriel, opérations sur les variables aléatoires réelles discrètes

1. L'ensemble des variables aléatoires discrètes, muni de l'addition et de la multiplication de réels, est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, *i.e.* si X, Y sont discrètes, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, alors : $\lambda X + \mu Y$ est aussi une variable aléatoire réelle discrète.
2. Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles, alors : XY est une variable aléatoire réelle discrète.
3. **(Minimum/maximum)** si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires réelles discrètes, alors :
$$\min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad \max(X_1, \dots, X_n)$$
sont des variables aléatoires réelles discrètes.
4. **(Image d'une variable aléatoire discrète par une application)** Si X est discrète et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$, alors : $f(X) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & f(X(\omega)) \end{array} \right.$ est une variable aléatoire réelle discrète. Son univers-image est $f(X)(\Omega) = f[X(\Omega)]$ et sa loi est donnée par :
$$\forall y \in f(X(\Omega)), \quad \mathbf{P}\left(f(X) = y\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x = f(y)}} \mathbf{P}\left(X = y\right).$$

Preuve Nous avons déjà vu que toutes ces applications sont des variables aléatoires. On montre sans difficulté que les supports associés sont bien au plus dénombrables. Faisons la preuve dans le cas où $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est dénombrable.

1.

2.

3. Évident.

4.

Pour la loi, écrivons que pour tout $y \in f(X(\Omega))$,

$$\begin{aligned}\{f(X) = y\} &= \{f(X) = y\} \cap \left(\biguplus_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}\right) \\ &= \biguplus_{x \in X(\Omega)} \{f(X) = y\} \cap \{X = x\} \\ &= \biguplus_{x \in X(\Omega)} \{f(x) = y\} \cap \{X = x\} \\ &= \biguplus_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x = f(y)}} \{X = x\}.\end{aligned}$$

Le résultat s'en suit en passant aux probabilités.

Pour les calculs de loi de $f(X)$, il faut surtout savoir les effectuer sur des exemples de fonction f, voyons cela.

Exemple 10 — On lance un dé équilibré, et soit X la variable aléatoire égale au résultat du lancer. Déterminer les lois de X, $|X|$ et X^2.

Propriétés de la fonction de répartition d'une loi discrète. La plupart des propriétés ci-dessous ont déjà été vues dans la Section 3 du Chapter ALEA.12.

Proposition ALEA.13.6 | Fonction de répartition des variables aléatoires réelles discrètes

Soit X est une variable aléatoire discrète.

1. F_X est croissante,
2. F_X est c.à.d.l.a.g. : elle est continue à droite, et possède une limite à gauche $F(x-) \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ y<x}} F_X(y)$,
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
4. $\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$,
5. $\mathbf{P}\left(x < X \leqslant y\right) = F_X(y) - F_X(x)$,
6. $\mathbf{P}(X < x) = F_X(x-)$,
7. $\mathbf{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$.
8. La fonction F_X est constante par morceaux.[3]

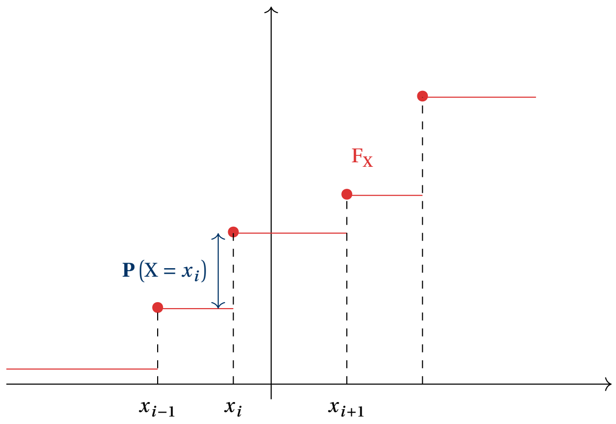


FIG. ALEA.13.1. : Allure d'une fonction de répartition dans le cas discret

Preuve Montrons 8 comme annoncé, la seule nouvelle propriété découverte.

[3]Propriété caractéristique d'une loi discrète

Exemple 11 — Calculer et tracer la fonction de répartition de X donnée par l'Exemple 8.

Enfin, et c'est un exemple **très important**, on peut remarquer que beaucoup de probabilités peuvent s'exprimer en fonction des $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ et de F_X.

Exemple 12 — ***Exprimer des évènements en fonction de la fonction de répartition et de la loi*** Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}$. Calculer les probabilités ci-dessous en fonction de $\mathbf{P}(X = n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$ et de F_X lorsque cela vous semble possible.

1. Pour $N \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X \geqslant N)$, $\mathbf{P}(X < N)$.

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{P}(X \leqslant x)$, $\mathbf{P}(X > x)$.

3. $\mathbf{P}(X \text{ pair})$, $\mathbf{P}(X \text{ est le carré d'un entier positif})$.

1.4. Indépendance

Définition ALEA.13.4 | Indépendance de variables aléatoires discrètes

Soit $X_1, \cdots, X_n$ une collection de n variables aléatoires discrètes.

- **(Indépendance)** Les variables aléatoires $X_1, \ddots, X_n$ sont dites *indépendantes* si pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$,
$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n = x_n).$$
- **(Indépendance deux à deux)** Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont dites *indépendantes deux à deux* si pour tous $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

Plus généralement, si (X_n) est une famille quelconque de variables aléatoires, elles sont dites *indépendantes* (*resp. indépendantes deux à deux*) si toute sous-famille finie est indépendante (*resp.* deux à deux indépendantes).

Notation

On notera $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ pour signifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

Définition ALEA.13.5 | Suite i.i.d.

On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes est i.i.d. (on dit *indépendantes et identiquement distribuées*) si elles sont indépendantes et de même loi.

Proposition ALEA.13.7 | Indépendance version fonction de répartition

Soit $X_1, \dots, X_n$ une collection n variables aléatoires discrètes. Alors $X_1, \dots, X_n$ sont *indépendantes* si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots X_n(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1, \dots, X_n \leqslant x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1) \times \dots \times \mathbf{P}(X_n \leqslant x_n).$$

Fonctions de variables aléatoires indépendantes. Nous admettons également les deux résultats qui suivent.

Théorème ALEA.13.2

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_n$ où pour tout $f_i : X_i(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires réelles $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes.

Exemple 13 — Si $X_1, \dots, X_3$ sont indépendantes et X_3 ne s'annule pas, alors $X_1^2, X_2^2, 1/X_3$ sont indépendantes.

Théorème ALEA.13.3 | Lemme des coalitions ou Indépendance par paquets

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors pour toutes fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, et $n_1, \dots, n_k$, k des entiers tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, où pour tout $\varphi_i : \mathbf{R}^{n_i} \longrightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires réelles

$$\varphi_1(X_1, \dots, X_{n_1}), \dots, \varphi_k(X_{n_1+\dots+n_{k-1}}, \dots, X_n)$$

sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Exemple 14 — Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont indépendantes alors $X_1^2 + X_2^2, X_3X_5, X_4$ sont indépendantes.

La proposition suivante est indiqué comme hors-programme dans la mesure où la formule obtenue n'est pas à connaître par coeur. En revanche, comme dans le cas discret, la méthode mise en jeu dans la démonstration doit être maîtrisée.

Proposition ALEA.13.8 | Minimum & Maximum de variables aléatoires discrètes [H.P]

Soient $X_1, \dots, X_n$ discrètes et mutuellement indépendantes. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \geqslant x),$$
$$\mathbf{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leqslant x).$$

Si de plus les variables aléatoires sont i.i.d. de même loi qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X, alors :

$$\mathbf{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geqslant x) = \mathbf{P}(X \geqslant x)^n,$$
$$\mathbf{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant x) = F_X(x)^n.$$

Notez que lorsque $n = 2$, on a

$$\max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2, \quad \max(X_1, X_2) \cdot \min(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2.$$

La première relation permet par exemple de calculer l'espérance de l'un connaissant l'espérance de l'autre (voir plus bas pour la définition de l'espérance).

Preuve

Attention

Les égalités

$$\mathbf{P}\left(\min\{X_1,\dots,X_n\}\leqslant x\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i\leqslant x\}\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\max\{X_1,\dots,X_n\}\geqslant x\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i\geqslant x\}\right)$$

sont vraies. Mais en revanche, les réunions précédentes ne sont **pas disjointes**.

Méthode Trouver la loi d'un min ou max de variables aléatoires discrètes indépendantes

Pour le max $X=\max(X_1,\dots,X_n)$, si $X_1,\dots,X_n$ sont par exemple à valeurs dans $\mathbf{N}$.

1. On calcule la fonction de répartition : $\mathbf{P}(X\leqslant k)=\mathbf{P}(X_1\leqslant k)\dots\mathbf{P}(X_n\leqslant k)$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
2. On calcule ensuite $\mathbf{P}(X=k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X\leqslant k)$ et $\mathbf{P}(X\leqslant k-1)$, *i.e.* $\mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}(X\leqslant k)-\mathbf{P}(X\leqslant k-1)$ pour tout entier k.

Pour $X=\min(X_1,\dots,X_n)$, remplacer dans **1)** $\leqslant$ par $\geqslant$, puis en déduire la fonction de répartition. Étape **2)** inchangée, mais utiliser la relation $\mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}(X\geqslant k)-\mathbf{P}(X\geqslant k+1)$.

Exemple 15 — Soient U_1,U_2 les résultats de 2 lancers de dés à 6 faces et non pipés, supposés indépendants. Déterminer la loi de U défini comme le plus grand des lancers. *Il est évident que* $\boxed{U(\Omega)=[\![1\,,6]\!]}$. *Soit donc* $k\in U(\Omega)$, *calculons* $\boldsymbol{P}(U=k)$. *Pour étudier un max, on utilise la fonction de répartition.*

$$\boldsymbol{P}(U\leqslant k)=\boldsymbol{P}(U_1\leqslant k,U_2\leqslant k)=\boldsymbol{P}(U_1\leqslant k)\cdot\boldsymbol{P}(U_2\leqslant k),$$

par indépendance. Or,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(U_1\leqslant k)&=\sum_{\ell=1}^{k}\boldsymbol{P}(U_1=\ell)=\frac{k-1+1}{6}\\&=\frac{k}{6}.\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\forall k\in U(\Omega),\quad \boldsymbol{P}(U\leqslant k)=\frac{k^2}{36}.$$

Puis on récupère la loi, en écrivant que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(U=k)&=\boldsymbol{P}(U\leqslant k)-\boldsymbol{P}(U\leqslant k-1)\\&=\begin{cases}\frac{k^2}{36}-\frac{(k-1)^2}{36} & \text{si } k\in[\![2\,,6]\!],\\ \frac{1}{36}-0 & \text{si } k=1,\end{cases}\\&=\frac{k^2}{36}-\frac{(k-1)^2}{36}.\end{aligned}$$

les formules se réunissent en une seule

Donc la loi de U *est la suivante, en utilisant une identité remarquable :*

$$\boxed{U(\Omega)=[\![1\,,6]\!],\quad \boldsymbol{P}(U=k)=\frac{2k-1}{36}}.$$

2. ESPÉRANCE, VARIANCE, MOMENTS

2.1. Espérance

On en vient au coeur du chapitre, la définition de l'espérance pour une variable aléatoire réelle discrète à support non forcément fini mais, plus généralement, au plus dénombrable. Reprenons le cours de première année : si $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ est fini, vous aviez appelé *espérance de* X la quantité suivante :

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{P}(X=x_i),$$

formule qui était directement inspirée du cas de la loi uniforme :

$$\mathbf{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\qquad\text{(moyenne d'une série statistique)}$$

Dans ce cadre, l'espérance était une somme finie donc existait toujours. À présent, étant donné que le support n'est plus fini, nous allons nous intéresser plutôt à la convergence d'une série, *i.e.* à une moyenne sur un « nombre infini de termes ».

Définition ALEA.13.6 | Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1. **(Admettre une espérance)** On dit que X *admet une espérance* si :
$$\left(\sum x\mathbf{P}(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)} \quad \text{converge } \underline{\textbf{absolument}}.$$
2. **(Valeur de l'espérance)** Si X admet une espérance, alors on appelle *espérance de* X la quantité
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x).$$ [4]

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite *centrée*.

Remarque 2.1 — Pourquoi supposer une convergence absolue? Nous avons vu dans le Chapter ANA.10 qu'en cas de convergence absolue, l'ordre de sommation des termes d'une série n'a aucune importance. Ainsi l'espérance définie précédemment ne dépend pas de la numérotation choisie pour les éléments de $X(\Omega) = \{x_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ (ou $\{x_n,\ n\in[\![0,N]\!]\}$).

On vérifie immédiatement que toute variable aléatoire à support fini possède une espérance.

Proposition ALEA.13.9 | Cas où $X(\Omega)$ est fini

Si $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_N\}$ avec $x_1,\dots,x_N\in\mathbf{R}$ et $N\in\mathbf{N}$, alors X admet toujours une espérance définie par :
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{N} x_n\mathbf{P}(X=x_n).$$

Proposition ALEA.13.10 | Espérance d'une indicatrice

Soit $A\in\mathscr{T}$, alors : $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

La proposition précédente paraît anecdotique, mais elle serait d'importance capitale dans de futurs chapitres, afin notamment d'interpréter les probabilités comme des moyennes et pouvoir les approcher par simulation.

Preuve Nous avons déjà établi que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète. Calculons son espérance.

Exemple 16 — Soit X une variable aléatoire décrivant le lancer d'un dé. Calculer l'espérance de X^2, en utilisant la définition de l'espérance.

[4] On rappelle encore une fois la signification du symbole somme dans cette formule : si par exemple $X(\Omega)=\{x_i,\ i\in\mathbf{N}\}$ est dénombrable, on note $\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\mathbf{P}(X=x_i)$

Exemple 17 — Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et pour tout $n \geqslant 1$: $\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
La variable X admet une espérance, calculons-là.

Exemple 18 — Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et pour tout $n \geqslant 1$: $\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. La variable X n'admet pas d'espérance, pourquoi?

Propriétés de l'espérance.

Théorème ALEA.13.4
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance. Alors :

1. **(Linéarité de l'espérance)** Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :
$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$
2. **(Positivité de l'espérance)** $X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0$, et :
$$X \geqslant 0, \quad \mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0 \text{ p.s } \left(\textit{i.e.}\ \mathbf{P}(X = 0) = 1\right).$$
Le résultat subsiste si on a seulement $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$ en hypothèse, *i.e.*
$$\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0,$$
$$\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1, \quad \mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0 \text{ p.s } \left(\textit{i.e.}\ \mathbf{P}(X = 0) = 1\right).$$
3. **(Croissance de l'espérance)**
$$X \leqslant Y \implies \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y).$$
Le résultat subsiste si on a seulement $\mathbf{P}(X \leqslant Y) = 1$ en hypothèse, *i.e.*
$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) = 1 \implies \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y).$$

Preuve
1. Nous admettons provisoirement la linéarité de l'espérance : la preuve nécessitant le théorème de transfert pour les couples aléatoires, que nous verrons plus tard.
2. Nous admettons provisoirement ce fait, qui nécessite l'inégalité de Bienaymé-

TCHEBYCHEV, et qui sera vue dans un prochain chapitre.

3.

FORMULE DE TRANSFERT POUR UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE. L'objectif est ici d'obtenir une formule pour calculer des espérances de fonctions de variables aléatoires $f(X)$ sans avoir à trouver la loi de $f(X)$ (ce qui peut se révéler compliqué). Le théorème de transfert répond à ce problème.

Remarque 2.2 — On peut donc, avec ce théorème, calculer l'espérance de $f(X)$ en connaissant seulement la loi de X

Théorème ALEA.13.5 | Transfert pour les variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \to \mathbf{R}$. Alors :

$f(X)$ possède une espérance $\iff$ $\left(\sum f(x)\mathbf{P}(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ converge **absolument**.

Dans ce cas, nous avons :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X=x).$$

Preuve C'est un calcul direct, en utilisant la loi de $f(X)$ calculée dans la Proposition ALEA.15.8 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f(X)) &= \sum_{x\in f(X)(\Omega)} x\mathbf{P}(f(X)=x)\\
&= \sum_{x\in f(X)(\Omega)} x \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ x=f(y)}} \mathbf{P}(X=y)\\
&= \sum_{x\in f(X)(\Omega)} \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ x=f(y)}} x\mathbf{P}(X=y) = \sum_{x\in f(X)(\Omega)} \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ x=f(y)}} y\mathbf{P}(X=y)\\
&=! \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(Y=y).
\end{aligned}$$

Nous admettons la dernière égalité.

Remarque 2.3 — On note donc que, dans la formule de transfert, nous avons $\mathbf{P}(X=x)$ avec $x \in X(\Omega)$ qui est largement préférable à $\mathbf{P}(f(X)=y)$ pour tout $y \in f(X)(\Omega)$.

Corollaire ALEA.13.2 | Inégalité triangulaire pour l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Alors :

X admet une espérance $\iff$ $|X|$ admet une espérance.

Et dans ce cas :

$$\left|\mathbf{E}(X)\right| \leqslant \mathbf{E}(|X|).$$

Preuve *(Point clef — **Théorème du transfert & Inégalité triangulaire pour les séries**)*

Corollaire ALEA.13.3 | Transfert pour les fonctions affines

Soit X une variable aléatoire discrète et $a, b \in \mathbf{R}$. Alors :

1. X possède une espérance $\Longrightarrow$ $aX + b$ possède une espérance.
2. Supposons que $a \neq 0$. Alors : $aX + b$ possède une espérance $\Longrightarrow$ X possède une espérance.

De plus, si X et $aX + b$ possèdent une espérance, nous avons :

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

Preuve

Corollaire ALEA.13.4 | Centrage

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une espérance, alors

$$X - \mathbf{E}(X) \quad \text{est une variable aléatoire centrée.}$$

Preuve Appliquer le résultat précédent avec $a = 1$ et $b = -\mathbf{E}(X)$. Alors $X - \mathbf{E}(X)$ possède donc une espérance, et

$$\mathbf{E}\left(X - \mathbf{E}(X)\right) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0.$$

Exemple 19 — ***Cas fini*** On considère la variable aléatoire donnée par le tableau suivant :

$X = k$	-3	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = k)$	$2/10$	$1/10$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$1/10$

et $Y = 3X + 2$. Calculer de deux manières son espérance.

Exemple 20 — *Cas dénombrable* Soit $Y = \frac{1+(-1)^X}{2}$ où X est définie par $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$. Calculer de deux manières son espérance.

2.2. Moments d'ordre supérieur

À l'aide du théorème de transfert, nous pouvons donc affirmer les points suivants.

Définition/Proposition ALEA.13.2 | Variance, écart-type, moments, version discrète

- **(Moments d'ordre k)** On dit que X *admet un moment d'ordre* $k \in \mathbf{N}$ si l'équivalence suivante est réalisée :
$$\mathbf{E}\left(|X|^k\right) < \infty \iff \left(\sum |x|^k \mathbf{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)} \quad \text{converge.}$$
On appelle alors *moment d'ordre k* : $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k \mathbf{P}(X = x)$.
- **(Moments d'ordre 2)** On dit que X *admet un moment d'ordre deux* si l'équivalence suivante est réalisée :
$$\mathbf{E}\left(|X|^2\right) < \infty \iff \left(\sum |x|^2 \mathbf{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)} \quad \text{converge.}$$
On appelle alors *moment d'ordre 2* : $\mathbf{E}\left(X^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbf{P}(X = x)$.
- **(Variance)** Si X admet un moment d'ordre deux, alors X admet un moment d'ordre un (*i.e.* une espérance), et on appelle *variance de* X la quantité notée $\mathbf{Var}(X)$ et définie par : $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right)$. La variable aléatoire

X possède une variance si et seulement si :

$$\left(\sum (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)} \text{ converge}$$
$$\left(\sum x^2 \mathbf{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)} \text{ converge}$$

Dans ce cas,

$$\mathbf{Var}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x).$$

On appelle *écart-type de* X, la quantité notée σ_X et définie par $\sigma_X := \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$. Une variable aléatoire de variance un est dite *réduite*.

Preuve Montrons que : si X admet un moment d'ordre deux, alors X admet un moment d'ordre un. Le reste provient de simples applications du théorème de transfert.

Remarque 2.4 — On retiendra également que :

1. si X n'a pas d'espérance, alors elle n'a pas de variance.
2. Le moment d'ordre 1 correspond donc à l'espérance.
3. La variance d'une variable aléatoire mesure l'écart «quadratique» (au carré) moyen entre X et sa valeur moyenne $\mathbf{E}(X)$, et en plus elle réalise le minimum parmi tous les écarts au carré (voir l'exemple ci-après).

Exemple 21 — *L'espérance minimise l'écart quadratique à* X Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux. Démontrer que $a \longmapsto \mathbf{E}\left((X-a)^2\right)$ est minimale pour $a = \mathbf{E}(X)$.

Méthode Étudier l'existence d'une variance dans le cas discret

Cela revient à étudier la convergence de :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^2 \mathbf{P}(X = x).$$

Proposition ALEA.13.11 | Cas d'une variable aléatoire bornée

Soit X une variable aléatoire discrète.

- Si X est bornée, alors X admet une variance.
- Le résultat est encore vrai si X est presque-sûrement bornée : s'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$ alors X admet une variance.

Preuve Montrons que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbf{P}(X = x) \quad \text{converge (et donc absolument aussi car positive).}$$

Faisons le cas général : on suppose qu'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$.

Proposition ALEA.13.12 | Propriétés de la variance/covariance

Soient X, Y admettent une variance, et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

1. **(Variance nulle)** $\mathbf{Var}(X) = 0 \iff X = \mathbf{E}(X)$ p.s.
2. **(Variance d'une expression affine)** $\mathbf{Var}\left(\boxed{\lambda} X + \mu\right) = \boxed{\lambda^2} \mathbf{Var}(X)$.
3. **(Formule de König-Huygens)** $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$.

Preuve

Opération de centrage/réduction. La proposition ci-dessous paraît anecdotique mais elle sera d'un intérêt majeur plus tard dans l'année.

Définition/Proposition ALEA.13.3

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une variance, alors

$$X^\star \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma_X}$$

est une variable aléatoire réelle centrée réduite. On l'appelle *la centrée/réduite de* X.

Preuve

Exemple 22 — Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Dans quel ensemble fini $X^\star$ prend-elle ses valeurs ? Calculer explicitement $X^\star$ dans ce cas.

Cas de variables aléatoires indépendantes. On présente sans démonstration le résultat suivant, qui sera démontré et étudié dans le Chapter ALEA.16 sur les couples aléatoires discrets.

Proposition ALEA.13.13

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. Alors :

1. **(Espérance d'un produit)** si les X_i admettent une espérance,
$$\mathbf{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbf{E}(X_1) \dots \mathbf{E}(X_n).$$
2. **(Variance d'une somme)** si les X_i admettent une variance, alors
$$\mathbf{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \cdots + \mathbf{Var}(X_n).$$

Preuve Provisoirement admis.

3. Lois discrètes usuelles

Pour chacune des lois ci-dessous, il est important de connaître :

- sa loi — ce qui inclut $X(\Omega)$! — et une idée de son histogramme,
- son espérance/variance,
- le type d'expérience dans lequel elle intervient,
- ❯_ et comment la simuler à l'aide de Python.

Dans la pratique, on essaiera autant que possible de traduire l'énoncé avec des lois usuelles. Nous supposerons dans la suite avoir effectué les importations suivantes.

Pour l'aspect informatique, nous aurons besoin des importations suivantes, que l'on suppose donc réalisées dans toute la suite.

```
import random as rd # pour les simulations
import numpy as np # pour les fonctions classiques et/ou la
↪ simulation
import matplotlib.pyplot as plt    # pour les représentations
↪ graphiques
```

Généralités à propos de la simulation de variables aléatoires réelles. Commençons par définir ce que l'on appelle *simulation de variable aléatoire* en Mathématiques.

Définition ALEA.13.7 | Simulation

Soit X une variable aléatoire. Alors on appelle *simulation de la variable aléatoire* X toute procédure permettant de renvoyer un $X(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, de sorte que si l'on effectue n simulations $X(\omega_1), \dots, X(\omega_n)$ avec $n \in \mathbf{N}$ selon cette même procédure, on ait :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X(\omega_i) \leqslant x\}}}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{P}(X \leqslant x).$$

Autrement dit, l'histogramme associé à la suite de simulations est proche du véritable histogramme de la loi, ce qui est un comportement naturel attendu.

Remarque 3.1 — Loi uniforme continue On dira qu'une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbf{R}$ suit une *loi uniforme sur* $[0, 1]$ si pour tout intervalle I,
$$\mathbf{P}(U \in I) = \text{Long}(I \cap [0, 1]).$$

Autrement dit la probabilité d'être dans un certain intervalle est la longueur dudit intervalle. Nous étudierons plus en détail cette variable aléatoire non discrète plus tard dans l'année (Chapter ALEA.14).

Proposition ALEA.13.14

Soit X une variable aléatoire réelle telle que F_X soit bijective. Alors :

$$F_X^{-1}(U) \sim X, \quad \text{où} \quad U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$

Preuve Les variables aléatoires $F_X^{-1}(U)$ et X ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Remarque 3.2 — Et si F_X n'est pas bijective ? En fait, même si F_X n'est pas bijective on peut construire une fonction G_X telle que $G_X(U)$ ait pour loi X.[5]

Tous les constats précédents se résument en l'idée suivante :

Résumé

la simulation d'une loi quelconque se ramène à la simulation d'un réel aléatoire dans $[0,1[$.

C'est ce que nous allons observer dans tous les scripts de simulation qui suivent. Même pour l'un des plus simples, celui de la loi de Bernoulli, on utilisera une simulation de $\mathscr{U}[0,1]$. Nous verrons en TP avec quelle méthode Python simule ce réel dans $[0,1[$.[6]

[5] En l'occurence, la fonction G_X ci-après convient : $\forall u \in \mathbf{R}, \quad G_X(u) = \inf\{t \in \mathbf{R},\, F_X(t) \geqslant u\}$. On l'appelle l'*inverse généralisé* de F_X. On peut démontrer que $G_X \circ F_X(u) = u$ pour tout $u \in \mathbf{R}$, et cela permet de justifier que $F_X^{-1}(U)$ est une variable aléatoire de loi celle de X.

[6] Il n'existe pas de «vrai» aléatoire en informatique, Python fournit en fait les valeurs successives de certaines suites récurrentes bien choisies

Simulation d'un réel entre 0 et 1

```
>>> import random as rd
>>> rd.random()
0.3452858087126355
```

Le module `random` sait aussi simuler beaucoup de lois usuelles, mais vous devez aussi savoir la simuler «à la main». Dans la suite nous donnerons systématiquement les deux.

Comment tracer une fonction de répartition en Python ? Pour tracer une fonction de répartition d'une loi discrète, on utilise le fait déjà établi suivant : c'est une fonction constante par morceaux, et chaque saut est aux éléments du support de X, l'amplitude d'un saut valant $\mathbf{P}(X = k)$ si $k \in X(\Omega)$. On en déduit alors la fonction générale suivante.

```
def trace_fdr(Support, Loi):
    """
    trace la fonction de répartition de loi loi donné dans la liste
    Loi, et de support support
    """
    Fdr = [0 for _ in range(len(Support))]
    for k in range(0, len(Support)):
        Fdr[k] = sum([Loi[i] for i in range(0, k+1)])
    plt.step(Support, Fdr)
```

3.1. Loi uniforme discrète

Définition/Proposition ALEA.13.4 | Loi uniforme sur un sous-ensemble fini de Z

Soit E un sous-ensemble **fini** de $\mathbf{Z}$. On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi uniforme sur* E (on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$), si :

$$X(\Omega) = E, \quad \forall k \in E, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{\# E}.$$

Remarque 3.3 — Modélisation. Toute expérience aléatoire dont les issues sont des nombres entiers en nombre fini, apparaissant de manière équiprobable.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Exemple 23 — *Cas d'un intervalle d'entiers consécutifs.* En particulier, si $E = [\![a, b]\!]$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ deux entiers tels que $a < b$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$, si :

$$\forall k \in [\![a, b]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

La quantité $b - a + 1$ est simplement $\# [\![a, b]\!]$.

Proposition ALEA.13.15 | Espérance, variance

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, alors X possède une espérance et une variance, et :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a + b}{2}, \quad \mathbf{Var}(X) = \frac{(b - a) \cdot (b - a + 2)}{12}.$$

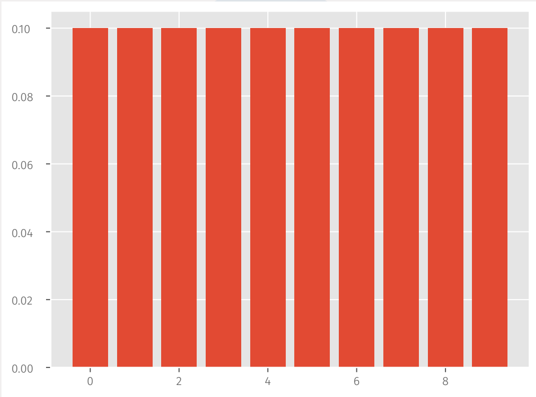
Preuve

Histogramme, fonction de répartition.

Histogramme de la loi uniforme

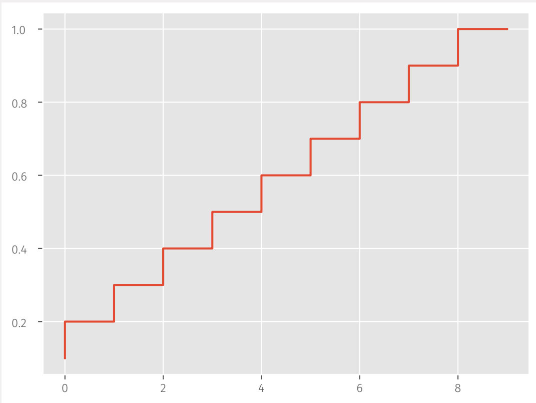
```python
a = 0
b = 9
Support = range(a, b+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
```

```
for k in range(b-a+1):
    Loi[k] = 1/(b-a+1)
plt.bar(Support, Loi)
```



Fonction de répartition de la loi uniforme

```
trace_fdr(Support, Loi)
```



Résumé

`plt.bar` permet de tracer des diagrammes en bâtons et `plt.step` trace des fonctions en reliant les points **par morceaux**

SIMULATION. On va pouvoir se ramener à une loi uniforme sur $[0,1]$ comme nous l'avions démontré de manière générale au début de cette sous-section.

Proposition ALEA.13.16 | Simulation d'une loi uniforme discrète sur $[\![a\,,\,b]\!]$

Soient a, b deux entiers distincts et $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Alors :

$$a + \lfloor \mathrm{U}(b-a+1) \rfloor \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![a\,,\,b]\!]\right).$$

Preuve La variable aléatoire est à valeurs entières supérieures ou égales à a et inférieures à b. Soit donc $k \geqslant a$, calculons $\mathbf{P}\left(a + \lfloor \mathrm{U}(b-a+1) \rfloor = k\right)$.

On en déduit alors le script suivant de simulation.

Simulation de la loi uniforme sur $[\![a\,,\,b]\!]$

```
def uniforme(a, b):
    return a + int(rd.random()*(b-a+1))
```

Ou bien on utilise la fonction existante du module `random`.

```
rd.randint(a, b)
```

3.2. Loi de Bernoulli & binomiale

Définition/Proposition ALEA.13.5 | Loi de Bernoulli/Rademacher de paramètre p

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire suit une :

- **(loi de Bernoulli de paramètre p)** (on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$), si :

$$X(\Omega) = \{0,1\}, \quad \mathbf{P}(X=1) = p, \quad \mathbf{P}(X=0) = 1-p.$$

- **(loi de Rademacher de paramètre p)** (on note $X \hookrightarrow \mathscr{R}(p)$), si :

$$X(\Omega) = \{-1,1\}, \quad \mathbf{P}(X=1) = p, \quad \mathbf{P}(X=-1) = 1-p.$$

Remarque 3.4 — Modélisation. Toute expérience aléatoire dont les issues sont au nombre de deux, dont l'une apparaît avec probabilité p.

Remarque 3.5 — Si $p=1$ (*cf.* $p=0$) alors $\mathbf{P}(X=1)=1$ (*cf.* $=0$) et $\mathbf{P}(X=0)=0$ (*cf.* $=1$) donc X est constante égale à 1 (*cf.* 0) presque-sûrement.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions pour l'une ou l'autre des lois. En effet,

Proposition ALEA.13.17 | Exemples typiques, Obtenir le paramètre

- **(Indicatrice)** Soit $A \in \mathscr{T}$, alors $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbf{P}(A))$.
- **(Valeurs 0, 1)** Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$ alors

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbf{P}(X=1)) = \mathscr{B}(\mathbf{E}(X)).$$

En particulier, si X suit une certaine loi de Bernoulli, son paramètre est donné par $\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{E}(X)$.[7]

Cette propriété nous informe donc que toute expérience aléatoire à deux issues peut être modélisée par une variable aléatoire de Bernoulli, après numérotation des deux issues par 0, 1.

Preuve

-
-

Proposition ALEA.13.18 | Lien entre Bernoulli et Rademacher

Soit $p \in [0,1]$, alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \iff 2X-1 \hookrightarrow \mathscr{R}(p).$$

Preuve

[7] Plus tard dans l'année, nous aurons des outils pour estimer l'espérance ou une probabilité, et donc pour estimer un paramètre de Bernoulli *a priori* inconnu.

Définition/Proposition ALEA.13.6 | Loi binomiale de paramètres p et n

Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi binomiale de paramètres p et n* (on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$), si :

$$X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!], \quad \forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque 3.6 — Modélisation. Toute épreuve constituée de n épreuves aléatoires dont les résultats sont **indépendants**, chacune ayant deux issues appelées succès (de probabilité p) et échec (de probabilité $1-p$). La variable aléatoire X est le nombre total de succès dans ces n épreuves. Un raisonnement de dénombrement conduit à la formule mentionnée *supra*.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Exemple 24 — *Stabilité par retournement* Justifions les deux faits ci-après, tout à fait conformes à l'intuition. Soient $p \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$.

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $1-X \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $n-X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,1-p)$.

La propriété qui suit nous servira notamment pour interpréter la loi binomiale en terme de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli et donc de pouvoir la simuler. Nous n'avons pas encore les outils pour la démontrer, elle est donc pour le moment admise.

Proposition ALEA.13.19 | Somme de binomiales indépendantes

Soient $p \in [0,1]$, $X_1, \dots, X_n$, $n \geqslant 1$ des variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).$$

Preuve Provisoirement admise.

Proposition ALEA.13.20 | Espérance, variance

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$, alors
$$\mathbf{E}(X) = p, \quad \mathbf{Var}(X) = p(1-p).$$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$, alors X possède une espérance et une variance, et :
$$\mathbf{E}(X) = np, \quad \mathbf{Var}(X) = np(1-p).$$

Preuve *(formules de l'espérance et la variance)*

-
-

Exemple 25 — ***Marche aléatoire simple sur Z*** Soient (R_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{R}(p)$ avec $p \in [0,1]$. On pose :

$$S_n = R_1 + \cdots + R_n.$$

1. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on note $X_i = \frac{R_i+1}{2}$. Quelle est la loi de X_i ?

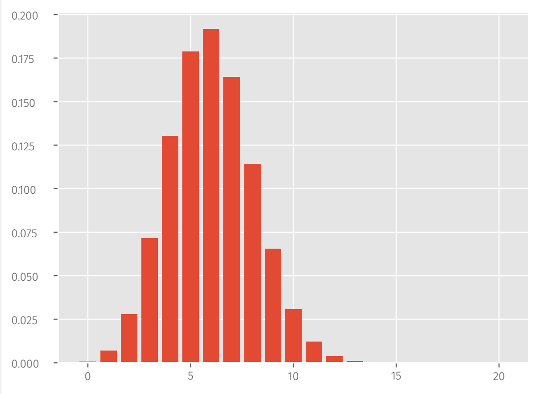
2. Déduire la loi de $\frac{S_n+n}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis l'espérance et la variance de S_n.

3. Un(e) élève de BCPST titube en rentrant d'un bar boulevard des Pyrénées, situé à une abscisse 0. On suppose que cet élève avance de 1 avec probabilité p, recule de 1 avec probabilité $1-p$. En moyenne, a-t-il une chance d'atteindre son appartement situé à l'abscisse $x = 10$? Si oui, préciser environ au bout de combien de temps.

Histogramme, fonction de répartition. Même principe que pour la loi uniforme, on reprend les scripts précédents en modifiant le support et la loi. Notez que, étant donné le choix de paramètres, le support de la loi se concentre dans la partie gauche du graphique (l'espérance vaut $\frac{20}{3}$).

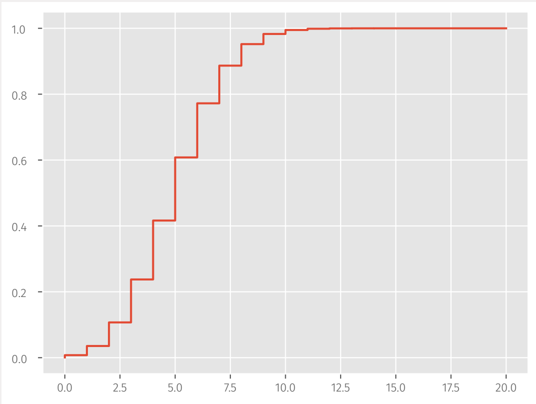
Histogramme de la loi binomiale

```
import scipy.special

def binom(n, k):
    """
    (n : int, k : int) -> renvoie le coefficient binomial k parmi
    ↪ n
    """
    if k > n:
        return 0
    else:
        return scipy.special.binom(n, k) #commande toute faite
        ↪ pour le coefficient binomial

n = 20
p = 0.3
Support = range(0, n+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
for k in range(len(Support)):
    Loi[k] = binom(n, k)*(p**k)*((1-p)**(n-k))
plt.bar(Support, Loi)
```



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{B}(20, 0.3)$

```
trace_fdr(Support, Loi)
```



SIMULATION. Le point de départ pour ces deux lois est la simulation d'une BERNOULLI, qui se fait en regardant dans quelle portion de l'intervalle $[0,1[$ ($[0,p]$ ou $[p,1-p[$) se trouve `rd.random()`. Ensuite pour déduire la bionomiale un certain nombre de résultats, d'où l'importance de bien connaître l'interprétation de ces lois en terme d'expérience aléatoire. Nous ferons de-même pour la loi géométrique plus tard.

Simulation de la loi de BERNOULLI et de la binomiale

```
import random as rd
def bernoulli(p):
    """
    simule une bernoulli
    """
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return 0

def binomiale(n,p):
    """
    simule une binomiale
    """
    S = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < p:
            S += 1
    return S
```

Le module `random` ne sait pas simuler directement les lois de BERNOULLI et binomiale. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous bibliothèque `random` de `numpy`.

```
np.random.binomial(n,p)
np.random.binomial(n,p,nb_simu) # Si l'on souhaite un tableau
  numpy de simulations
```

3.3. Loi Hypergéométrique

Définition/Proposition ALEA.13.7 | Loi hypergéométrique de paramètres p et $n, \mathrm{N} \in \mathbf{N}$

Soient $p \in [0,1]$ et $n, \mathrm{N} \in \mathbf{N}$ tels que : $1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$, $\mathrm{N}p \in \mathbf{N}$. On pose $q = 1-p$.
On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi hypergéométrique de paramètres p et n*, N (on note $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{N}, n, p)$), si :

$$\mathrm{X}(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!], \quad \forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad \mathbf{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{\binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}.$$

Remarque 3.7 — Modélisation. Décrit une série de tirages sans remise (ou simultanés) de n éléments dans un ensemble contenant $\mathrm{N}p$ éléments de type 1 et $\mathrm{N}q$ éléments de type 2. La variable aléatoire X représente le nombre d'éléments de type 1 obtenus dans ce paquet de n éléments.

Expliquons cette remarque à l'aide d'un raisonnement de dénombrement.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. C'est une conséquence, notamment, de la formule de VANDERMONDE. Nous admettons le reste.

Remarque 3.8 — Lorsque N devient grand, nous montrerons dans le Chapter ALEA.16 que cette loi est proche d'une $\mathscr{B}(n,p)$. Et c'est bien logique si l'on analyse l'expression aléatoire type qu'elle décrit. En effet, si le nombre de boules dans l'urne est très grand, la non-remise devient «équivalente» à la remise.

Remarque 3.9 — À propos du support. On peut même construire l'espace probabilisé sous-jacent de sorte que

$$\mathrm{X}(\Omega) = [\![\max(0, n-\mathrm{N}q)\,,\,\min(n, \mathrm{N}p)]\!].$$

Pour constater cela, analyser la nullité des coefficients binomiaux en fonction des paramètres. Pour simplifier, nous conserverons le support de la définition précédente.

Proposition ALEA.13.21 | Espérance, variance

Si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{N}, n, p)$ avec $p \in [0,1]$ et $n, \mathrm{N} \in \mathbf{N}$, alors X possède une espérance et une variance, et :

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = np, \quad \mathbf{Var}(\mathrm{X}) = npq\frac{\mathrm{N}-n}{\mathrm{N}-1}.$$

Preuve Numérotons les éléments de type 1 entre 1 et $\mathrm{N}p$.
On peut écrire X de la la manière suivante : $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}p} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_k}$ où E_k est l'évènement «nous avons tiré l'élément k dans notre paquet de n éléments». Alors pour tout en-

tier $k \in [\![1\,, \mathrm{N}p]\!]$,

$$\mathbf{P}(\mathrm{E}_k) = 1 - \mathbf{P}({}^{\mathrm{C}}\mathrm{E}_k) = 1 - \frac{\binom{\mathrm{N}-1}{n}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} = 1 - \frac{\mathrm{N}-n}{\mathrm{N}} = \frac{n}{\mathrm{N}}.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance, on a :

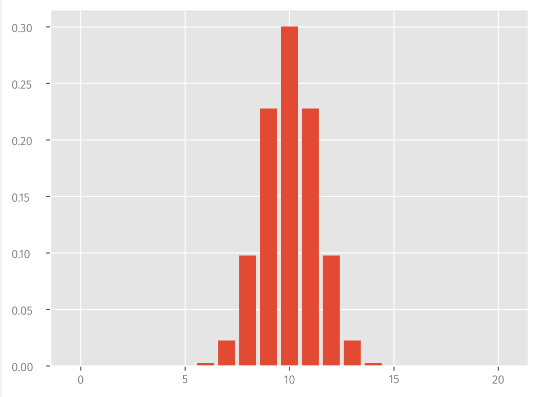
$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}p} \mathbf{P}(\mathrm{E}_k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}p} \frac{n}{\mathrm{N}} = \mathrm{N}p\frac{n}{\mathrm{N}} = \mathrm{N}p\frac{n}{\mathrm{N}p+\mathrm{N}q} = p\frac{n}{p+q} = np$$

car $p+q=1$. Nous admettons la formule de la variance.

HISTOGRAMME, FONCTION DE RÉPARTITION. Même principe que pour la loi uniforme, on reprend les scripts précédents en modifiant le support et la loi. Notez que, étant donnée le choix de paramètres, le support de la loi se concentre dans la partie gauche du graphique (l'espérance vaut $\frac{20}{3}$).

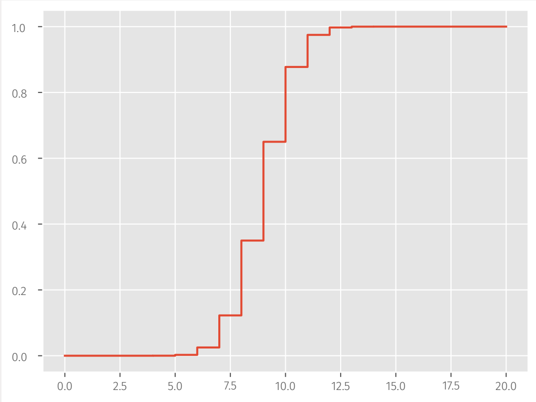
Histogramme de la loi hypergéométrique

```python
N = 30
n = 20
p = 0.5
q = 1-p
Support = range(0, n+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
for k in range(len(Support)):
    Loi[k] = binom(N*p, k)*binom(N*q, n-k)/binom(N, n)
plt.bar(Support, Loi)
```



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{H}(30, 20, 0.5)$

```python
trace_fdr(Support, Loi)
```



SIMULATION. On crée deux variables correspondant aux nombres d'objets de type 1 et 2, on fait des tirages selon les proportions calculées et on actualise les proportions après chaque tirage.[8]

[8]Intuitivement, il s'agit de simuler une succession de tirages sans remise dans une urne.

Simulation de la loi hypergéométrique

```python
import random as rd
def hypergeometrique(N, n, p):
    """
    simule une hypergeometrique
    N : nombre total d'éléments
    n : nombre d'éléments piochés
    p : proportion éléments type 1
    """
    Nb_type1 = N * p
    Nb_type2 = N - Nb_type1
    S = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < p:
            Nb_type1 -= 1
            S += 1
        else:
            Nb_type2 -= 1
        p = Nb_type1/(Nb_type1 + Nb_type2) # proportion boules de
         ↪ type 1
    return S
```

Le module random ne sait pas simuler directement la loi hypergéométrique. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous bibliothèque random de numpy.

```python
np.random.hypergeometric(Np,Nq,n) # Attention à l'ordre des
 ↪ paramètres, et aux paramètres eux-mêmes
```

Nous passons aux lois propres au programme de seconde année : les lois discrètes dont le support n'est pas fini mais plus généralement dénombrable.

3.4. Loi Géométrique & Absence de mémoire

Définition/Proposition ALEA.13.8 | Loi géométrique de paramètre p

Soit $p \in]0,1]$, on pose $q = 1-p$. On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi géométrique de paramètres p* (on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$), si :

$$X(\Omega) = \mathbf{N}^\star, \quad \forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{P}(X=k) = pq^{k-1}.$$

Attention

Le support de la loi géométrique est $\mathbf{N}^\star$ et non $\mathbf{N}$: le premier succès ne peut arriver sans commencer l'expérience.

Remarque 3.10 — Modélisation. Temps d'apparition du premier succès dans la répétition, de manière indépendante, d'une expérience aléatoire de BERNOULLI (succès $p \in]0,1]$, échec $q = 1-p$).

Remarque 3.11 —

- Si $p = 1$, alors le premier succès arrive presque-sûrement dès le premier essai donc X devrait être égale à 1 presque-sûrement. On retrouve ce fait en analysant l'expression de $\mathbf{P}(X=k)$ pour tout $k \geqslant 1$ — en effet, $q = 0$ et donc $\mathbf{P}(X=1) = 1$ mais $\mathbf{P}(X=k) = 0$ dès que $k \geqslant 2$.
- En revanche, on exclut $p = 0$ dans la définition, car dans ce cas on aurait « $X = \infty$ » presque-surement. De manière plus pragmatique, la somme des probabilités ne serait pas égale à 1.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet, Le support de cette loi est **non borné**, donc **l'existence d'une espérance n'est ici plus automatique** et se ramène à l'étude de la convergence d'une série.

Proposition ALEA.13.22 | Espérance, variance

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$, alors X possède une espérance et une variance, et :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbf{Var}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Preuve

Corollaire ALEA.13.5 | Obtenir le paramètre

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$ alors :

$$p = 1 - \mathbf{P}(X > 1) = \frac{1}{\mathbf{E}(X)}.$$

Comme pour la loi de Bernoulli, on peut très facilement obtenir le paramètre connaissant l'espérance.

Preuve Immédiat d'après la formule de l'espérance, et celle de la fonction d'anti-répartition, puisque nous avons montré que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $\mathbf{P}\left(X^k\right) = (1-p)^k$.

Exemple 26 — *Probabilité conditionnelle selon une loi géométrique* Soient $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$ et A un évènement tel que $\mathbf{P}(A|X=k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}^\star$. Calculer $\mathbf{P}(A)$, puis la loi conditionnelle de X sachant A.

Pour les lois précédentes, nous n'étions pas capables de donner une formule explicite pour la fonction de répartition, *i.e.* sans faire intervenir de somme. Pour la loi géométrique, c'est possible.

Proposition ALEA.13.23

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$. Alors :

- **(Antirépartition)** pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $1 - F_X(k) = \mathbf{P}(X > k) = q^k$,[9]
- **(Répartition)** pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $F_X(k) = 1 - q^k$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant \lfloor x \rfloor) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

-
-

Absence de mémoire. Avant de passer aux autres propriétés de la loi géométrique, définissons de manière générale la notion d'absence de mémoire.

[9] Attention, cette expression est fausse si $k = 0$ par exemple car $\mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1$

Définition ALEA.13.8 | Absence de mémoire

Une variable aléatoire réelle X est dite *sans mémoire* si :

1. elle est positive ou nulle,
2. pour tout couple $(x, y) \in (\mathbf{R}^{+\star})^2$, on a :

$$\mathbf{P}(X > t + s) = \mathbf{P}(X > s)\mathbf{P}(X > t). \qquad \text{(Abs,Mém)}$$

Avec les mêmes notations que dans la définition, l'Eq. (Abs,Mém) signifie aussi, de manière équivalente, que la fonction de répartition F vérifie :

$$F(t + s) = F(t) + F(s) - F(t)F(s).$$

Ou encore, en utilisant la formule d'une probabilité conditionnelle, que si $\mathbf{P}(X > s) > 0$:

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t).$$

C'est cette dernière formule qui provient de l'intuition.

Remarque 3.12 — Cas où X est discrète telle $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ Prenons le cas où X est discrète telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$. Alors la propriété d'absence de mémoire est équivalente à :

$$\forall (k, \ell) \in (\mathbf{N}^{+\star})^2, \quad \mathbf{P}(X > k + \ell) = \mathbf{P}(X > k)\mathbf{P}(X > \ell).$$

Nous allons à présent établir que la loi géométrique est à absence de mémoire. En fait, on peut même démontrer que c'est la seule loi discrète à l'être. On commence par des propriétés sur la fonction de répartition de la loi géométrique, donc on peut établir une expression.

Proposition ALEA.13.24

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1]$. Alors X est à absence de mémoire.

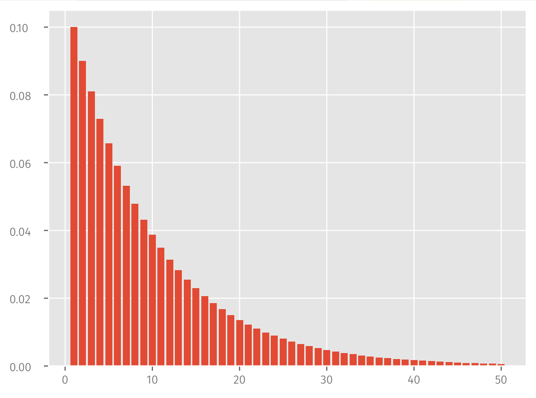
Preuve Soit $k \in \mathbf{N}^{+*}$, rappelons que

$$\mathbf{P}(X > k) = q^k.$$

Histogramme, fonction de répartition.

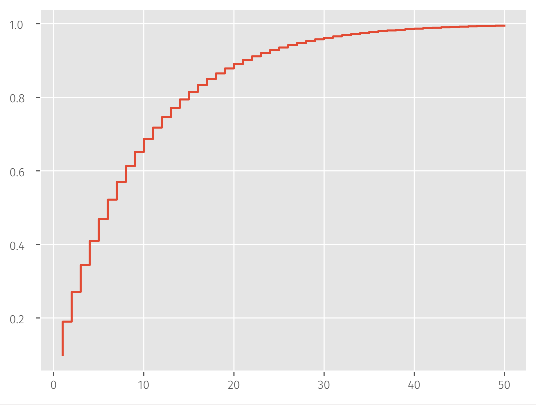
Histogramme de la loi géométrique

```
N = 50 # Troncature du support
n = 20
p = 0.1
q = 1-p
Support = range(1, N+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
for k in range(len(Support)):
    Loi[k] = p*q**k # k démarre à zéro, on décale donc de 1
plt.bar(Support, Loi)
```



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{G}(0.1)$

```
# Construction des probabilités cumulées :
Fdr = np.zeros(len(Support))
for k in range(0,len(Support)):
    Fdr[k] = np.sum([Loi[i] for i in range(0,k+1)])
trace_fdr(Support, Loi)
```



Simulation. La simulation est encore une fois basée sur un schéma de Bernoulli puis : on crée deux variables correspondant aux nombres d'objets de type 1 et 2, on fait des tirages selon les proportions calculées et on actualise les proportions après chaque tirage.

Simulation de la loi géométrique

```
import random as rd
def geometrique(p):
    """
    simule une geometrique
    """
    S = 1
```

```python
    while rd.random() > p:
        S += 1
    return S
```

Le module random ne sait pas simuler directement la loi géométrique. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous bibliothèque random de numpy.

```python
np.random.geometric(p) # Attention à l'ordre des paramètres, et
↪  aux paramètres eux-mêmes
```

3.5. Loi de Poisson

Définition/Proposition ALEA.13.9 | Loi de Poisson de paramètre λ

Soit $\lambda \in \mathbf{R}^{+\star}$. On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi de Poisson de paramètre* λ (on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$), si :

$$X(\Omega) = \mathbf{N}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Remarque 3.13 — Nous montrerons dans le Chapter ALEA.16 que cette loi peut être approchée par des lois binomiales.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Remarque 3.14 — Modélisation. Nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne ou espérance connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.

Proposition ALEA.13.25 | Espérance, variance

Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^{+\star}$, alors X possède une espérance et une variance, et :

$$\mathbf{E}(X) = \lambda, \quad \mathbf{Var}(X) = \lambda.$$

Preuve

Corollaire ALEA.13.6 | Obtenir le paramètre

On peut constater que si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \geqslant 0$, alors :

$$\lambda = \mathbf{E}(X).$$

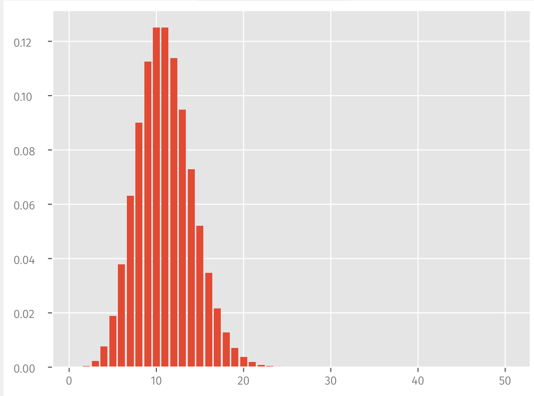
Exemple 27 — *Probabilité conditionnelle selon une loi de Poisson* Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et A un évènement tel que $\mathbf{P}(A|X = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$. Calculer $\mathbf{P}(A)$, puis la loi conditionnelle de X sachant A.

Histogramme, fonction de répartition.

Histogramme de la loi de Poisson

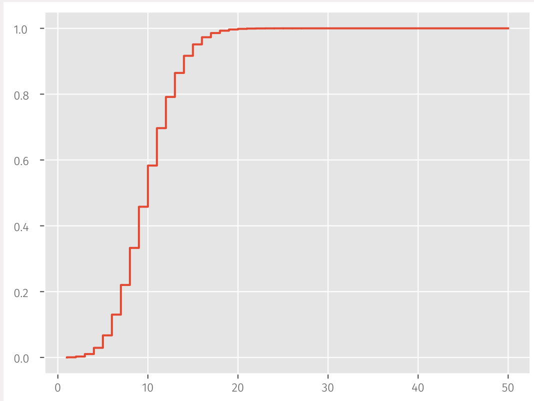
```
N = 50 # Troncature du support
lamba = 10
```

```
Support = range(1, N+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
for k in range(len(Support)):
    Loi[k] = lamba**k/ma.factorial(k)*np.exp(-lamba)
plt.bar(Support, Loi)
```



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{P}(10)$

```
trace_fdr(Support, Loi)
```



Simulation. Commençons par la propriété qui va nous permettre de simuler la loi de Poisson à partir de l'uniforme sur $[0,1]$.

Proposition ALEA.13.26 | Simulation de la loi de Poisson

Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et $\lambda > 0$. Alors :

$$X = \min\left\{n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \geqslant U\right\} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Preuve *Il est clair que $X(\Omega) = \mathbf{N}$. De plus, soit $k \in \mathbf{N}$, alors :*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(X = k) &= \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} < U \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right) && \text{définition de la loi uniforme}\\
&= \operatorname{Long}\left(\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right]\right),\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} && \text{téléscopage}\\
&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Simulation de la loi de Poisson

On déduit alors à l'aide d'une simple boucle `while` un script permettant de simuler la loi de Poisson.

```python
import random as rd
def poisson(lamb):
    """
    Simule une loi de Poisson par inversion
    """
    U = rd.random()
    F = 0
    i = 0
    while F < U:
        i += 1
        F += np.exp(-lamb)*lamb**i/ma.factorial(i)
    return i-1
```

Le module `random` ne sait pas simuler directement la loi de Poisson. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous bibliothèque `random` de `numpy`.

```python
np.random.poisson(1/lamb) # Attention au paramètre : c'est
↪ l'inverse du paramètre mathématique
```

3.6. Bilan des lois discrètes

Le tableau suivant rassemble quelques lois discrètes usuelles.

Nom	Paramètre(s)	Notation	Support $X(\Omega)$	$\mathbf{P}(X=k)$
Bernoulli	$p \in [0,1]$	$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$p\mathbb{1}_1(k) + (1-p)\mathbb{1}_0(k)$
Binomiale	$(n,p) \in \mathbf{N}^* \times [0,1]$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Hyper-géométrique	$p \in [0,1]$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \{0,\dots,N\}$, $Np \in \mathbf{N}^*$	$\mathscr{H}(N,n,p)$	$[\![0\,,\,n]\!]$	$\frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
Géométrique	$p \in [0,1]$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbf{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$
Poisson	$\lambda \in]0,\infty[$	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbf{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

⋆⋆⋆ **Fin du chapitre** ⋆⋆⋆

4. EXERCICES

4.1. Généralités

Exercice ALEA.13.1 | Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle que :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}, \quad p > 0.$$

1. Justifier l'existence de X.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance et une variance ? Les calculer en cas d'existence.

Solution (exercice ALEA.13.1)

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} \geqslant 0.$$

De plus, puisque $\left|\frac{p}{1+p}\right| < 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{(1+p)^k} = \frac{1}{1-\frac{p}{1+p}} = 1+p.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} = 1.$$

Le cours livre l'existence de X telle que

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}}.$$

2. Toujours car $\left|\frac{p}{1+p}\right| < 1$, on sait que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{p^{k-1}}{(1+p)^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{p}{1+p}\right)^2} = (1+p)^2,$$

et

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{p^{k-2}}{(1+p)^{k-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{p}{1+p}\right)^3} = 2\cdot(1+p)^3.$$

En multipliant la seconde égalité par $\frac{p^2}{(1+p)^3}$, on déduit

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\mathbf{P}(X=k) = 2p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(X=k).$$

D'après le théorème de transfert, cela signifie que $X(X-1)$ admet une espérance égale à $2p^2$. En multipliant la première égalité par $\frac{p}{(1+p)^2}$, on déduit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X=k) = p = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(X=k).$$

D'après le théorème de transfert, cela signifie que X admet une espérance égale à p. Ainsi, $X(X-1) + X = X^2$ admet aussi une espérance et donc $\boxed{\text{X admet une variance et une espérance.}}$ On a de plus :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) \\
&= 2p^2 + p, \\
\mathbf{Var}(X^2) &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \\
&= 2p^2 + p - p^2 = \boxed{p^2 + p} \\
\mathbf{E}(X) &= \boxed{p.}
\end{aligned}$$

Exercice ALEA.13.2 | Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^\star$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire.
2. Montrer que X possède une espérance et que $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Possède-t-elle une variance ?
3. Montrer que $\mathbf{E}(X) \leqslant 2$.

Exercice ALEA.13.3 | Deux applications du théorème de transfert

1. Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in]0,1[$. On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ après avoir justifié l'existence.
2. Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{G}(p)$. On pose $Y = X^2$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ après avoir justifié l'existence.

Exercice ALEA.13.4 | Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$, on note

$$Y = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^X\right).$$

Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Solution (exercice ALEA.13.4)

On note $q = p - 1$. Constatons d'abord que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}(1+(-1)), \frac{1}{2}(1+0)\right\} = \boxed{\{0,1\}}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(X \text{ pair}) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{\infty}\{X=2k\}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} pq^{2k-1} \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(q^2)^k \\
&\overset{|q^2|<1}{=} \frac{p}{q}\frac{q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{qp}{p(1+q)} \\
&= \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{q}{1+q}\right).}$

Exercice ALEA.13.5 | Identité de Wald – Espérance d'une somme aléatoire de variables aléatoires discrètes Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles discrètes i.i.d. de même loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Soit $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit alors Y par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \neq 0. \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?
2. Déterminer $\mathbf{P}(Y=0)$. Déterminer alors $\mathbf{P}(Y=r)$ pour tout $r \in \mathbf{N}^\star$.
3. Déterminer $\mathbf{E}(Y)$ si elle existe.

Solution (exercice ALEA.13.5)

La difficulté de l'exercice est la suivante : puisque N est une variable aléatoire, on ne peut pas utiliser la linéarité de l'espérance pour calculer l'espérance de Y ! En particulier, il est **faux** d'écrire

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_N) = pN \text{– une espérance ne peut être aléatoire !}$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors par indépendance des X_k, on sait d'après le cours :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).}$$

2. On a d'après la formule des probabilités totales au système complet d'évènements

$\{N=0, N=n,\ n\in\mathbf{N}^\star\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=0) &= \mathbf{P}(Y=0|N=0)\,\mathbf{P}(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(Y=0|N=n)\,\mathbf{P}(N=n)\\ &\overset{\text{question précédente}}{=} 1\cdot e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} p^0(1-p)^{n-0}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &= e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}\\ &= e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\left(e^{\lambda(1-p)}-1\right)\\ &= \boxed{e^{-\lambda p}.}\end{aligned}$$

3. Soit $r\in\mathbf{N}^\star$, on a d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{N=n\}_{n\in\mathbf{N}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=r) &= \mathbf{P}(Y=r, N=0) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(Y=r|N=n)\,\mathbf{P}(N=n)\\ &\overset{r\geqslant 1}{=} 0+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}\lambda^n\\ &\overset{\lambda^n=\lambda^r\lambda^{n-r}}{=} e^{-\lambda}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{r!(n-r)!}(\lambda p)^r(\lambda(1-p))^{n-r}\\ &\overset{\text{changement d'indice}}{=} e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^r}{r!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda(1-p))^n\\ &= \frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}\\ &= \frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

Puisque de plus $\mathbf{P}(Y=0)=e^{-\lambda p}$, on déduit que $\boxed{Y\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p).}$

4. Donc Y admet une espérance et

$$\boxed{\mathbf{E}(Y)=\lambda p=\mathbf{E}(N)\cdot\mathbf{E}(X_1)}.$$

Cette dernière identité s'appelle l'identité de WALD *et est vraie pour des lois plus générales que celles prises dans l'exercice.*

Exercice ALEA.13.6 | Étude de la série génératrice Dans tout l'exercice, en cas d'existence, on notera pour X une variable aléatoire discrète, $G_X(t)=\mathbf{E}\left(t^X\right)$ pour $t\in\mathbf{R}$. On l'appelle la *série génératrice de* X.

1. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et $t\in\mathbf{R}$ tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ convergent. Montrer que : $G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)$.
2. **(Cas d'un support non borné)** Soit X une variable aléatoire réelle discrète de support $X(\Omega)=\mathbf{N}$.
   - 2.1) Justifier l'existence de G_X sur $]-1,1[$.
   - 2.2) Étudier l'existence et calculer $G_X(1)$.
3. **(Cas d'un support fini)** On suppose dans cette question que le support de X est fini et composé d'entiers : $X(\Omega)=\{k_0,\dots,k_N\}$ avec $k_i\in\mathbf{N}$ pour tout $i\in[\![0,N]\!]$. On suppose de plus que la suite $(k_i)_i$ est croissante.
   - 3.1) Montrer que G_X est une fonction polynomiale, précisez son degré ainsi que ses coefficients. En déduire que deux variables aléatoires finies ont même loi si et seulement si elles ont même série génératrice.
   - 3.2) En déduire que : $\mathbf{P}\left(X=k_j\right)=\frac{G_X^{(k_j)}(0)}{k_j!}$ pour tout $j\in[\![0,N]\!]$.
   - 3.3) Exprimer espérance et variance de X en fonction de G_X.
   - 3.4) Soit $n\in\mathbf{N}$, et $X_1,\dots,X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$ indépendantes avec $p\in]0,1[$. À l'aide des questions précédentes, établir les faits suivants :
     - $X_1+\dots+X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$,
     - retrouver les formules de l'espérance et de la variance.

Solution (exercice ALEA.13.6)

1. Soit $t\in\mathbf{R}$, alors par théorème du cours, t^X, t^Y sont indépendantes, donc

$$\mathbf{E}\left(t^{X+Y}\right)=\mathbf{E}\left(t^X\cdot t^Y\right)=\mathbf{E}\left(t^X\right)\cdot\mathbf{E}\left(t^Y\right)=G_X(t)\cdot G_Y(t).$$

Donc : $\boxed{G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t).}$

2. (Cas d'un support non borné) Soit X une variable aléatoire réelle discrète de support $X(\Omega) = \mathbf{N}$.

2.1) Cette fois-ci on a, d'après le théorème de transfert, en cas de convergence absolue,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbf{P}(X = k).$$

On étudie donc la nature de

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t|^k \mathbf{P}(X = k).$$

Puisqu'une probabilité est majorée par 1, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad 0 \leqslant |t|^k \mathbf{P}(X = k) \leqslant |t|^k,$$

or le majorant est le terme général d'une série convergente si et seulement si $|t| < 1$. Donc si $t \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{\infty} |t|^k \mathbf{P}(X = k)$ converge d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Ainsi, $\boxed{G_X \text{ est définie sur }]-1,1[.}$

2.2) On étudie $\sum_{k=0}^{\infty} 1\mathbf{P}(X = k)$, cette série converge et est de somme 1, puisque $\{X = k,\ k \in \mathbf{N}\}$ est un système complet d'évènements. Donc $\boxed{G_X(1) = 1.}$

3. (Cas d'un support fini)

3.1) Puisque $X(\Omega)$ est supposé fini, on a d'après le théorème de transfert :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_X(t) = \sum_{i=0}^{N} t^{k_i} \mathbf{P}(X = k_i).$$

Donc G_X est une $\boxed{\text{fonction polynomiale de degré } k_N}$ puisque la suite des k_i est supposée croissante. De plus, les coefficients sont

$$\boxed{\mathbf{P}(X = k_0), \dots, \mathbf{P}(X = k_N)}.$$

Puisque deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on déduit que $\boxed{\text{deux variables aléatoires finies ont même loi si et seulement si elles ont même série génératrice.}}$

3.2) Soit $j \in [\![0, N]\!]$,

$$\begin{aligned} G_X^{k_j}(t) &= \left(\sum_{i=0}^{N} t^{k_i} \mathbf{P}(X = k_i)\right)^{k_j} \\ &= \sum_{i=0}^{N} k_i \cdot (k_i - 1) \cdot \dots \cdot (k_i - k_j + 1) t^{k_i - k_j} \mathbf{P}(X = k_i) \\ G_X^{k_j}(0) &= k_j \cdot (k_j - 1) \cdot \dots \cdot (k_j - k_j + 1) \mathbf{P}\left(X = k_j\right) + 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{G_X^{k_j}(0)}{k_j!} = \mathbf{P}\left(X = k_j\right)}.$$

3.3) Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} G_X'(t) &= \sum_{i=1}^{N} k_i t^{k_i - 1} \mathbf{P}(X = k_i) \\ G_X''(t) &= \sum_{i=2}^{N} k_i (k_i - 1) t^{k_i - 2} \mathbf{P}(X = k_i) \\ G_X'(1) &= \sum_{i=1}^{N} k_i 1^{k_i - 1} \mathbf{P}(X = k_i) = \mathbf{E}(X) \\ G_X''(1) &= \sum_{i=2}^{N} k_i (k_i - 1) 1^{k_i - 2} \mathbf{P}(X = k_i) = \mathbf{E}(X(X-1)). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = G_X'(1)}$, et puisque $\mathbf{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$, on déduit que

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) = G_X''(1) + G_X'(1),$$

donc par KÖNIG-HUYGENS :

$$\boxed{\mathbf{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2}.$$

3.4) Soit $n \in \mathbf{N}$, et $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ indépendantes avec $p \in]0, 1[$. À l'aide des questions précédentes, établir les faits suivants :

- Notons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors montrons que S_n a même série génératrice qu'une $\mathscr{B}(n,p)$, on commence par calculer la série génératrice de S_n. Puisque $X_1 + \dots + X_n, X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires finies, elles admettent une fonction génératrice définie sur $\mathbf{R}$. Et par indépendance

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_{X_1+\dots+X_n}(t) = G_{X_1(t)} \cdot \dots \cdot G_{X_n}(t).$$

Or, pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$,

$$G_{X_i}(t) = t^0(1-p) + t^1 p = 1 - p + tp.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_{X_1+\dots+X_n}(t) = (1-p+tp)^n.$$

Par ailleurs, notons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbf{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{binôme} \\ &= (pt+1-p)^n = G_{S_n(t)}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).}$

- Nous avons montré que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_{S_n}(t) = (pt+1-p)^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n) = G'_{S_n}(1) &= \left.\frac{\mathrm{d}\left[(pt+1-p)^n\right]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ &= pn(p+1-p)^{n-1} \\ &= \boxed{np}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{Var}(S_n) \\ &= G''_{S_n}(1) + G'_{S_n}(1) - G'_{S_n}(1)^2 \\ &= p^2 n(n-1)(p+1-p)^{n-2} + pn(p+1-p)^{n-1} - \left(pn(p+1-p)^{n-1}\right)^2 \\ &= \boxed{np(1-p).} \end{aligned}$$

Exercice ALEA.13.7 | Formule des cumulants, cas discret Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$. On souhaite démontrer et utiliser que X possède une espérance si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge, et que dans ce cas :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k). \quad (\star)$$

1. **(Application)** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. En utilisant $(\star)$, montrer que $Z = \min(X, Y)$ possède une espérance et calculer $\mathbf{E}(Z)$.
2. On souhaite montrer la propriété admise en introduction.
   2.1) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(X \geqslant k) - (N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1). \end{aligned}$$

   2.2) Conclure.
3. Retrouver le résultat de la première question sans utiliser $(\star)$.

Solution (exercice ALEA.13.7)

1. (Application) Notons $Z = \min(X, Y)$, et soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z \geqslant k) &= \mathbf{P}(X \geqslant k, Y \geqslant k) \\
&= \mathbf{P}(X \geqslant k) \cdot \mathbf{P}(Y \geqslant k) \quad \text{\textit{indépendance}} \\
&= \left(\sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{2(k-1)}.
\end{aligned}$$

Donc comme $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z \geqslant k)$ converge, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z \geqslant k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Donc $\min(X, Y)$ admet une espérance, et

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{9}{5}}.$$

2. On souhaite montrer la propriété admise en introduction.

2.1) Soit $N \in \mathbf{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=1}^{N} k\left(\mathbf{P}(X \geqslant k) - \mathbf{P}(X \geqslant k+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(k\mathbf{P}(X \geqslant k) - k\mathbf{P}(X \geqslant k+1)\right) \quad k = (k+1) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(k\mathbf{P}(X \geqslant k) - (k+1)\mathbf{P}(X \geqslant k+1)\right) + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X \geqslant k+1) \quad \text{\textit{téléscopage}} \\
&= \mathbf{P}(X \geqslant 1) - (N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1) + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X \geqslant k+1) \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(X \geqslant k) - (N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1). \quad (\star)}
\end{aligned}$$

2.2) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons dans un premier temps que X possède une espérance. Alors la suite $(S_N)_{N \in \mathbf{N}^\star}$ converge vers $S \in \mathbf{R}$. On a envie, vue la question, de montrer que

$$(N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1) \xrightarrow[]{N \longrightarrow \infty} 0.$$

Et en effet, c'est le cas :

$$\begin{aligned}
(N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1) = (N+1)\sum_{k=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} (N+1)\mathbf{P}(X = k) \\
&\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} k\mathbf{P}(X = k).
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=N+1}^{\infty} k\mathbf{P}(X = k) \xrightarrow[]{N \longrightarrow \infty} 0$ puisque c'est le reste d'une série convergente, donc par théorème d'encadrement on déduit le résultat. Donc en faisant $N \to \infty$ dans $(\star)$, on déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge, et que :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons dans un second temps que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge et montrons que $(S_N)_N$ converge. D'après $(\star)$, on a

$$S_N + (N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

Donc : $S_N \leqslant \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(X \geqslant k)$. Ainsi, puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge, la suite $\left(\sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(X \geqslant k)\right)_N$ est majorée (car somme partielle d'une somme positive), donc $(S_N)_N$ est également majorée. Mais comme c'est une suite croissante (puisque la série associée à l'espérance est positive comme $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$), elle converge donc. Et donc X admet une espérance. Enfin, le sens précédent livre à nouveau que

$$(N+1)\mathbf{P}(X \geqslant N+1) \xrightarrow[]{N \longrightarrow \infty} 0,$$

donc

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

On a donc bien prouvé l'équivalence de la question.

3. On peut utiliser le calcul de la loi de $Z = \max(X, Y)$. On a clairement $Z(\Omega) = \mathbf{N}^\star$. Pour la loi d'un minimum on peut calculer l'antiréparition. On a déjà montré que :

$$\mathbf{P}(Z \geqslant k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2(k-1)}.$$

Donc pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}(Z \geqslant k) - \mathbf{P}(Z \geqslant k+1)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2(k-1)} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2(k-1)}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)\\ &= \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2(k-1)}\\ &= \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k}.\end{aligned}$$

On retrouve ensuite l'espérance de Z en utilisant des formules de sommes géométriques dérivées.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z) &= \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^k\\ &= \frac{5}{4}\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\ &= \frac{5}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2}\\ &= \boxed{\frac{9}{5}}.\end{aligned}$$

$\left|\frac{4}{9}\right| < 1$

4.2. Expérience aléatoire

Exercice ALEA.13.8 | Une rame de tram/bus circule sur une ligne de 4 stations numérotées de 0 à 3. Quand il arrive à la station 3 il fait demi tour, de-même à la station 0. On suppose qu'il passe 1 min à chaque station avec un temps de trajet négligeable entre deux stations.

1. Un(e) étudiant(e) de BCPST s'endort après à la station 0 après une soirée trop festive. On suppose qu'à chaque arrivée en station, il se réveille avec probabilité $p \in]0,1[$ et que les réveils/poursuites de siestes sont indépendants. On note X le numéro de station à laquelle il se réveille. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.
2. On note Y le nombre d'aller-retours effectués. Déterminer la loi de Y.

Solution (exercice ALEA.13.8)

$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. On note $q = 1-p$. $\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(T \in 6\mathbf{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X = 6k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{6k-1}p = \frac{pq^5}{1-q^6}$. $\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(T \in (6\mathbf{N}+1)\cup(6\mathbf{N}+5)) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X = 6k+1) + \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X = 6k+5) = \frac{p+pq^4}{1-q^6}$ $\mathbf{P}(X=2) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=6k+2) + \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=6k+4) = \frac{\mathbf{P}(q^3+q)}{1-q^6}$. $\mathbf{P}(X=3) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=6k+3) = \frac{pq^2}{1-q^6}$. $Y(\Omega) \in \mathbf{N}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $Y = k \Leftrightarrow T = 6k + r$ avec $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ Si $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = k) = p\sum_{j=0}^{5} q^{6k-1+j} = q^{6k-1}(1-q^6)$ Si $k = 0$, $\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(T \in \{1,2,3,4,5\}) = \sum_{j=0}^{5} pq^{6k-1+j} = 1-q^5$.

Exercice ALEA.13.9 | **Paradoxe de Saint-Pétersbourg** Un casino propose à ses clients le jeu suivant. Le joueur commence par verser à la banque une mise de un million d'euros. On lance alors une pièce de monnaie (non truquée). Si pile tombe, la banque verse au joueur un euro et le jeu s'arrête. Si c'est face qui tombe, on relance la pièce de monnaie et, si c'est pile qui tombe à ce deuxième lancer, la banque verse au joueur deux euros (et le jeu s'arrête). On relance ainsi la pièce de monnaie jusqu'à ce que pile tombe (ce qui arrive presque-sûrement). À chaque lancer de la pièce, le montant qui sera versé au joueur en cas de sortie de pile est doublé. Le jeu est-il équitable, favorable à la banque ou bien favorable au joueur?

Solution (exercice ALEA.13.9)

On note X le gain du joueur (c'est-à-dire la somme d'argent qui lui sera versée par la banque quand pile sortira). La variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 4, 8, 16, 32, *etc.*. Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, on a $\mathbf{P}\left(X = 2^k\right) = \frac{1}{2^{k+1}}$ car c'est la probabilité de $k+1$ évènements indépendants de même probabilité $\frac{1}{2}$ (celle de faire pile au lancer de la pièce). Il s'agit de se poser la question de l'existence d'une espérance pour la variable aléatoire X, *i.e.* sur la convergence absolue de $\left(\sum \frac{2^k}{2^{k+1}}\right)_{k\geqslant 0}$. Or, cette série diverge grossièrement, donc X n'admet pas d'espérance, plus précisément la somme partielle de la série diverge vers $+\infty$. $\boxed{\text{Le jeu est donc plus favorable au joueur.}}$ Ceci paraît un peu délirant dans la mesure où la mise initiale d'entrée dans le jeu est très élevée ; et en fait peu importe cette mise, le jeu sera toujours plus favorable au joueur.

4.2.1. Autour de la loi uniforme

Exercice ALEA.13.10 | **Étude d'un** min / max On lance deux dés à 6 faces honnêtes. On note alors X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$. Comparer les espérances et commenter.

Solution (exercice ALEA.13.10)

1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$. De plus, introduisons $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathscr{U}[\![1,6]\!]$ deux variables aléatoires indépendantes de sorte que $X = \max(X,Y), Y = \min(X,Y)$. Soit donc $k \in [\![1,6]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leqslant k) &= \mathbf{P}(U_1 \leqslant k, U_2 \leqslant k) \quad \textit{indépendance}\\ &= \mathbf{P}(U_1 \leqslant k)\mathbf{P}(U_2 \leqslant k)\\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^2.\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \leqslant k) - \mathbf{P}(X \leqslant k-1) = \begin{cases}\left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2 & \text{si } k \geqslant 2,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 & \text{si } k = 1.\end{cases}$$

Les deux formules se réunissent en une seule :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,6]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2}.$$

Pour le minimum, on utilise plutôt l'antirépartition.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y \geqslant k) &= \mathbf{P}(U_1 \geqslant k, U_2 \geqslant k) \quad \textit{indépendance}\\ &= \mathbf{P}(U_1 \geqslant k)\mathbf{P}(U_2 \geqslant k)\\ &= \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2.\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y \geqslant k) - \mathbf{P}(Y \geqslant k+1) = \begin{cases}\left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^2 & \text{si } k \leqslant 5,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 & \text{si } k = 6.\end{cases}$$

Les deux formules se réunissent en une seule :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,6]\!], \quad \mathbf{P}(Y = k) = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^2}.$$

2. Calculons $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$. Pour Y, on peut constater la relation ci-après afin de gagner du temps :

$$U_1 + U_2 = X + Y.$$

La variable aléatoire X est finie, donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{6}\left(k\left(\frac{k}{6}\right)^2 - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^2\right) - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^2 && \text{\textit{téléscopage}} \\
&= 6\left(\frac{6}{6}\right)^2 - 0 - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^2 && \text{\textit{changement d'indice}} \\
&= 6\left(\frac{6}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{5} k^2 \\
&= \boxed{\frac{91}{36}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{E}(\mathrm{U}_1) = \mathbf{E}(\mathrm{U}_2) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$, on déduit que

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = 7 - \frac{91}{36} = \boxed{\frac{161}{36}}.$$

On observe bien

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)) \leqslant \mathbf{E}(\min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)) = \mathbf{E}(\mathrm{Y}).$$

4.2.2. Autour des lois binomiales et hypergéométriques

Exercice ALEA.13.11 | **Équilibrage d'une stratégie de jeu** Soit N un entier naturel $\geqslant 2$. On définit la fonction f sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = y(\mathrm{N}(\mathrm{N}-1) - x(x-1)) - \mathrm{N}x(x-1).$$

1. **(Résolution informatique d'une équation dans $[\![1\,,\,10]\!]^2$)**
   - **1.1)** Écrire une fonction Python d'en-tête `f(x, y , N=10)` qui retourne la valeur de $f(x, y)$ avec 10 pour valeur de N par défaut.
   - **1.2)** À l'aide de la fonction précédente, dans le cas $\mathrm{N} = 10$, donner tous les couples (x, y) d'entiers de $[\![1\,,\,10]\!]$ tels que $f(x, y) = 0$.
2. Une urne A contient $\mathrm{N} = 10$ tickets dont x sont gagnants, une urne B contient 10 tickets dont y gagnants.
   - Un joueur E tire 2 tickets dans l'urne A.
   - Si les 2 tickets tirés sont gagnants, le joueur E a gagné,
   - sinon le joueur F tire un ticket dans l'urne B et est déclaré gagnant s'il tire un ticket gagnant.
   - S'il n'y pas de gagnant, la partie est déclarée nulle.
   - **2.1)** Calculer la probabilité que E soit gagnant, et que F soit gagnant.
   - **2.2)** Déterminer x et y tels que la partie soit équitable.
   - **2.3)** Écrire une fonction Python `Gagnant(x,y,N=10)` simulant ce jeu et retournant $+1$ si E gagne, 0 si la partie est nulle et -1 si F gagne.
3. Vérifier, à l'aide de Python, que pour le(s) couple(s) (x, y) trouvés en précédemment, on a effectivement un jeu équitable.

Solution (exercice ALEA.13.11)

1. **1.1)**

   1.2)
```python
def f(x,y,N=10):
    return y*(N*(N-1) -x*(x-1))- N*x*(x-1)
def couplesf(N=10):
    L = []
    for k in range(1,N+1):
        for l in range(1,N+1):
            if f(k,l) == 0:
                L.append([k,l])
    return L
```
   La fonction `couplesf()` renvoie [[6, 5]].
2. **2.1)** Notons G_E l'évènement «le joueur E est gagnant», on tire simultanément

deux tickets dans une urne qui contient x gagnants, et $N-x$ perdants : c'est donc un contexte de loi hypergéométrique. On a donc : $\mathbf{P}(G_E) = \frac{\binom{2}{2}\binom{N-x}{0}}{\binom{x}{2}} = \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{N(N-1)}{2}} = \boxed{\frac{x(x-1)}{N(N-1)}}$.

Notons G_F l'évènement «le joueur F est gagnant». Nous avons $G_F = (G_F \cap G_E) \cup (G_F \cap {}^cG_E) = G_F \cap {}^cG_E$ puisque le premier évènement est vide. Donc :

$$\mathbf{P}(G_F) = \mathbf{P}(G_F | {}^cG_E)\,\mathbf{P}({}^cG_E) = \boxed{\frac{y}{N}\left(1-\frac{x(x-1)}{N(N-1)}\right)}.$$

2.2) On cherche donc les couples (x,y) tels que $\frac{y}{N}\left(1-\frac{x(x-1)}{N(N-1)}\right) = \frac{x(x-1)}{N(N-1)}$. En manipulant l'équation (multiplication par $N(N-1)$) on trouve comme condition : $\boxed{f(x,y)=0}$, et d'après python : $\boxed{\texttt{x=6,y=5.}}$ La partie est donc équitable pour cet unique couple.

3.
```python
def Gagnant(x, y, N=10):
    #Tour de E
    if rd.random() < x/N:
        if rd.random() < (x-1)/(N-1):
            return 1
    #Tour de F
    if rd.random() < y/N:
        return -1
    #Personne n'a gagné
    return 0
```

4. Pour cela il suffit de simuler un grand nombre de fois l'expérience et de compter les proportions de victoires pour chaque joueur. Par exemple de cette manière :

```python
def Equitable(x, y, Nb_Simu, N=10):
    """
    Proportion de parties gagnantes pour chaque jour sur Nb_Simu
    """
    Gagne_E, Gagne_F = 0,0
    for _ in range(Nb_Simu):
        Res = Gagnant(x, y, N)
        if Res == 1:
            Gagne_E += 1
        elif Res == -1:
            Gagne_F += 1
    return Gagne_E/Nb_Simu, Gagne_F/Nb_Simu
```

On constate que les proportions sont très proches pour `N=10000` : `Equitable(4, 6, 100)` renvoie (0.12, 0.65).

Exercice ALEA.13.12 | On dispose d'une infinité de boules blanches, numérotées et représentées par leur indice $k \in \mathbf{N}^*$. L'urne comporte initialement a boules noires non numérotées. Si l'on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche de même numéro. Si on tire une boule noire, on la remet et on ajoute une boule blanche portant un numéro non présent dans l'urne (peu importe lequel, les variables aléatoires définies *infra* ne dépendront pas de ce choix). On appelle Y_k la variable aléatoire égale à 1 si une boule noire est tirée au k-ième tirage et 0 sinon. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros différents présents dans l'urne avant le $(n+1)$-ième tirage.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au n-ième tirage?
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Exprimer X_n en fonction des Y_k pour k et n entiers, montrer que $\mathbf{E}(X_n) = a\sum_{k=a}^{a+n-1}\frac{1}{k}$. Trouver une formule similaire pour $\mathbf{Var}(X_n)$.
3. >_
   - **3.1)** Écrire une fonction `SimulX(a,n)` qui simule une variable de même loi que X_n.
   - **3.2)** Écrire une fonction qui permet d'estimer $\mathbf{E}(X_n)$, conjecturer la limite $\frac{\mathbf{E}(X_n)}{n}$ quand n tend vers l'infini.
4. Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$.

Solution (exercice ALEA.13.12)

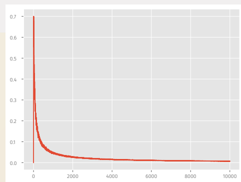
1. À chaque étape nous avons rajouté une boule soit noire soit blanche, ainsi avant le tirage n, nous avions $\boxed{a+n-1 \text{ boules dans l'urne}}$.
2. On a alors $\boxed{\mathbf{P}(Y_n = 1) = \frac{a}{a+n-1}}$ la proportion de boules noires au n-ième tirage.
3. La variable X_n est égale au nombre de tirages de boules noires, *i.e.* le nombre de fois que l'on a ajouté un numéro différent. Ainsi, $\boxed{X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.}$
En utilisant la linéarité de l'espérance, on en déduit que : $\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Y_k = 1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{a+k-1}$. Il suffit alors de faire le changement de variable affine $\ell = a + k - 1$, fournissant ainsi l'égalité demandée :
$$\boxed{\mathbf{E}(X_n) = a \sum_{\ell=a}^{a+n-1} \frac{1}{\ell}}.$$
Pour la variance, étant donné que les variables aléatoires Y_k sont indépendantes (en effet, Y_k ne dépend pas du tirage précédent, mais uniquement du rang du tirage, *i.e.* l'entier k, puisque la proportion de boules noires ne dépend que de k). Ainsi,
$\mathbf{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Var}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(1^2 \frac{a}{a+k-1} - \left(\frac{a}{a+k-1}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{a+k-1} \frac{a+k-1-a}{a+k-1} = \boxed{a \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(a+k-1)^2}}$.
De la même manière, nous pouvons faire ensuite le changement de variable $\ell = a + k - 1$, qui donne
$$\mathbf{Var}(X_n) \boxed{= a \sum_{\ell=a}^{a+n-1} \frac{\ell - a}{\ell^2} = a\left(\sum_{\ell=a}^{a+n-1} \frac{1}{\ell} - a \sum_{\ell=a}^{a+n-1} \frac{1}{\ell^2}\right)}.$$
4. **4.1)**

```
import random as rd
def SimulX(a, n):
    """
    (a : pro boules noires, n : nb tirages)->nombre de
    ↪ boules de numéros différents
    """
    S = 0
    Nb_tot = a
    p_noir = a/Nb_tot
    for _ in range(1,n):
        if rd.random() < p_noir:
            S += 1
        Nb_tot += 1
        p_noir = a/Nb_tot
    return S
```

Par exemple, `SimulX(10, 50)` renvoie 15.

4.2) En effectuant un grand nombre de simulations N, la moyenne des réalisations de X_n converge vers l'espérance.

```
import random as rd
def EspX(a, n, N):
    """
    (a, n, N)-> simule Xn
    ↪ N fois, renvoie la
    ↪ moyenne
    """
    return
    ↪ sum([SimulX(a,n)
    ↪ for _ in
    ↪ range(N)])/N
import matplotlib.pyplot
↪ as plt
plt.plot([EspX(10, n,
↪ 10)/n for n in
↪ range(1,10000)])
```



Il nous reste ensuite à regarder la suite donnée dans l'énoncé en fonction de n : on trouve `EspX(5,100,1000)` environ égale à `0.27127`. La suite semble converger vers zéro, mais la convergence est très lente (on ne la constate même pas clairement si on trace jusque $n = 100$). Cette lenteur s'explique par l'équivalent trouvé ci-dessous.

5. On réalise une comparaison série—intégrale. Il suffit de dire que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est continue, strictement décroissante sur $[1,\infty[$.
On somme l'encadrement entre a et $a+n-1$ pour obtenir :

$$\int_a^{a+n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbf{E}(X_n) \leqslant \int_{a-1}^{a+n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En calculant explicitement explicitement les intégrales, on trouve pour $a \geqslant 2$:

$$a\ln\left|\frac{a+n}{a}\right| \leqslant \mathbf{E}(X_n) \leqslant a\ln\left|\frac{a+n-1}{a-1}\right|.$$

À l'aide de cet encadrement, on déduit que : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{\mathbf{E}(X_n)}{a\ln(a+n)} = 1$ soit : $\boxed{\mathbf{E}(X_n) \sim_{n\to\infty} a\ln(a+n)}$. Pour $a = 1$, on prouve de la même manière (mais on ne somme qu'à partir de $k = 2$ et on ajoute à la fin le terme $k = 1$), que : $\boxed{\mathbf{E}(X_n) \sim_{n\to\infty} \ln(n)}$. C'est l'équivalent de la série harmonique calculé en cours.

4.2.3. Autour de la loi géométrique

Exercice ALEA.13.13 | On dispose d'une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est α, $\alpha \in]0,1[$. On lance deux fois la pièce :

- si on obtient (F, P) on a gagné ;
- si on obtient (P, F) on a perdu ;
- sinon on recommence.

Déterminer le nombre moyen X de (couples de) lancers effectués.

Solution (exercice ALEA.13.13)

Notons X le nombre de lancersLe nombre de parties correspond au nombre de succès (faire (F, P) ou (P, F)) dans une répétition d'expériences de Bernoulli (lancer deux fois la pièce) indépendantes, puisque le jeu s'arrête une fois un succès obtenu. Par ailleurs, la probabilité de succès est

$$\mathbf{P}((P,F) \uplus (F,P)) = \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)\alpha = 2\alpha(1-\alpha).$$

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(2\alpha(1-\alpha))$, et le nombre moyen de lancers est donc

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}.}$$

Exercice ALEA.13.14 | **Chance de capture d'un Pokemon** Blue joue à Pokemon rouge. Il se retrouve face à Mewtwo dans la caverne azurée. La probabilité de capture de Mewtwo est très faible : $\frac{1}{n}$ pour un entier $n \in \mathbf{N}^\star$ très grand. Blue, équipé d'un stock de n pokéballs, s'apprête à toutes les lancer une à une.

1. Calculer la probabilité p_n que Blue capture Mewtwo.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} p_n$.
3. On suppose que suite à la découverte d'un bug dans le jeu, qu'on dispose d'une infinité de pokéballs pour tenter notre capture. Déterminer le temps d'attente moyen jusqu'à capture de Mewtwo.
4. Proposer un programme Python donnant une simulation du temps de capture.

Solution (exercice ALEA.13.14)

1. Le plus simple est de passer par le complémentaire. Notons C_n «il capture en n

essais» et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, E_i «l'essai i échoue». Alors

$$\begin{aligned}1 - p_n &= \mathbf{P}\left({}^{C}C_n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(E_1 \cap \cdots \cap E_n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(E_1\right)\mathbf{P}(E_2|E_1)\cdot\cdots\cdot\mathbf{P}(E_n|E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}) \quad \textit{probabilités composées} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$.

2. Pour la limite, il s'agit de revenir à la forme exponentielle puis de faire un développement limité.

$$\begin{aligned}p_n &= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \boxed{1 - e^{-1}.}\end{aligned}$$

3. Cette fois-ci, il s'agit du temps d'attente d'un succès (la capture, de probabilité $\frac{1}{n}$ dans une répétition d'expériences de Bernoulli (capturer ou non) indépendantes. Donc $T \hookrightarrow \mathscr{G}(1/n)$, et le nombre moyen de balls lancées est $\boxed{\mathbf{E}(T) = n.}$

4.
```python
import random as rd
def geometrique(n):
    """
    simule une geometrique de paramètre 1/n
    """
    balls = 1
    while rd.random() > 1/n:
        balls += 1
    return balls
```

Exercice ALEA.13.15 | Délivrer la princesse Une princesse est retenue prisonnière dans un château. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du château, il se trouve devant 3 portes. Il en ouvre une au hasard (équiprobable).

- S'il ouvre la 1ère porte, il délivre la princesse.
- S'il ouvre la deuxième porte, un dragon apparait et le dévore.
- S'il ouvre la troisième porte, une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie tout ce qu'il a vu et est mis à la porte du château.

Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il meure ou qu'il délivre la princesse.

1. Calculer la probabilité de l'événement D_k : «il délivre la princesse au k-ème essai».
2. Calculer la probabilité de l'événement D : «il délivre la princesse».
3. On note T le nombre de tentatives du prince. Donner la loi de T ainsi que son espérance.
4. Si le prince échoue dans sa tâche, le syndicat des princes envoie immédiatement un autre prince, jusqu'à ce que la princesse soit délivrée. On suppose que le prince suivant, après avoir vu le précédent prince se faire dévorer, sera tout aussi performant. Calculer le nombre moyen de princes utilisés pour délivrer la princesse.

Solution (exercice ALEA.13.15)

1. Notons S_k l'évènement «il choisit la sorcière au k-ième essai», avec $k \in \mathbf{N}^\star$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(D_k\right) &= \mathbf{P}\left(S_1 \cap \cdots \cap S_{k-1} \cap D_k\right) \\ &= \mathbf{P}\left(S_1\right)\mathbf{P}(S_2|S_1)\ldots\mathbf{P}(S_{k-1}|S_1\cap\ldots S_{k-2})\mathbf{P}(D_k|S_1\cap\cdots\cap S_{k-1}) \\ &= \boxed{\frac{1}{3^k}.}\end{aligned}$$

2. On a $D = \biguplus_{k=1}^{\infty} D_k$. Ainsi, par additivité dénombrable d'une probabilité :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(D_k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\ &= \boxed{\frac{1}{2}.}\end{aligned}$$

3. La variable aléatoire T compte le temps d'attente d'un succès (choisir la bonne porte ou le dragon, car dans ces deux cas l'expérience s'arrête) dans une répétition d'expériences de BERNOULLI (le choix de la bonne porte/dragon ou la sorcière) indépendantes. Par ailleurs, la probabilité de choisir la la porte de la princesse ou du dragon est $\frac{2}{3}$. Donc

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathscr{G}(2/3)}.$$

Ainsi $\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{3}{2}.}$

4. Dans ce cas, l'expérience continue tant que le prince est dévoré. Cette fois-ci l'expérience de BERNOULLI associée est la suivante : on envoie un prince au casse-pipe, soit il délivre la princesse (succès, de probabilité $\mathbf{P}(D) = \frac{1}{2}$), soit il ne la délivre pas (échec de probabilité $\frac{1}{2}$ aussi). Donc le nombre de prince envoyés, puisque les envois sont supposés indépendantes, suit une géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Le $\boxed{\text{nombre moyen de princes envoyés est donc de 2.}}$

4.2.4. Atour de la loi de POISSON

Exercice ALEA.13.16

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Dans la suite, on pourra noter :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(a)$ avec $a > 0$.

- Si X est impair, PIERRE gagne et reçoit X euros de PAUL.
- Si X est pair non nul, PAUL gagne et reçoit X euros de PIERRE.
- Si $X = 0$, la partie est nulle.

On note p la probabilité que PIERRE gagne et q la probabilité que PAUL gagne.

2.1) Déterminer la valeur de p et de q.

2.2) Détermine l'espérance des gains de chacun.

Solution (exercice ALEA.13.16)

1. On sait que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout x réel. Donc

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} && \textit{linéarité de la somme}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2}\frac{x^k}{k!} && 1+(-1)^k = 0 \textit{ si } k \textit{ impair, } 2 \textit{ sinon}\\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch} x.}\end{aligned}$$

On obtient de-même :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \boxed{\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.}$$

2. 2.1) Nous avons

$$p = \mathbf{P}\left(\text{Pierre gagne}\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X} \text{ impair}\right) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{\infty}\{\mathrm{X}=2k+1\}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\mathrm{X}=2k+1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathrm{e}^{-a}$$

$$= \mathrm{e}^{-a}\cdot \mathrm{sh}(a) = \boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}.}$$

De-même,

$$p = \mathbf{P}\left(\text{Paul gagne}\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X} \text{ pair non nul}\right) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{\infty}\{\mathrm{X}=2k\}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\mathrm{X}=2k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-a}$$

$$= \mathrm{e}^{-a}\cdot \mathrm{ch}(a) = \boxed{\frac{1+\mathrm{e}^{-2a}}{2}.}$$

2.2) Notons G_a le gain de Paul et G_i le gain de Pierre. Alors

- $\boxed{\mathrm{G}_i(\Omega) = \left\{2k+1, k\in\mathbf{N}\right\} \uplus \left\{-2k, k\in\mathbf{N}^\star\right\}}$. De plus,

$$\forall k\in\mathbf{N},\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{G}_i = 2k+1\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X}=2k+1\right) = \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\forall k\in\mathbf{N}^\star,\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{G}_i = -2k\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X}=2k\right) = \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}.$$

Donc pour l'espérance, on étudie la nature de

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right),\quad \sum_{k=0}^{\infty}|(-2k)|\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\right).$$

Les deux séries convergent car, après avoir simplifié les factorielles, on obtient des séries exponentielles convergentes d'après la première question. De plus,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \mathrm{e}^{-a}a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-a}a\cdot\mathrm{ch}(a) = a\frac{1+\mathrm{e}^{-2a}}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\right) = \mathrm{e}^{-a}a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k-1}}{(2k-1)!} = \mathrm{e}^{-a}a\cdot\mathrm{sh}(a) = a\frac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}.$$

Donc G_i possède une espérance, et

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\mathrm{G}_i\right) = a\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}+\frac{1+\mathrm{e}^{-2a}}{2}\right) = a}.$$

- $\boxed{\mathrm{G}_a(\Omega) = \left\{-(2k+1), k\in\mathbf{N}\right\} \uplus \left\{2k, k\in\mathbf{N}^\star\right\}}$. De plus,

$$\forall k\in\mathbf{N},\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{G}_a = -(2k+1)\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X}=2k+1\right) = \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\forall k\in\mathbf{N}^\star,\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{G}_a = 2k\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X}=2k\right) = \mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}.$$

Donc pour l'espérance, on étudie la nature de

$$\sum_{k=0}^{\infty}|-(2k+1)|\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right),\quad \sum_{k=0}^{\infty}(2k)\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\right).$$

Les deux séries convergent car, après avoir simplifié les factorielles, on obtient des séries exponentielles convergentes d'après la première question. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(-(2k+1))\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) &= -\mathrm{e}^{-a}a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!} = -\mathrm{e}^{-a}a\cdot\mathrm{ch}(a)\\ &= -a\frac{1+\mathrm{e}^{-2a}}{2},\\ \sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\right) &= \mathrm{e}^{-a}a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{2k-1}}{(2k-1)!} = \mathrm{e}^{-a}a\cdot\mathrm{sh}(a)\\ &= a\frac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}.\end{aligned}$$

Donc G_i possède une espérance, et

$$\boxed{\mathbf{E}(G_i) = a\left(-\frac{1+\mathrm{e}^{-2a}}{2}+\frac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}\right)\boxed{=-a\mathrm{e}^{-2a}}}.$$

4.3. Matrices aléatoires

Exercice ALEA.13.17 | Matrice aléatoire binomiale Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et A et B deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(n,p)$ définies sur cet espace. Soit M la variable aléatoire, à valeurs dans $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$, définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$\mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(\omega) & \mathrm{B}(\omega)\\ \mathrm{A}(\omega) & \mathrm{B}(\omega)\end{pmatrix}.$$

1. Proposer une fonction Python qui simule M. On renverra le résultat sous forme de tableau numpy.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance du nombre de valeurs propres de M. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
3. Donner la loi de la plus grande des valeurs propres.
4. Quelle est la probabilité que $\mathrm{M}^2 = 0$? vérifie $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$? Proposer une commande Python permettant de retrouver ces résultats par simulation, à l'aide de la première question.

Solution (exercice ALEA.13.17)

1. M est inversible si et seulement si $\mathrm{AB}-\mathrm{BA} \neq 0$. Donc l'évènement « M inversible » est finalement l'ensemble vide, donc de probabilité nulle. Calculons à présent M^2. Nous avons $\mathrm{M}^2(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(\omega) & \mathrm{B}(\omega)\\ \mathrm{A}(\omega) & \mathrm{B}(\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A}(\omega) & \mathrm{B}(\omega)\\ \mathrm{A}(\omega) & \mathrm{B}(\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{A}^2+\mathrm{AB})(\omega) & (\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)(\omega)\\ (\mathrm{A}^2+\mathrm{AB})(\omega) & (\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)(\omega)\end{pmatrix}$. La matrice précédente est nulle si et seulement si $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 0$ ou bien $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B} = 0$. Il reste à écrire cela avec des réunions et intersections.

$$\mathbf{P}(\mathrm{M}\text{ nilpotente}) = \mathbf{P}\left(\{\mathrm{A}=0\}\cap\{\mathrm{B}=0\}\right)\cup\{\mathrm{A}+\mathrm{B}=0\}\right).$$

Attention, les deux évènements précédents ne sont pas disjoints, on ne peut écrire qu'il s'agit de la somme des deux probabilités. Mais, $\{\mathrm{A}+\mathrm{B}\} = 0 = \{\mathrm{A}=0\}\cap\{\mathrm{B}=0\}$ puisque A, B sont positives. On déduit, par indépendance de A et B :

$$\mathbf{P}(\mathrm{M}\text{ nilpotente}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}=0)\mathbf{P}(\mathrm{B}=0) = \boxed{(1-p)^{2n}}.$$

Nous avons par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{M}^2=\mathrm{M}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}=\mathrm{A}, \mathrm{AB}+\mathrm{B}^2=\mathrm{B}) &= \mathbf{P}(\mathrm{A}(\mathrm{A}+\mathrm{B}-1)=0, \mathrm{B}(\mathrm{B}+\mathrm{A}-1)=0)\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{A}+\mathrm{B}=1)+\mathbf{P}(\mathrm{A}=0)\mathbf{P}(\mathrm{B}=0)\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{A}=0,\mathrm{B}=1)+\mathbf{P}(\mathrm{A}=1,\mathrm{B}=0)+\mathbf{P}(\mathrm{A}=0)\mathbf{P}(\mathrm{B}=0)\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{A}=0)\mathbf{P}(\mathrm{B}=1)+\mathbf{P}(\mathrm{A}=1)\mathbf{P}(\mathrm{B}=0)+\mathbf{P}(\mathrm{A}=0)\mathbf{P}(\mathrm{B}=0)\\ &\boxed{= 2n(1-p)^n p(1-p)^{n-1}+(1-p)^{2n}}\end{aligned}$$

Dans ce cas, en revanche, les évènements $\{\mathrm{A}+\mathrm{B}-1=0\}$ et $\{\mathrm{A}=0,\mathrm{B}=0\}$ sont bien disjoints, ce qui légitime le calcul précédent.

2. Notons N la variable aléatoire donnant le nombre de valeurs propres. Alors $\boxed{N(\Omega) = \{1, 2\}}$ puisque M est de format 2×2. De plus, par calcul simple de déterminant, on déduit que : $\mathrm{Spec}(M) = \{0, A+B\}$. Donc $\mathbf{P}(N = 1) = \mathbf{P}(A + B = 0) = \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) = \boxed{(1-p)^{2n}}$. Et $\boxed{\mathbf{P}(N = 2 = 1 - (1-p)^{2n}}$. L'espérance vaut alors $\mathbf{E}(N) = 1 - (1-p)^{2n}$ et $\mathbf{Var}(N) = 1 - (1-p)^{2n}$. Utilisons le système complet $\{N = 1\}, \{N = 2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M \text{diagonalisable}) &= \mathbf{P}(M\text{diagonalisable} \cap \{N = 1\}) + \mathbf{P}(M\text{diagonalisable} \cap \{N = 2\}) \\ &= \mathbf{P}(M\text{diagonalisable} \cap \{N = 1\}) + \mathbf{P}(\{N = 2\})\end{aligned}$$

où à la dernière ligne nous avons utilisé le fait que toute matrice ayant deux valeurs propres distinctes est diagonalisable. De plus,

$$\mathbf{P}(M\text{diagonalisable} \cap \{N = 1\}) = \mathbf{P}(A = 0, B = 0, A = B = 0) = \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) = (1-p)^{2n}.$$

Car toute matrice diagonalisable ayant une seule valeur propre est du type λI avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc

$$\mathbf{P}(M\text{diagonalisable}) = \boxed{(1-p)^{2n} + 1 - (1-p)^{2n}}.$$

3. La plus grande valeur propre au sens large est $A + B$, qui suit, par indépendance, une $\mathscr{B}(2n, p)$.

4.4. Récurrence & Chaîne de Markov

Exercice ALEA.13.18 | Marche aléatoire vers l'avant avec retour en zéro Un mobile se déplace sur un axe de la façon suivante :

- à l'instant 0, il est au point d'abscisse 0 ;
- si, à l'instant n, le mobile est au point d'abscisse $k \in \mathbf{N}$, alors, à l'instant $n+1$, soit il sera au point d'abscisse $k+1$ avec une probabilité $p \in]0, 1[$, soit il retournera au point 0 avec une probabilité $1 - p$.

On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1.

1.1) Créer une fonction d'en-tête `Simu_X(n, p)` qui simule une réalisation de X_n.

1.2) En déduire une valeur approchée de $\mathbf{E}(X_n)$ à l'aide de la fonction précédente.

2. Déterminer la loi de X_1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Trouver une relation entre $\mathbf{P}(X_n = k)$ et $\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)$.

4. En déduire une relation de récurrence entre $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$.

5. En déduire une expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$ et p.

Solution (exercice ALEA.13.18)

1.

1.1)

```python
import random as rd
def Simu_X(n, p):
    X = 0
    for _ in range(1, n+1):
        if rd.random() < p:
            X += 1
        else:
            X = 0
    return X

>>> Simu_X(30, 0.5)
1
```

1.2) Une valeur approchée de $\mathbf{E}(X_n)$ est donnée par la loi des grands nombres, on fait une moyenne de beaucoup de simulations de X_n.

```python
N = 10**3 # arbitrairement grand
S = 0
for _ in range(N):
```

```
    S += Simu_X(100, 0.5)
>>> S/N    # approximation de l'espérance de X10 pour proba
↪   1/2
0.951
```

2. On a $\boxed{X_1 \mathscr{B}(p)}$. De plus, $\boxed{X_n(\Omega) = \{0, \dots, n\}}$, puisque dans le pire des cas nous aurons avancé de 1 à chaque fois.
3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1\,,\,n]\!]$. Si on se trouve à la position $k \geqslant 1$ au temps n, c'est qu'avant on se trouvait à la position $k-1$. Donc

$$\mathbf{P}\left(X_n = k\right) = \mathbf{P}\left(X_n = k, X_{n-1} = k-1\right) = \mathbf{P}(X_n = k | X_{n-1} = k-1)\,\mathbf{P}\left(X_{n-1} = k-1\right),$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}\left(X_n = k\right) = p\mathbf{P}\left(X_{n-1} = k-1\right)}.$$

4. Constatons tout d'abord que X_n est, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, une variable aléatoire finie. Donc

$$\mathbf{E}\left(X_n\right) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}\left(X_n = k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(X_n = k\right),$$

donc d'après la question précédente

$$\mathbf{E}\left(X_n\right) = \sum_{k=1}^{n} kp\mathbf{P}\left(X_{n-1} = k-1\right) = p\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(X_{n-1} = k-1\right) = p\sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)\mathbf{P}\left(X_{n-1} = \ell\right).$$

On reconnaît alors l'espérance de X_{n-1} puisque $X_{n-1}(\Omega) = [\![0\,,\,n-1]\!]$. D'où

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{E}\left(X_n\right) = p\mathbf{E}\left(X_{n-1}\right).$$

5. Puisqu'on a une suite géométrique, on déduit l'expression en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{E}\left(X_n\right) = p^{n-1}\mathbf{E}\left(X_1\right) = p^{n-1}p = p^n.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X_n\right) = \begin{cases} p^n & \text{si } n \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Exercice ALEA.13.19 | Après la pluie viendra le beau temps, enfin presque-sûrement, deux états. Dans un certain pays, il fait rarement beau deux jours de suite.

- Si un jour il fait beau, le lendemain il fait moche avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- Si un jour il fait moche, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain.

On note M «il fait moche», et B «il fait beau», et X_n l'état du temps au jour n pour tout n, ainsi que pour tout $n \geqslant 1$:

$$Z_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\left(X_n = B\right) \\ \mathbf{P}\left(X_n = M\right) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $M \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,
$$Z_{n+1} = M \cdot Z_n.$$
2. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale, de format 2×2, telles que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Proposer une fonction `simu_temps(n, temps_initial)` et qui retourne une simulation de X_n, où le temps initial à $n = 1$ est donné par `temps_initial`. Conjecturer alors une comparaison entre les deux limites ci-dessous, en admettant l'existence :
$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(X_n = M\right), \quad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(X_n = B\right).$$
Le temps initial influe-t-il sur ces limites?
4. Démontrer cette conjecture. Est-ce conforme à l'intuition? *On pourra commencer par introduire* $Y_n = P^{-1} \cdot X_n$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}^\star$*, et chercher une récurrence simple sur* Y_n

Solution (exercice ALEA.13.19)

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(\{X_n = B\}, \{X_n = M\})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=B) &= \mathbf{P}(X_{n+1}=B \mid X_n=B)\,\mathbf{P}(X_n=B) + \mathbf{P}(X_{n+1}=B \mid X_n=M)\,\mathbf{P}(X_n=M)\\ &= \left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\mathbf{P}(X_n=B) + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}(X_n=M),\\ \mathbf{P}(X_{n+1}=M) &= \mathbf{P}(X_{n+1}=M \mid X_n=B)\,\mathbf{P}(X_n=B) + \mathbf{P}(X_{n+1}=M \mid X_n=M)\,\mathbf{P}(X_n=M)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\mathbf{P}(X_n=B) + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}(X_n=M).\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad Z_{n+1} = M\cdot Z_n \text{ avec } \boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned} M-\lambda I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} &\quad L_1 \leftrightarrow L_2\\ \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \\ \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &\quad L_2 \leftarrow \tfrac{2}{3}L_2 - (1/3-\lambda)L_1\\ \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}, & \end{aligned}$$

où $P(\lambda) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) = -\left(\lambda+\frac{1}{6}\right)(\lambda-1)$. Donc $\boxed{\mathrm{Spec}(M) = \left\{-\frac{1}{6}, 1\right\}}$.

De plus,

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \in E_1(M)$ si et seulement si :

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 4\end{pmatrix}.$$

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{6}}(M)$ si et seulement si :

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{M = P\cdot D\cdot P^{-1},\quad D = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4\end{pmatrix},\quad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}}.$$

3.
```python
import random as rd

def simu_temps(n, temps_initial):
    """
    1 : beau temps
    0 : mauvais temps
    retourne une simulation du temps au bout de n jours
    """
    temps = temps_initial
    for _ in range(2, n+1):
        if temps == 1:
            if rd.random() < 2/3:
                temps = 0
        else:
            # il faisait donc moche
            if rd.random() < 1/2:
                temps = 1
    return temps
```

Affichons par exemple 10 essais pour le jour 200.

```python
>>> L = [simu_temps(200, 1) for _ in range(100)]
>>> len([temps for temps in L if temps == 1]) # nb beau
36
```

```
>>> len([temps for temps in L if temps == 0]) # nb moche
64
```

On constate une plus forte probabilité de mauvais temps, on conjecture alors :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = B) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = M).}$$

4. Est-ce conforme à l'intuition ? Oui, puisque la probabilité conditionnelle 2/3 est élevée. Posons

$$Y_n = P^{-1}Z_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= P^{-1}Z_{n+1} \\ &= P^{-1}PDP^{-1}Z_n \\ &= DY_n. \end{aligned}$$

Donc notons $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ avec $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{6}a_n, \ b_{n+1} = b_n,$$

donc comme $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b_1.$$

Or,

$$Z_n = P \cdot Y_n = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \xrightarrow[]{n\to\infty} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 \\ 4b_1 \end{pmatrix}.$$

Or $Y_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_1 = B) \\ \mathbf{P}(X_1 = M) \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_1 = B) \\ \mathbf{P}(X_1 = M) \end{pmatrix},$$

donc en analysant la deuxième ligne du produit matriciel, on obtient :

$$b_1 = \frac{1}{7}(\mathbf{P}(X_1 = B) + \mathbf{P}(X_1 = M)) = \frac{1}{7}.$$

D'où

$$Z_n \xrightarrow[]{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = B) = \frac{3}{7}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = M) = \frac{4}{7}}.$$

Exercice ALEA.13.20 | **Souris dans un tunnel, trois états.** Des chercheurs font des expériences sur des souris, ils disposent de trois tunnels A, B et C. Les deux premiers sont des cul-de-sac et le troisième, le C, permet à la souris de sortir. On constate que :

- la première fois, elle choisit au hasard l'un des trois tunnels.
- Lorsque la souris se trompe (donc aboutit à un cul-de-sac), la fois d'après, elle choisit au hasard l'un des deux autres tunnels.
- Lorsqu'elle réussit à sortir, la fois d'après, elle reprend le même tunnel.

On note X_n le tunnel choisi (donc A,B,C) à la $n \in \mathbf{N}^\star$-ième tentative de sortie, et on note pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$Z_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = A) \\ \mathbf{P}(X_n = B) \\ \mathbf{P}(X_n = C) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer Z_1.
2. Déterminer une matrice $M \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad Z_{n+1} = MZ_n.$$

3. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale, de format 3×3, telles que $\mathrm{M}=\mathrm{P}\cdot\mathrm{D}\cdot\mathrm{P}^{-1}$. Il ne sera pas nécessaire de calculer P^{-1}.

4. On note à présent $\mathrm{Y}_n=\mathrm{P}^{-1}\cdot\mathrm{X}_n$, montrer que $\mathrm{Y}_{n+1}=\mathrm{D}\cdot\mathrm{Y}_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$.

5. En déduire l'existence et la valeur des limites

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A}),\quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B}),\quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C}).$$

Est-ce conforme à l'intuition ?

Solution (exercice ALEA.13.20)

1. Puisque la première fois il choisit un tunnel au hasard X_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}$ donc $\boxed{\mathrm{Z}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

2. Soit $n\in\mathbf{N}$. Alors puisque $(\mathrm{X}_n=\mathrm{A},\mathrm{X}_n=\mathrm{B},\mathrm{X}_n=\mathrm{C})$ est un système complet d'évènements, on déduit par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{A}) &= \mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{A}|\mathrm{X}_n=\mathrm{A})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A})+\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{A}|\mathrm{X}_n=\mathrm{B})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B})\\
&\quad+\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{A}|\mathrm{X}_n=\mathrm{C})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C})\\
&=0\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A})+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B})+0\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C}),\\
\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{B}) &= \mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{B}|\mathrm{X}_n=\mathrm{A})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A})+\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{B}|\mathrm{X}_n=\mathrm{B})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B})\\
&\quad+\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{B}|\mathrm{X}_n=\mathrm{C})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C})\\
&=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A})+0\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B})+0\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C}),\\
\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{C}) &= \mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{C}|\mathrm{X}_n=\mathrm{A})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A})+\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{C}|\mathrm{X}_n=\mathrm{B})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B})\\
&\quad+\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{C}|\mathrm{X}_n=\mathrm{C})\,\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C})\\
&=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{A})+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{B})+1\cdot\mathbf{P}(\mathrm{X}_n=\mathrm{C}).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N}^\star,\quad \mathrm{Z}_{n+1}=\mathrm{M}\mathrm{Z}_n,\quad \mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\\frac12&0&0\\\frac12&\frac12&1\end{pmatrix}}.$$

3. Soit $\lambda\in\mathbf{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I}_3 &= \begin{pmatrix}-\lambda&\frac12&0\\\frac12&-\lambda&0\\\frac12&\frac12&1-\lambda\end{pmatrix}\\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&1-\lambda\\\frac12&-\lambda&0\\-\lambda&\frac12&0\end{pmatrix} && \mathrm{L}_1\leftrightarrow\mathrm{L}_3\\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&1-\lambda\\0&-\left(\lambda+\frac12\right)&\lambda-1\\0&\frac12\left(\lambda+\frac12\right)&\lambda(1-\lambda)\end{pmatrix} && \mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_3\leftarrow\tfrac12\mathrm{L}_3+\lambda\mathrm{L}_1\\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&1-\lambda\\0&-\left(\lambda+\frac12\right)&\lambda-1\\0&0&\mathrm{P}(\lambda)\end{pmatrix}, && \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3+\tfrac12\mathrm{L}_2
\end{aligned}$$

avec $\mathrm{P}(\lambda)=\lambda(1-\lambda)+\frac12(\lambda-1)=(1-\lambda)\left(\lambda-\frac12\right)$. Donc : $\boxed{\mathrm{Spec}(\mathrm{M})=\left\{-\frac12,\frac12,1\right\}}$. Et, par ailleurs,

- $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{E}_1(\mathrm{M})$ si et seulement si :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0,\ y=0\iff x=y=0.$$

Donc $\mathrm{E}_1(\mathrm{M})=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/2}(M)$ si et seulement si :

$$x + y + z = 0,\ -y - \frac{z}{2} = 0 \quad \iff \quad z = -2y,\ x = y.$$

Donc $E_{1/2}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1/2}(M)$ si et seulement si :

$$x + y + 3z = 0,\ z = 0 \quad \iff \quad z = 0,\ x = -y,\ z = 0.$$

Donc $E_{-1/2}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc

$$\boxed{M = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $Y_n = P^{-1} \cdot X_n$. Alors

$$Y_{n+1} = P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot X_n = D\left(P^{-1} X_n\right) = D \cdot Y_n.$$

Donc $\boxed{Y_{n+1} = D \cdot Y_n.}$

5. Notons $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, alors la question précédente livre que (a_n) (*resp.* $(b_n), (c_n)$) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ (*resp.* $\frac{1}{2}, 1$). Donc :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim_{n \to \infty} b_n, \quad c_n \xrightarrow{n \to \infty} c_1.$$

Dans la suite, le symbole « tend vers » pour des matrices correspondra à des limites coefficient par coefficient. On a

$$Y_n \xrightarrow{n \to \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Donc puisque P est une matrice constante,

$$X_n = PY_n \xrightarrow{n \to \infty} P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer c_1 il nous faut maintenant calculer P^{-1}. Après calculs, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $c_1 = 1$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(X_n = A) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(X_n = B) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(X_n = C) = 1}.$$

Est-ce conforme à l'intuition ? Oui, puisqu'une fois le bon tunnel choisi (le C), on ne se trompe plus. *En language chaîne de* M*ARKOV, on parle de tunnel « absorbant »*