Chapitre ALEA.14.

Variables aléatoires à densité

Résumé & Plan

La définition d'intégrale généralisée du Chapter ANA.11 va permettre l'étude d'une nouvelle famille de variables aléatoires que l'on dit *à densité* ; elles sont réelles, et la probabilité que cette variable soit dans un certain ensemble se mesure comme l'intégrale d'une certaine fonction.

1 Généralités **570**

1.1 Définitions 570

1.2 Loi & fonction de répartition 572

1.3 Fonctions de variables aléatoires à densité 579

1.4 Indépendance 582

2 Espérance, Variance, Moments **585**

2.1 Espérance d'une variable à densité 585

2.2 Moments d'ordre supérieur 590

3 Lois usuelles **592**

3.1 Loi uniforme sur $[a, b]$ 592

3.2 Loi exponentielle 595

3.3 La loi normale 598

3.4 Bilan des lois continues usuelles 603

4 Exercices **606**

4.1 Généralités 606

4.2 Études de lois 608

4.3 Fonctions de variables aléatoires 609

4.4 Discret vS. Continu 609

4.5 Autour des min et max 613

L'origine de la loi normale remonte aux travaux de Jacques Bernoulli sur son théorème d'or, appelé aujourd'hui loi des grands nombres, publié dans son oeuvre Ars Conjectandi en 1713. Il y calcule des probabilités liées à des paris sur des jeux de pile ou face à 2, notamment le calcul de la probabilité que la moyenne du nombre de pile soit proche de la moyenne théorique 1/2, calcul dans lequel apparait le calcul des factorielles.

— Le saviez-vous ?

Cadre

Dans tout le chapitre, et même lorsque cela n'est pas précisé, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions

Définition ALEA.14.1 | Densité de probabilité

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f est une *densité de probabilité* si :

- f est positive ou nulle, continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est donc définie au sens de la Définition ANA.11.9 du Chapter ANA.11 (intégrale d'une fonction continue sauf en un nombre fini de points).

Exemple 1 — *Exemples de densité*

1. **(Densité de Laplace)** Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. C'est une densité de probabilité.

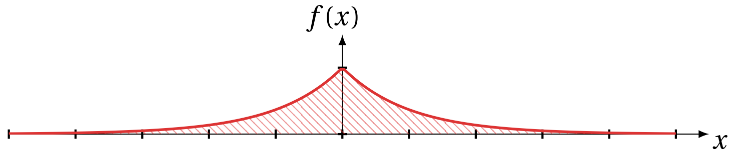


Fig. ALEA.14.1. : Graphe de la densité de Laplace

2. Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{b}{2^x} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$ où $b \in \mathbf{R}$. Il existe b tel que g soit une densité de probabilité.

3. (Densité normale) Soit h la fonction définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par : $x \in \mathbf{R}$ par : $h(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ où $c \in \mathbf{R}$. Il existe c tel que h soit une densité de probabilité.

Avant de passer aux définitions qui suivent, constatons un premier lemme de convergence d'intégrale.

Lemme ALEA.14.1

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une densité de probabilité. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\int_{-\infty}^{x} f$ converge.

Preuve Rappelons que $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$. Cette intégrale étant généralisée en $\pm\infty$, cela signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int_{-\infty}^{x} f, \quad \int_{x}^{\infty} f \quad \text{convergent.}$$

D'où le résultat.

Définition/Proposition ALEA.14.1 | Variable aléatoire à densité & continue

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que :

- X est une *variable aléatoire réelle à densité* s'il existe une densité de probabilité notée f_X telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X.$$

Une telle fonction f_X est appelée *une* densité de X.

- X est une *variable aléatoire réelle continue* si elle est à densité, et qu'il existe une densité de probabilité f_X continue. Il n'existe alors qu'une seule densité de probabilité, c'est f_X.

Notation

Si X est une variable à densité, on notera f_X une densité de X.

Attention

On prendra garde à parler **d'une** densité, et **pas de la** densité, sauf dans le cas continu.

Preuve *(de l'unicité dans le cas continu)* Soit X une variable aléatoire continue, choisissons f_X une densité de probabilité continue. Alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X.$$

Comme f_X est continue, un résultat du Chapter ANA.11 nous donne alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X'(x) = f_X(x).$$

D'où l'unicité : l'unique densité qui convient est la dérivée de F_X.

En revanche, pour une variable aléatoire seulement à densité, l'égalité a lieu sauf en un nombre fini de points.

Proposition ALEA.14.1 | Non-unicité d'une densité

Soit X une variable aléatoire réelle dont une densité est notée f_X et g_X une autre densité, alors $f_X = g_X$ **sauf en un nombre fini de points**.

Preuve Notons $f_1, \dots, f_d$ et $g_1, \dots, g_{d'}$ une collection de $d + d', (d, d') \in (\mathbf{N}^\star)^2$ nombre réels tels que f_X (*resp.* g_X) est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{f_1, \dots, f_d\}$ (*resp.* sur $\mathbf{R} \setminus \{g_1, \dots, g_{d'}\}$). Alors en notant $\mathscr{D} = \{f_1, \dots, f_d\} \cup \{g_1, \dots, g_{d'}\}$, nous avons, d'après le cours d'intégration :

- $x \in \mathbf{R} \setminus \mathscr{D} \longmapsto \int_{-\infty}^x f_X$ et $x \in \mathbf{R} \setminus \mathscr{D} \longmapsto \int_{-\infty}^x g_X$ sont dérivables,
- et par définition d'une densité, $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \int_{-\infty}^x f_X = \int_{-\infty}^x g_X = \mathbf{P}(X \leqslant x) \quad (\star)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathscr{D}$, on obtient en dérivant $(\star)$: $f_X = g_X$. En d'autres termes, $f_X = g_X$ sauf en un nombre fini de points.

On achève ce paragraphe par un résultat provisoirement admis.

Proposition ALEA.14.2

Soit X une variable à densité de densité f_X. Alors pour tout intervalle I de la forme $[a, b], [a, b[,]a, b]$ ou $]a, b[$, $a < b, (a, b) \in (\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})^2$ on a :

$$\mathbf{P}(X \in I) = \int_I f_X.$$

Preuve Faisons le cas $I =]a, b]$, les autres sont provisoirement admis.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in I) &= \mathbf{P}(\{X \leqslant b\} \setminus \{X \leqslant a\}) \\
&= \mathbf{P}(X \leqslant b) - \mathbf{P}(X \leqslant a) \\
&= \int_{-\infty}^b f_X - \int_{-\infty}^a f_X \\
&= \int_a^b f_X = \int_I f_X.
\end{aligned}$$

1.2. Loi & fonction de répartition

Rappelons que nous avons défini la loi d'une variable aléatoire réelle X comme l'application qui à tout tout intervalle réel I associe

$$\mathbf{P}_X(I) = \mathbf{P}(X \in I).$$

Nous avons déjà vu qu'il est aisé d'exprimer $\mathbf{P}(X \in I)$ en fonction d'une densité. Plus précisément

$$\mathbf{P}(X \in I) = \int_I f_X.$$

Cela nous invite donc à assimiler la notion de loi à celle de la donnée d'une fonction densité f_X.

Définition/Proposition ALEA.14.2 | Loi d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f_X.

- On appelle *loi* — par abus de langage — de la variable aléatoire réelle à densité X la donnée d'une densité f_X de X.
- **(avoir même loi que)** Soit Y une autre variable aléatoire à densité de densité f_Y. On dit que X, Y *ont même loi* (on note $X \sim Y$) si $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ *i.e.* si pour tout intervalle I,

$$\mathbf{P}(X \in I) = \mathbf{P}(Y \in I).$$

  On a de plus :

$$X \sim Y \iff f_X = f_Y \quad \text{sauf en un nombre fini de points.}$$

- **(Déterminer la loi)** *Déterminer la loi* d'une variable aléatoire réelle à densité c'est calculer une densité f_X.

Preuve Montrons

$$X \sim Y \iff f_X = f_Y \quad \text{sauf en un nombre fini de points.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $X \sim Y$. Alors pour tout intervalle I,

$$\mathbf{P}(X \in I) = \int_I f_X = \int_I f_Y = \mathbf{P}(Y \in I).$$

on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant les valeurs des fonctions en un nombre fini de points

Donc $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout intervalle I, $\mathbf{P}(X \in I) = \mathbf{P}(Y \in I)$. Alors, en choisissant $I =]-\infty, x]$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{x} f_X = \int_{-\infty}^{x} f_Y.$$

Ainsi, f_Y est aussi une densité de probabilité de X, tout comme f_X donc par un résultat précédent, on obtient :

$$f_X = f_Y \quad \text{sauf en un nombre fini de points.}$$

Notation

Lorsque X, Y ont même loi, on note $X \sim Y$. Si Y suit une loi usuelle $\mathscr{L}$ (une loi normale, exponentielle, *etc.*), on note $X \hookrightarrow \mathscr{L}$.

Comme dans le cas discret, la fonction de répartition caractérise la loi.

Proposition ALEA.14.3 | La fonction de répartition caractérise la loi

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à densité. Alors :

$$X \sim Y \iff F_X = F_Y.$$

Deux variables aléatoires à densité ont donc même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Le mot « loi » est finalement assez peu souvent utilisé pour les variables aléatoires à densité, puisque finalement calculer la loi ou une densité c'est la même chose.

Lien entre densité et fonction de répartition. En pratique pour montrer qu'une variable aléatoire est à densité, on utilise le théorème fondamental suivant.

Théorème ALEA.14.1 | Loi à densité & fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. Alors :

$$X \text{ est à densité} \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & F_X \text{ est continue sur } \mathbf{R}, \\ \textbf{(ii)} & F_X \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \ \underline{\textbf{sauf éventuellement en un nombre fini de points}}. \end{cases}$$

Dans ce cas, si f est une fonction positive ou nulle telle que

$$F_X'(x) = f(x) \quad \text{en tout point } x \text{ où } F_X \text{ est dérivable,}$$

alors f est une densité de X. En particulier,

$$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \begin{cases} F_X'(x) & \text{si } F_X \text{ dérivable en } x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une densité de X.

Remarque 1.1 — Pour les lois continues, on remplacerait « $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points » par « $\mathscr{C}^1$ ». Une densité s'obtiendrait en dérivant la fonction de répartition sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Attention

Attention aux mélanges entre la définition d'une densité, et le théorème précédent.

Méthode Pour montrer qu'une variable aléatoire est à densité

Deux méthodes sont possibles :

1. on revient à la définition en devinant une densité,
2. **ou**[1] on montre que la fonction de répartition F_X est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini points. Une densité est alors obtenue en dérivant F_X là où elle est dérivable. On met en général la valeur zéro[2] pour une densité là où F_X n'est pas dérivable.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Admis.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Notons f une densité de X, et $d_1 < \cdots < d_n$ les points où elle n'est pas continue.

- **(i)** La fonction F_X est continue en dehors de $\{d_1, \dots, d_n\}$, et continue à droite en les d_i, $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ car c'est une fonction de répartition (voir le Chapter ALEA.12). Il suffit donc de montrer la continuité à gauche de

$$F_X : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} f,$$

en chaque d_i, $i \in [\![1\,,\,n]\!]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} F_X(d_i) &= \int_{-\infty}^{d} f \\ &= \lim_{x \to d_i^-} \int_{-\infty}^{x} f \quad \text{\textit{définition de l'intégrale}} \\ &= \lim_{x \to d_i^-} F_X(x). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la continuité à gauche et donc la continuité.

- **(ii)** Soit $b \in \mathbf{R} \setminus \{d_1; \dots d_n\}$. Puisque les d_i sont en nombre fini, on peut trouver $a \in \mathbf{R} \setminus \{d_1; \dots d_n\}$ de sorte que $a < b$ et que f soit continue sur $[a, b]$ intervalle ne contenant aucun des d_i. Par la relation de Chasles, on a alors :

$$\forall x \in [a, b], \quad F_X(x) = F_X(a) + \int_a^x f.$$

Or f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le cours d'intégration, $x \in [a, b] \longrightarrow \int_a^x f$ est dérivable avec $F_X'(x) = 0 + f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Comme f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{d_1; \dots d_n\}$, F_X l'est aussi.

[1] C'est cette méthode que nous utiliserons le plus souvent

[2] valeur arbitraire

On rappelle le théorème ci-dessous, et énoncé dans le Chapter ALEA.12, permettant de montrer qu'une fonction est une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

Théorème ALEA.14.2 | Existence d'une variable aléatoire de fonction de répartition fixée [Rappel]

Soit F une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles telle que :

1. F est croissante sur $\mathbf{R}$,
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,
3. F est continue à droite en tout point,

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace tels que $F_X = F$.

Les deux résultats s'utilisent parfois conjointement, en montrant d'abord l'existence de X (et d'un $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ sur lequel elle est définie) puis en montrant qu'elle est à densité. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2 — Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ \frac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Justifier que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, dont on donnera une densité f.

2. Tracer les courbes respectives de F et f.

Différences majeures avec les variables aléatoires discrètes & Conséquences. Rappelons que dans le Chapter ALEA.12 nous avons défini la notion d'atome d'une variable aléatoire réelle X comme des points $x \in \mathbf{R}$ où $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$. Nous avons vu que si X est discrète, alors tous les $x \in X(\Omega)$ sont des atomes. En revanche, pour les lois continues ou à densité il n'y en a aucun, comme nous allons le voir dans le corollaire qui suit.

Corollaire ALEA.14.1 | Une variable aléatoire à densité n'a pas d'atome

Soit X une variable à densité. Pour tout réel x, on a :

$$\mathbf{P}(X = x) = 0.$$

Preuve Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, on a

$$0 \leqslant \mathbf{P}(X = x) \leqslant \mathbf{P}\left(X \in \left]x - \frac{1}{n}, x\right]\right) = F_X(x) - F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) \quad (\star).$$

Donc puisque F_X est continue en x, elle est en particulier continue à gauche en x, donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = F_X(x).$$

On conclut ensuite par théorème d'encadrement dans $(\star)$, d'où l'on tire :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = x) = 0.$$

Corollaire ALEA.14.2 | Une variable aléatoire à densité n'est pas à support dénombrable

Soit X une variable à densité. Alors $X(\Omega)$ n'est pas au plus dénombrable, *i.e.* il n'est ni fini, ni dénombrable.

Preuve Supposons par l'absurde que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Puisque X est sans atome, on peut établir facilement le corollaire qui suit et qui nous dit la chose suivante : pour obtenir la probabilité qu'une variable aléatoire à densité soit dans un certain intervalle, on intègre la densité sur cet intervalle. De plus, l'ouverture ou non des bornes n'a aucune importance.

Corollaire ALEA.14.3 | Bornes des intervalles & loi à densité

Soit X une variable à densité de fonction de répartition F_X et on note f_X une densité. Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

1. $F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(X < b) = \int_{-\infty}^{b} f_X$,
2. $1 - F_X(a) = \mathbf{P}(X \geq a) = \mathbf{P}(X > a) = \int_{a}^{+\infty} f_X$,
3. $\mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f_X$.

Attention

En règle générale,

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b)$$

est faux pour des variables aléatoires discrètes.

Preuve

1.

2.

3.

Valeurs prises par une variable aléatoire à densité. On se pose dans ce paragraphe la question suivante : que dire de l'univers-image ? Comment obtenir des informations sur les valeurs prises par X ? Autant les variables aléatoires discrètes sont définies à l'aide de $X(\Omega)$, pour les variables aléatoires à densité, il convient de réfléchir un peu. Nous allons pouvoir déterminer des intervalles réels I tels que

$$\mathbf{P}(X \in I) = 1,$$

mais pas directement $X(\Omega)$. Autrement dit, X prendra ses valeurs dans I avec probabilité 1.

- **(À l'aide de l'expression de X)** Si par exemple $X = h\left(\widetilde{X}\right)$ avec $\widetilde{X}$ une variable aléatoire et $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, alors $X(\Omega) = h\left(\widetilde{X}(\Omega)\right) \subset h(\mathbf{R})$. Par exemple, si $X = \widetilde{X}^2$ avec on a clairement $X(\Omega) \subset \mathbf{R}^+$.
- **(À l'aide d'une densité f_X)** Voyons quelques exemples.
  1. On considère $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ et X une variable aléatoire de densité f. Alors $\mathbf{P}\left(X \in \mathbf{R}^+\right) = 1$. *Ce sera, plus tard, une densité usuelle, celle de la loi*

exponentielle de paramètre 1. *On admet pour le moment que c'est bien une densité.*

2. On considère $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ la densité de Laplace déjà étudiée et X une variable aléatoire de densité f. Alors $\mathbf{P}(X \in \mathbf{R}) = 1$ par définition d'une densité, et on ne peut pas faire mieux.
3. On considère $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ et X une variable aléatoire de densité f. Alors $\mathbf{P}(X \in [0,1]) = 1$. Que vaut $\mathbf{P}(X \in [-1,1])$? $\mathbf{P}\left(X \in [-10^{23},1]\right)$?
Ce sera, plus tard, une densité usuelle, celle de la loi uniforme sur $[0,1]$.

Attention

Du dernier exemple, on constate qu'il n'y a pas unicité de I tel que

$$\mathbf{P}(X \in I) = 1.$$

Tous les $J \supset I$ vérifient aussi $\mathbf{P}(X \in J) = 1$.

En résumé, les intervalles où f_X est non nulle donnent un intervalle I tel que $\mathbf{P}(X \in I) = 1$.

- **(À l'aide de la fonction de répartition)** Notons $a < b$ deux réels, avec éventuellement $a = -\infty$ et $b = \infty$, de sorte que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant (\text{ou} <)\ a, \\ 1 & \text{si } x \geqslant (\text{ou} >)\ b. \end{cases}$$

Alors en dérivant là où F_X est dérivable, on obtient une densité qui est nulle en dehors de $[a,b]$. Donc $\mathbf{P}\left(X \in [a,b]\right) = 1$.
En résumé, les intervalles où F_X est non nulle et différente de 1 donnent un intervalle I tel que $\mathbf{P}(X \in I) = 1$.

Méthode — Obtenir des renseignements sur $X(\Omega)$ lorsque X est à densité

Au choix :

- on peut déduire des informations si X est une fonction de variable aléatoire (par exemple un carré, une valeur absolue, une racine carrée, *etc.*)
- on regarde une densité puis on analyse les points où elle est non nulle.
- On regarde là où la fonction de répartition est différente de zéro et un.

Existence d'une variable à densité de loi fixée. Un certain nombre d'énoncés probabilistes commencent par la phrase suivante :

« soit X une variable aléatoire à densité de densité f » avec f une densité de probabilité.

Ces énoncés supposent l'existence de X. Mais cela ne définit pas X en tant qu'application, c'est-à-dire $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, mais existe-t-elle vraiment ? On aimerait donc au moins savoir si une telle variable aléatoire existe sur un certain $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ à trouver : la réponse est oui, comme dans le cas discret, dès que f est bien une densité de probabilité.

Théorème ALEA.14.3 | Existence d'un espace probabilisé associé à une densité de probabilité

Soit f une densité de probabilités. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X de densité f définie sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

Dans la plupart des situations que nous étudierons en pratique, le travail commencera par la donnée d'une ou plusieurs variables aléatoires de lois prescrites que nous étudierons sans jamais préciser là encore l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ sur lequel elles sont définies.

Celui-ci est voué à rester caché comme dans le cas discret.

Preuve Considérons

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & [0,1], \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f. \end{array} \right.$$

Montrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité en appliquant le Théorème ALEA.12.3 du Chapter ALEA.12.

- F est croissante sur $\mathbf{R}$.

- $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1.$

- F est continue à droite en tout point et même continue comme nous l'avons déjà vérifié au début du chapitre.

Donc il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace tels que $F_X = F$. Par construction, X est alors à densité puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$,[a]

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X.$$

Remarque 1.2 — L'hypothèse de densité remplace donc l'hypothèse « $\sum_{x \in X(\Omega)} p_x = 1$ » dans le cas discret.

Exemple 3 — On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Il existe une variable aléatoire réelle X de densité f.

2. Déterminer de plus la fonction de répartition de X.

[a] On vérifie ici la définition d'une variable aléatoire à densité

1.3. Fonctions de variables aléatoires à densité

Traitons quelques exemples simples d'images de lois à densité. De manière générale, toute image d'une variable aléatoire à densité par une fonction n'est pas à densité. En effet, l'image par la fonction nulle d'une variable aléatoire à densité est la variable aléatoire nulle, qui est clairement discrète et n'est donc pas à densité.

Attention

Les calculs qui suivent sont extrêmement classiques en pratique, à savoir refaire absolument.

Méthode — Montrer que l'image d'une variable aléatoire réelle à densité est à densité

Soit X une variable à densité et $Y = g(X)$ avec g une fonction au moins définie sur $X(\Omega)$ (valeur absolue, logarithme, *etc.*).

1. Deviner un ensemble contenant $Y(\Omega)$ au moyen de l'image de la fonction g.
2. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.
3. Calculer la fonction de répartition de Y *i.e.* $\mathbf{P}(Y \leqslant y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ et vérifier le Théorème ALEA.14.1. Pour effectuer ledit calcul, faire des disjonctions de cas en y en utilisant l'ensemble trouvé en **1**.

Exemple 4 — *Valeur absolue & Carré* Soit X une variable à densité de densité f. Alors :

- $Y = |X|$ est à densité, déterminer une densité.
- $Z = X^2$ est à densité, déterminer une densité.

Exemple 5 — *Carré dans un cas particulier* Soit X une variable à densité de densité $t \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \in [-1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité.

Exemple 6 — *Exponentielle* Soit X une variable à densité de densité f, et $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité.

Exemple 7 — *Logarithme* Soit X une variable à densité telle que $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$, et $Y = \ln(X)$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité.

- **(Seconde méthode : en utilisant la définition.)**

Exemple 8 — *Fonction affine* Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 0$. Alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité g définie par

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

- **(Première méthode : en utilisant le Théorème ALEA.14.1.)**

1.4. Indépendance

C'est la même définition que dans le cas discret, mais on remplace les égalités dans les évènements par des symboles « $\leqslant$ ».

Définition ALEA.14.2 | Indépendance de variables aléatoires à densité

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une collection de n variables aléatoires à densité.

- **(Indépendance)** Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont dites *indépendantes* si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n \leqslant x_n).$$

- **(Indépendance deux à deux)** Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont dites *indépendantes deux à deux* si pour tous $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

Plus généralement, si (X_n) est une famille infinie de variables aléatoires, elles sont indépendantes (*resp.* indépendantes deux à deux) si et seulement si toute sous-famille finie est indépendante (*resp.* deux à deux indépendantes).

Notation

Dans ce cas on notera, comme dans le cas discret, $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ pour $n = 2$, et $(X_n) \perp\!\!\!\perp$ en cas d'indépendance mutuelle.

Proposition ALEA.14.4 | Indépendance & Intervalles

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à densité indépendantes, et $I_1 \ldots I_n$ une collection de n intervalles réels. Alors :

$$\mathbf{P}(X_1 \in I_1, \ldots, X_n \in I_n) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Définition ALEA.14.3 | Suite i.i.d.

On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires à densité est i.i.d. (on dit *indépendantes et identiquement distribuées*) si elles sont indépendantes et de même loi.

Fonctions de variables aléatoires indépendantes. Nous admettons les résultats qui suivent, qui sont les mêmes que dans le cas discret.

Théorème ALEA.14.4

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une collection de n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n$ où pour tout $f_i : X_i(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires réelles $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes.

Exemple 9 — Si $X_1, \ldots, X_3$ sont indépendantes et X_3 ne s'annule pas, alors $X_1^2, X_2^2, 1/X_3$ sont indépendantes.

Théorème ALEA.14.5 | Lemme des coalitions ou Indépendance par paquets

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une collection de n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors pour toutes fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, et $n_1, \ldots, n_k$, k des entiers tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, où pour tout $\varphi_i : \mathbf{R}^{n_i} \longrightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires réelles

$$\varphi_1(X_1, \ldots, X_{n_1}), \ldots, \varphi_k(X_{n_1+\ldots+n_{k-1}}, \ldots, X_n)$$

sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Exemple 10 — Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont indépendantes alors $X_1^2 + X_2^2, X_3X_5, X_4$ sont indépendantes.

La proposition suivante est indiqué comme hors-programme dans la mesure où la formule obtenue n'est pas à connaître par coeur. En revanche, comme dans le cas discret, la méthode mise en jeu dans la démonstration doit être maîtrisée.

Proposition ALEA.14.5 | Minimum & Maximum de variables aléatoires à densité [H.P]

Soient $X_1, \dots, X_n$ à densité de fonctions de répartition respectives $F_1, \dots, F_n$ et mutuellement indépendantes. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}\left(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x\right) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(x)),$$

$$\mathbf{P}\left(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant x\right) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x).$$

Si de plus les variables aléatoires sont i.i.d. de même loi qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X, alors :

$$\mathbf{P}\left(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x\right) = (1 - F_X(x))^n,$$

$$\mathbf{P}\left(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant x\right) = F_X(x)^n.$$

Par conséquent, les variables aléatoires $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ sont des variables aléatoires réelles à densité.

Notez que lorsque $n = 2$, on a

$$\max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2, \quad \max(X_1, X_2) \cdot \min(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2.$$

La première relation permet par exemple de calculer l'espérance de l'un connaissant l'espérance de l'autre (voir plus bas pour la définition de l'espérance).

Preuve

Attention

Les égalités

$$\mathbf{P}\left(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant x\}\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \geqslant x\}\right)$$

sont vraies. Mais en revanche, les réunions précédentes ne sont **pas disjointes**.

Méthode Trouver la loi d'un max de variables aléatoires à densité indépendantes

Pour le max $X = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. on calcule la fonction de répartition : $\mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x) \dots \mathbf{P}(X_n \leqslant x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
2. On utilise ensuite l'expression de la fonction de répartition à l'aide de la densité donnée.
3. On vérifie le Théorème ALEA.14.1 *i.e.* que $x \longmapsto \mathbf{P}(X \leqslant x)$ est bien continue et

de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On déduit alors également une densité.

Méthode Trouver la loi d'un min de variables aléatoires à densité indépendantes

Pour le min $X = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. on calcule la fonction d'antirépartition : $\mathbf{P}(X > x) = \mathbf{P}(X_1 > x) \dots \mathbf{P}(X_n > x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
2. On utilise ensuite l'expression de la fonction de répartition à l'aide de la densité donnée.
3. On vérifie le Théorème ALEA.14.1 *i.e.* que $x \longmapsto 1 - \mathbf{P}(X > x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ est bien continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On déduit alors également une densité.

Exemple 11 — ***Cas d'uniformes*** Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{U}[0,1]$ *i.e.* de densité $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que $S = \max(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité.

2. ESPÉRANCE, VARIANCE, MOMENTS

2.1. Espérance d'une variable à densité

Rappelons que la notion d'espérance dans le cas discret est une moyenne (éventuellement une somme infinie) des valeurs de la variable aléatoire en question, et pondérées par sa loi. Dans le Chapter ANA.11, nous avons défini la notion de moyenne pondérée pour une fonction : en particulier la *valeur moyenne de* $t \longmapsto t$ *pondérée par* f_X une densité de probabilité[3] est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,dt.$$

Puisque f_X ne s'annule pas là où X prend ses valeurs, on est bien en train de « moyenner » les valeurs de X, pondérées par f_X. Ce sera notre définition de l'espérance.

Définition ALEA.14.4 | Espérance d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X.

- **(Admettre une espérance)** On dit que X *admet une espérance* ou que X est *intégrable* si :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt \quad \underline{\textbf{converge absolument.}}$$
- **(Valeur de l'espérance)** Si X admet une espérance, alors on appelle *espérance de* X la quantité
$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt.$$

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite *centrée*.

[3]Qui est donc bien d'intégrale 1

Attention

Comme dans le cas discret, l'existence d'une espérance n'est pas automatique !

Attention

Il convient d'être vigilant, comme dans le cas discret, sur le vocabulaire. En effet :

1. admettre une espérance signifie que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_X(t)|\,dt$ converge.
2. La valeur de l'espérance est quant à elle : $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$.

Remarque 2.1 — Pourquoi supposer de la convergence absolue ? La convergence absolue n'est en réalité pas nécessaire dans le cas à densité pour que la notion d'espérance soit bien posée (mais écrite dans le programme).

Remarque 2.2 — L'espérance ne dépend pas du choix d'une densité Puisque deux densités coïncident sauf en un nombre fini de points, et que l'on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction en un nombre fini de points, on justifie sans peine que la définition ne dépend pas du choix d'une densité.

Proposition ALEA.14.6 | Cas d'une densité paire

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance de densité f paire, alors :

$$\mathbf{E}(X) = 0.$$

Preuve

Exemple 12 — Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire X, et que X admet une espérance qui vaut $\mathbf{E}(X) = \frac{3}{2}$.

Exemple 13 — ***Loi de Cauchy*** La fonction $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité d'une variable aléatoire X qui n'admet pas d'espérance.

Exemple 14 — Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire X, et calculer son espérance le cas échéant.

Exemple 15 — ***Loi de Laplace*** Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.
La variable aléatoire X est alors centrée.

Propriétés de l'espérance.

Théorème ALEA.14.6 |

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors :

1. **(Linéarité de l'espérance)** Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :
$$\mathbf{E}\left(\lambda X + \mu Y\right) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$
2. **(Positivité de l'espérance)** $X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0$, et :
$$X \geqslant 0, \quad \mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0 \text{ p.s} \quad \left(i.e.\ \mathbf{P}(X=0) = 1\right).$$
Le résultat subsiste si on a seulement $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$ en hypothèse, *i.e.*
$$\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0,$$
$$\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1, \quad \mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0 \text{ p.s} \quad \left(i.e.\ \mathbf{P}(X=0) = 1\right).$$
3. **(Croissance de l'espérance)**
$$X \leqslant Y \implies \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y).$$
Le résultat subsiste si on a seulement $\mathbf{P}(X \leqslant Y) = 1$ en hypothèse, *i.e.*
$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) = 1 \implies \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y).$$

Preuve

1. Nous admettons la linéarité de l'espérance.
2. Supposons que $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$. Alors $F_X(0) = 0 = \int_{-\infty}^{0} f_X$. Or, la fonction f_X est positive et continue sauf en un nombre fini de points, donc
$$f_X\big|_{\mathbf{R}^-} = 0 \quad \text{sauf en un nombre fini de points.}$$
Ainsi,
$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} t f_X(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_{0}^{\infty} \underbrace{t f_X(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
Nous admettons l'équivalence.
3. Appliquer **2** avec $X \leftarrow X - Y$ et utiliser la linéarité de l'espérance.

Formule de transfert pour une variable aléatoire à densité. Le théorème suivant permet de calculer l'espérance de $g(X)$ lorsque X est une variable à densité et g une fonction continue. Là encore, le point clef est que nous n'avons pas besoin de connaître la loi de $g(X)$ (ou une densité de $g(X)$) pour calculer son espérance !

Théorème ALEA.14.7 | Transfert pour les variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X telle que $X(\Omega) \subset I$ où I est un intervalle réel (éventuellement non borné), et $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ continue sauf éventuellement en un nombre fini de points de sorte que $g(X)$ est discrète ou à densité.

Alors :

$$\mathrm{Y} = g(\mathrm{X}) \quad \text{admet une espérance}$$
$$\iff \int_{\mathrm{I}} g(t) f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{est absolument convergente.}$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\mathbf{E}(g(\mathrm{X})) = \int_{\mathrm{I}} g(t) f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve *(Point clef — **Dans le cas étudié ci-dessous, la preuve est un changement de variable**)*
Montrons dans le cas où g est de classe $\mathscr{C}^1$ avec g' strictement positive sur $\mathrm{I} =]a, b[$, avec $a < b$ réels ou égaux à $-\infty$ ou $+\infty$. Par le théorème de la bijection, la réciproque g^{-1} existe bien.
D'après la formule de changement de variable du Chapter ANA.11, les intégrales $\displaystyle\int_a^b g(t) f_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{d}t$ et

$$\int_{g(a)}^{g(b)} u \times \frac{f_{\mathrm{X}}\left(g^{-1}(u)\right)}{g'\left(g^{-1}(u)\right)}\mathrm{d}u = \int_{g(a)}^{g(b)} u \times \left(\mathrm{F_X} \circ g^{-1}\right)'(u)\mathrm{d}u$$

sont de même nature en faisant formellement le changement de variable « $u = g(t) \iff g^{-1}(u) = t$ ». Or, toute densité de $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X})$ est nulle en dehors de $]g(a), g(b)[$ puisque $\mathrm{Y}(\Omega) \subset g(\mathrm{I}) \subset]g(a), g(b)[$ et sur cet intervalle,

$$\mathrm{F_Y}(y) = \mathrm{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant y) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \leqslant g^{-1}(y)\right) = \left(\mathrm{F_X} \circ g^{-1}\right)(y).$$

Donc, en cas de convergence,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} u \times \left(\mathrm{F_X} \circ g^{-1}\right)'(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} u \times \mathrm{F_Y}'(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{\mathrm{Y}}(u)\mathrm{d}u.$$

Finalement, on a montré que les intégrales $\displaystyle\int_a^b g(t) f_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u f_{\mathrm{Y}}(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence. Or, cette dernière intégrale converge absolument si et seulement si Y admet une espérance. Et en cas de convergence elles sont égales, le théorème de transfert est donc démontré dans ce cas.

Attention

La variable aléatoire $g(\mathrm{X})$ n'est pas forcément une variable à densité comme nous l'avons déjà vu. Mais on sait néanmoins dire si elle admet une espérance et la calculer le cas échéant.

Exemple 16 —

- Soit $b \in \mathbf{R}$, retrouver $\mathbf{E}(b)$ à l'aide du théorème du transfert. Comment pourrait-on aussi la calculer ?

- Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
  Montrer que $\sqrt{\mathrm{X}}$ admet une espérance, et la calculer.

- Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
  Montrer que X^2 admet une espérance, et la calculer.

- On reconsidère l'Exemple 13. Montrer que $\sin(X)$ admet une espérance, et la calculer.

Corollaire ALEA.14.4 | Inégalité triangulaire pour l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Alors :

$$X \text{ admet une espérance} \iff |X| \text{ admet une espérance.}$$

Et dans ce cas :

$$\left|\mathbf{E}(X)\right| \leqslant \mathbf{E}(|X|).$$

Preuve *(Point clef — **Théorème du transfert & Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées**)*

Corollaire ALEA.14.5 | Transfert pour les fonctions affines.

Soit X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbf{R}$. Alors :

1. X possède une espérance $\implies$ $aX + b$ possède une espérance.
2. Supposons que $a \neq 0$. Alors : $aX + b$ possède une espérance $\implies$ X possède une espérance.

De plus, si X et $aX + b$ possèdent une espérance, nous avons :

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

Preuve

1. Le résultat est évident pour $a = 0$: en effet, $0X + b = b$ dans ce cas et la variable aléatoire discrète b admet bien une espérance qui vaut $b = 0\mathrm{E}(X) + b$. Considérons le cas $a \neq 0$.

2.

Remarque 2.3 — Notons que, comme déjà constaté dans un exemple, $aX + b$ est une variable aléatoire réelle à densité à densité si $a \neq 0$. L'espérance précédente est donc donnée sous forme d'une intégrale dans ce cas, et si $a = 0$, nous obtenons l'espérance d'une constante qui est une variable aléatoire réelle discrète (donc définie au sens du Chapter ALEA.13).

Corollaire ALEA.14.6 | Centrage

Soit X une variable aléatoire à densité possédant une espérance, alors

$$X - \mathbf{E}(X) \quad \text{est une variable aléatoire centrée.}$$

Preuve Appliquer le résultat précédent avec $a = 1$ et $b = -\mathbf{E}(X)$. Alors $X - \mathbf{E}(X)$ possède donc une espérance, et

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0.$$

2.2. Moments d'ordre supérieur

À l'aide du théorème de transfert, nous pouvons donc affirmer les points suivants.

Définition/Proposition ALEA.14.3 | Variance, écart-type, moments, version continue

Soit X une variable aléatoire à densité f_X.

- **(Moments d'ordre k)** X admet un moment d'ordre $k \in \mathbf{N}$ si et seulement si l'équivalence suivante est réalisée :

$$\mathbf{E}\left(|X|^k\right) < \infty \iff \int_{-\infty}^{\infty} |t|^k f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

  On appelle alors *moment d'ordre k* : $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f_X(t)\,\mathrm{d}t.$
- **(Moment d'ordre 2 et variance)** On dit que X *admet un moment d'ordre deux* si et seulement si l'équivalence suivante est réalisée :

$$\mathbf{E}(|X|^2) < \infty \iff \int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

  On appelle alors *moment d'ordre 2* : $\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$. Si X admet un moment d'ordre deux, alors elle admet un moment d'ordre un (*i.e.* une espérance), et on appelle *variance de* X la quantité notée $\mathbf{Var}(X)$ et définie par : $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right)$. La variable aléatoire X possède une variance si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbf{E}(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

  Dans ce cas,

$$\mathbf{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbf{E}(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

  On appelle *écart-type de* X, la quantité notée σ_X, et définie par $\sigma_X := \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$. Une variable aléatoire de variance un est dite *réduite*.

Preuve Montrons que : si X admet un moment d'ordre deux, alors X admet un moment d'ordre un. Le reste provient de simples applications du théorème de transfert.

Remarque 2.4 —

1. On pourra retenir également que : si X n'a pas d'espérance, alors elle n'a pas de variance.
2. Le moment d'ordre 1 correspond donc à l'espérance.
3. La variance d'une variable aléatoire mesure l'écart quadratique moyen entre X et sa valeur moyenne $\mathbf{E}(X)$.

Méthode — Étudier l'existence d'une variance dans le cas à densité

On étudie l'existence d'un moment d'ordre deux, *i.e.* la convergence de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition ALEA.14.7 | Cas d'une variable aléatoire bornée

Soit X une variable aléatoire à densité f_X.
- Si X est bornée, alors X admet une variance, et donc une espérance.
- Le résultat est encore vrai si X est presque-sûrement bornée *i.e.* s'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$.

Preuve On montre que

$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et donc aussi absolument car l'intégrande est positive).

Enfin toutes les propriétés en vigueur dans le Chapter ALEA.12 restent donc valables dans le cas à densité.

Proposition ALEA.14.8 | Propriétés de la variance/covariance

Soient X, Y deux variables aléatoires à densité admettant une variance, et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
1. **(Variance nulle)** $\mathbf{Var}(X) = 0 \iff X = \mathbf{E}(X)$ p.s.
2. **(Variance d'une expression affine)** $\mathbf{Var}\left(\boxed{\lambda} X + \mu\right) = \boxed{\lambda^2}\,\mathbf{Var}(X)$.
3. **(Formule de König-Huygens)** $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$.

Preuve Identiques au cas discret.

Opération de centrage/réduction. La proposition ci-dessous paraît anecdotique mais elle sera d'un intérêt majeur plus tard dans l'année.

Définition/Proposition ALEA.14.4

Soit X une variable aléatoire à densité ayant une variance, alors

$$X^\star \underset{(\text{défi.})}{=} \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma_X}$$

est une variable aléatoire réelle centrée réduite. On l'appelle *la centrée/réduite de* X. Elle est de plus à densité.

Preuve
- par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^\star) = \frac{\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(\mathbf{E}(X))}{\sigma_X} = \frac{\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)}{\sigma_X} = 0.$$

- D'après l'expression de la variance d'une expression affine, on a :

$$\mathbf{Var}(X^\star) = \frac{\mathbf{Var}(X - \mathbf{E}(X))}{\sigma_X^2} = \frac{\mathbf{Var}(X)}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1.$$

Cas de variables aléatoires indépendantes. On présente sans démonstration le résultat suivant.

Proposition ALEA.14.9

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes. Alors :

1. **(Espérance d'un produit)** si les X_i admettent une espérance,

$$\mathbf{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbf{E}(X_1) \dots \mathbf{E}(X_n).$$

2. **(Variance d'une somme)** si les X_i admettent une variance, alors

$$\mathbf{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \dots + \mathbf{Var}(X_n).$$

Preuve Admis.[a]

3. LOIS USUELLES

Commençons par définir la loi uniforme sur des ensembles non discrets. Précisons un peu de vocabulaire pour certaines commandes `Python` :

- `cdf` signifie « cumulative density function », cet acronyme sera donc réservé aux fonctions de répartitions,
- `pdf` signifie « probability density function », cet acronyme sera donc réservé aux densités.

Pour la simulation, le principe est similaire au cas discret déjà vu : la plupart des scripts dépendront de la simulation d'un réel aléatoire entre 0 et 1. On rappelle un fait déjà constaté dans le Chapter ALEA.13 : toute loi de fonction de répartition bijective peut être simulée en cherchant F_X^{-1}, car $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X si $U \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1]$. Ce sera parfois le cas dans les lois usuelles qui vont suivre.

Comme pour les lois discrètes usuelles, on justifiera à chaque fois l'existence d'une telle variable aléatoire en montrant qu'une certaine fonction est une densité.

[a] Les vecteurs aléatoires à densité étant hors programme, nous n'aurons pas les outils pour prouver ces propriétés contrairement au cas discret.

3.1. Loi uniforme sur $[a, b]$

Définition ALEA.14.5 | Loi uniforme continue
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X *suit la loi uniforme sur* $[a,b]$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ si elle admet pour densité

$$f_{a,b} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 3.1 — Modélisation Toute expérience aléatoire dont les issues sont des réels d'un intervalle $[a,b]$ et apparaissant de manière équiprobable.

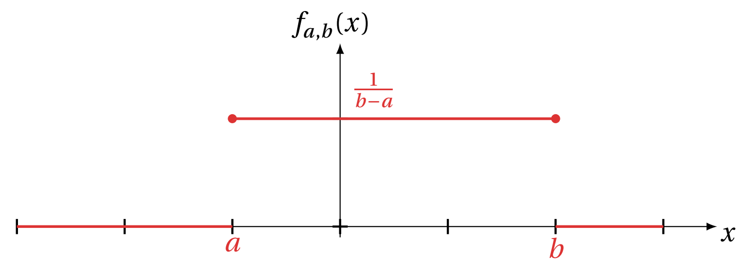


FIG. ALEA.14.2. : Graphe de la densité de l'uniforme

Remarque 3.2 — Valeurs prises En particulier,

$$\mathbf{P}(X \in [a,b]) = \mathbf{P}(X \in]a,b]) = \mathbf{P}(X \in [a,b[) = \mathbf{P}(X \in]a,b[) = 1.$$

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Exemple 17 — Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}[-1,3], Y \hookrightarrow \mathscr{U}[0,2]$. Donner l'expression de leur densité et les représenter graphiquement.

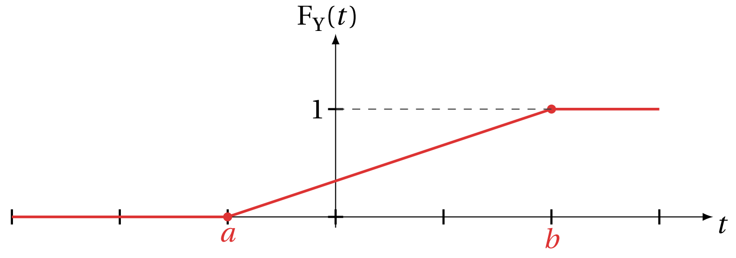


FIG. ALEA.14.3. : Graphe de la fonction de répartition de l'uniforme sur $[a, b]$

Proposition ALEA.14.10 | Espérance, variance, propriétés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X, Y deux variables aléatoires réelles.

1. Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1]$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}[a,b]$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} t < 0, \\ t & \text{si } t \in [0,1], \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \text{, et plus généralement : } F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} t < a, \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a,b], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. **(Stabilité)** $X \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1] \iff Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}[a,b]$.
3. **(Espérance / Variance)** Les variables aléatoires X et Y admettent une espérance et une variance, données par :

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Preuve

1. Il suffit de faire les calculs pour Y.

2. $\implies$

$\impliedby$

3. Faisons les calculs pour $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, on déduira alors ceux pour $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.

Exemple 18 — *Fonction de loi uniforme* Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$. Montrer que $Y = \tan X$ est à densité, en déterminer une.

SIMULATION. Nous avons déjà établi le lien entre l'uniforme $\mathscr{U}[0,1]$ et $\mathscr{U}[a,b]$ pour $a < b$. Il nous sert donc à simuler l'uniforme générale.

Simulation de la loi uniforme continue

```
import random as rd
def uniforme(a,b):
    """
    (a,b)->une simulation de l'uniforme sur [a,b]
    """
    return a + (b - a)*rd.random()
```

Le module `np.random` de ne sait pas simuler directement la loi uniforme continue. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous-bibliothèque `random` de `numpy`.

```
>>> np.random.uniform(-1, 2)
1.268833699024647
```

3.2. Loi exponentielle

Définition ALEA.14.6 | Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi exponentielle* $\mathscr{E}(\lambda)$ si elle admet pour densité

$$f_\lambda : x \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

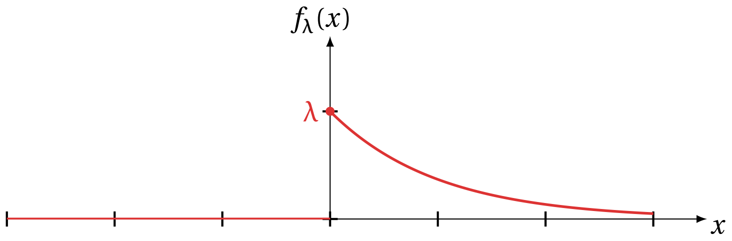


FIG. ALEA.14.4. : Graphe de la densité de l'exponentielle

Remarque 3.3 — Valeurs prises En particulier,

$$\mathbf{P}\left(X \in \mathbf{R}^+\right) = 1.$$

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Proposition ALEA.14.11 | Espérance, variance, propriétés

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle.

1. Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. **(Stabilité)** $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \iff \lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.
3. **(Espérance / Variance)** Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

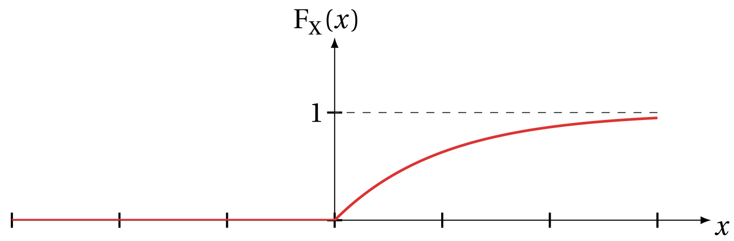


FIG. ALEA.14.5. : Graphe de la fonction de répartition de l'exponentielle

Preuve

1.

2. $\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

3. Faisons les calculs pour $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, on déduira alors ceux pour $Y = \lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

Exemple 19 — *Fonction de loi exponentielle* Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Montrer que $Y = \ln X$ est à densité, en déterminer une.

Exemple 20 — *Minimum de lois exponentielles* Soient $n \geqslant 1$ et $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On suppose de plus ces variables aléatoires indépendantes. Montrer que $Y = \min(X_1, \dots, X_n) \hookrightarrow \mathscr{E}(n\lambda)$.

PROPRIÉTÉ D'ABSENCE DE MÉMOIRE. Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène continu sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. Nous avons déjà croisé, pour rappel, une loi de probabilité sans mémoire discrète : la loi géométrique.

Proposition ALEA.14.12 | Absence de mémoire

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Alors X est sans mémoire.

Remarque 3.4 — Comme pour la loi géométrique, la réciproque est vraie aussi : la seule loi à densité qui est à absence de mémoire est la loi exponentielle.

Preuve

SIMULATION. Commençons par la propriété qui va nous permettre de simuler la loi exponentielle à partir de l'uniforme sur $[0,1]$.

Proposition ALEA.14.13 | Simulation de l'exponentielle

Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$. Alors :

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda).$$

Attention

La preuve qui suit est à maîtriser parfaitement, très classique dans la pratique.

Preuve *(Point clef — **Montrer que la fonction de répartition de $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ est celle d'une uniforme**)*

- La variable aléatoire X est bien définie.
-

Simulation de la loi exponentielle

```
import random as rd
from math import log
def expo(lamba):
    """
    lamba -> une simulation de l'exponentielle de paramètre lamba
    """
    return -(1/lamba)*log(rd.random())
```

Le module `random` ne sait pas simuler directement la loi exponentielle. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous bibliothèque `random` de `numpy`.

```
>>> np.random.exponential(1/3) # Attention au paramètre : c'est
↪ l'inverse du paramètre mathématique qu'il faut indiquer
0.6260016845989265
```

3.3. La loi normale

Cette loi de probabilité, aussi appelée loi de Gauß ou gaussienne, joue un rôle essentiel en probabilités et en statistiques. On verra dans le Chapter ALEA.16 son caractère universel dans les situations où l'on observe une somme de variables aléatoires indépendantes et centrées : par exemple, on peut envisager les fluctuations d'un cours de bourse comme le résultat d'une addition de phénomènes aléatoires indépendants et de faible ampleur relative.

3.3.1. Loi normale centrée réduite

Définition ALEA.14.7 | Loi normale centrée réduite

On dit qu'une variable aléatoire X *suit la loi normale centrée réduite* ou *gaussienne standard* si elle admet pour densité

$$\varphi : x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

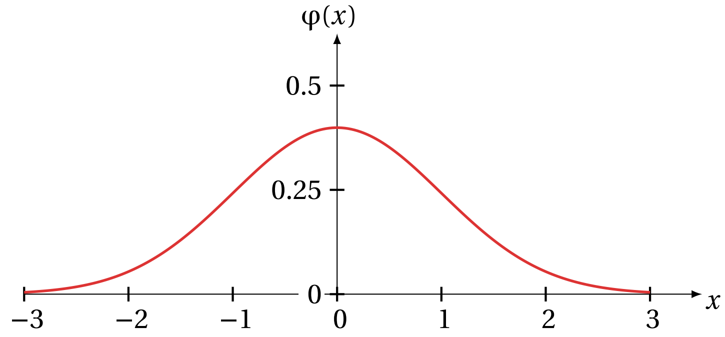


Fig. ALEA.14.6. : Graphe de la densité de la normale centrée réduite

On appelle aussi parfois ce graphe la « courbe en cloche ».

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Proposition ALEA.14.14 | Espérance, variance, propriétés

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Alors X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = 0, \quad \mathbf{Var}(X) = 1.$$

Preuve

Exemple 21 — *Fonction de loi normale* Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $Y = |X|$ est à densité, en déterminer une.

Notation — Fonction de répartition

On notera dans la suite Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Phi(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Notons qu'elle n'est pas calculable explicitement contrairement aux lois exponentielle et uniforme. En revanche, il est possible d'établir l'équivalent suivant.

Proposition ALEA.14.15 | Propriétés de Φ

1. **(Symétrie)** Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$
2. La fonction $\Phi : \mathbf{R} \longrightarrow]0,1[$ est bijective.

La première propriété peut être également comprise par un dessin.

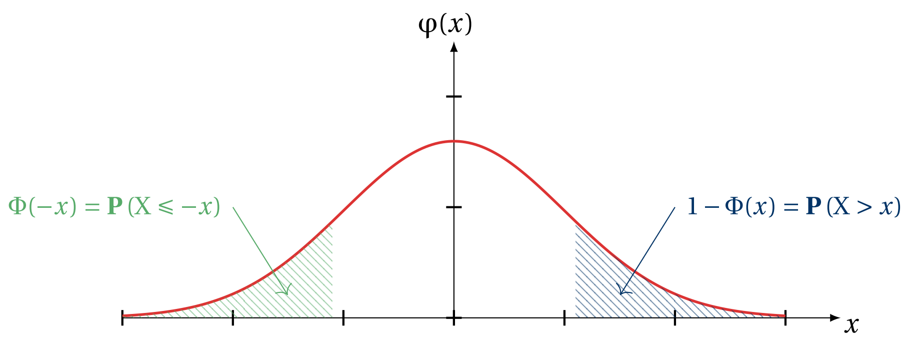


FIG. ALEA.14.7. : Illustration de la propriété de symétrie sur Φ

Preuve

1.

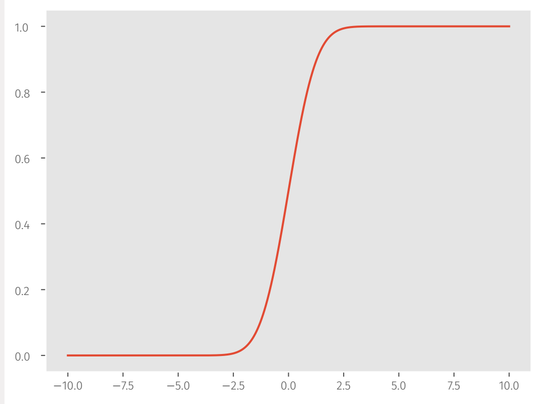
2.

On en dispose pas d'expression de Φ. On peut cependant utiliser Python pour esquisser son graphe.

Fonction de répartition de la normale centrée/réduite

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stat

abs = np.linspace(-10,10,10**3)
plt.plot(abs, stat.norm.cdf(abs))
plt.grid()
```



On connaît cependant des tables de valeurs de Φ (voir l'annexe en fin de chapitre).

SIMULATION. Puisque la fonction de répartition est bijective dans le cas de la loi normale, nous pouvons donc facilement déduire une méthode de simulation.

Proposition ALEA.14.16 | Simulation de la normale centrée réduite

Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Alors :

$$\Phi^{-1}(U) \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1).$$

Preuve

La fonction Φ^{-1} ne se calcule pas non plus facilement, on va utiliser le sous-module `scipy.stats` pour obtenir des valeurs approchées.

Simulation de la loi normale centrée réduite

```python
import random as rd
import numpy as np
# import scipy.stats as stat

def norm():
    """
    ->une simulation de la N(0,1)
    """
    return stat.norm.ppf(rd.random())
```

Le module `random` ne sait pas simuler directement la loi normale. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous-bibliothèque `random` de `numpy`.

```
>>> np.random.normal()
0.1485715589360008
```

3.3.2. Loi normale générale

Définition ALEA.14.8 | Loi normale

Soient $\mu \in \mathbf{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X *suit la loi normale (ou gaussienne)* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité

$$\varphi_{\mu,\sigma^2} : x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

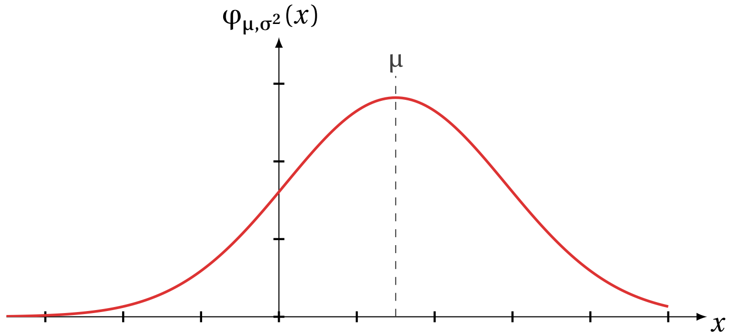


FIG. ALEA.14.8. : Graphe de la densité de la normale générale

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Proposition ALEA.14.17 | Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = \mu, \quad \mathbf{Var}(X) = \sigma^2.$$

Autrement dit,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \mathbf{Var}(X)).$$

Proposition ALEA.14.18 | Stabilité

- **(Lien avec la gaussienne standard : centrage / réduction)** Soient $\mu \in \mathbf{R}$ et $\sigma > 0$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

En d'autres termes, si une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ alors sa centrée réduite associée suit une loi normale centrée réduite, et inversement.

- **(Fonction affine d'une loi normale)** Plus généralement, soient $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Alors pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ de sorte que $a \neq 0$,

$$aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\mu + b, (a\sigma)^2\right).$$

En d'autres termes, toute variable aléatoire affine non constante d'une loi normale suit encore une loi normale, de paramètres son espérance et sa variance.

Preuve Commençons par prouver le second point.

On déduit alors facilement le premier.

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Preuve On peut maintenant démontrer la Proposition ALEA.14.17.

Proposition ALEA.14.19 | Somme de lois normales indépendantes

Soient $X_1,\dots,X_n$ une collection de n variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\quad X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2\right),\quad \mu_i \in \mathbf{R},\quad \sigma_i > 0.$$

- Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right), \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right).$$

- Et plus généralement : pour toute famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\sigma_i^2\right)$$
$$= \mathcal{N}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot X_i\right), \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot X_i\right)\right).$$

En résumé, toute combinaison linéaire de lois normales indépendantes est encore une loi normale. On obtient alors ses paramètres en calculant son espérance et sa variance.

Preuve Provisoirement admis.

Exemple 22 — Soient $n \geqslant 1$, $X_1, \dots, X_n$ une collection de n variables aléatoires indépendantes, telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{i^2}\right)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i$?

Densité, fonction de répartition, simulation. Techniques similaires à la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on ne les détaille donc pas comme précédemment.

- On peut rajouter des paramètres `loc`, et `scale` pour obtenir les graphes des fonctions de répartition et densité de la loi normale générale.
- Pour la simulation, on utilise celle de la $\mathcal{N}(0,1)$, puis on retourne $\mu + \sigma \mathcal{N}(0,1)$.
- Pour la simulation, on peut aussi utiliser les fonctions existantes de `scipy.stats` en précisant directement les bons paramètres.

3.4. Bilan des lois continues usuelles

Le tableau suivant rassemble quelques lois continues usuelles.

Nom	Paramètre(s)	Notation	Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$a < b$ deux réels	$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\lambda \in]0, +\infty[$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Laplace	$\lambda \in]0, \infty[$	$\mathcal{L}(\lambda)$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \lvert x \rvert}$	0	2
Normale (dans $\mathbf{R}$)	$(m, \sigma^2) \in \mathbf{R} \times]0, +\infty[$	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

ANNEXE – TABLE DE VALEURS DE LA $\mathcal{N}(0,1)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.090
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

Méthode Lecture d'une table

Si l'on souhaite avoir, par exemple, $\Phi(0,96)$, on :

1. se place sur la ligne « 0.9 »,
2. se place ensuite sur la colonne « 0.06 ».
3. On obtient alors la valeur désirée.

1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$\Phi(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \,dt \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

On retiendra en particulier la valeur typique $\Phi(1.96) = 0.975$, de sorte que :

$$\mathbf{P}(X \in [-1.96; 1.96]) = 2\Phi(1.96) - 1 = 0.95$$

⋆⋆⋆ **Fin du chapitre** ⋆⋆⋆

4. EXERCICES

4.1. Généralités

Exercice ALEA.14.1 | Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f continue et telle que $\mathbf{E}\left(X^2\right)$ existe.

1. Montrer que si $x > 0$, alors :

$$0 \leqslant x^2 \mathbf{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\, dt + \int_x^{\infty} t^2 f(t)\, dt.$$

En déduire que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left[x^2 \mathbf{P}(|X| \geqslant x\right] = 0$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}^+$. Montrer que :

$$\int_0^x t\mathbf{P}(|X| \geqslant t)\, dt = \frac{x^2}{2}\mathbf{P}(|X| \geqslant x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\, dt.$$

Indication : On pourra utiliser la fonction de répartition F de X et une intégration par parties.

Solution (exercice ALEA.14.1)

1. Soit $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x^2 \mathbf{P}(|X| \geqslant x) &= x^2 \mathbf{P}(X \leqslant -x) + x^2 \mathbf{P}(X \geqslant x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} x^2 f(t)\, dt + \int_x^{\infty} x^2 f(t)\, dt \\ &\leqslant \boxed{\int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\, dt + \int_x^{\infty} t^2 f(t)\, dt.} \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{E}\left(X^2\right)$ existe, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt$$

converge, donc

$$\int_x^{\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} t^2 f(t)\, dt \xrightarrow{x \longrightarrow \infty} 0$$

par définition de l'intégrale. On montre de-même que

$$\int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\, dt \xrightarrow{x \longrightarrow \infty} 0,$$

puis par théorème d'encadrement que :

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow \infty} \left[x^2 \mathbf{P}(|X| \geqslant x\right] = 0.}$$

2. Soit $x \in \mathbf{R}^+$. Puisque $|X|$ est à densité, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(|X| \geqslant t) = 1 - \mathbf{P}(|X| \leqslant t) = 1 - (F(t) - F(-t)).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^x t\mathbf{P}(|X| \geqslant t)\, dt &= \int_0^x t(1 - (F(t) - F(-t)))\, dt \\ &= -\int_0^x \frac{t^2}{2}(-f(t) + f(-t))\, dt + \left[(1 - (F(t) - F(-t)))\frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^x t^2 f(-t)\, dt + \left[\mathbf{P}(|X| \geqslant t)\frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2}\mathbf{P}(|X| \geqslant x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\, dt,} \end{aligned}$$

$t \longmapsto \frac{t^2}{2}$, $t \longmapsto 1 - (F(t) - F(-t))$ sont $\mathscr{C}^1$ car f est continue

où à la dernière étape nous avons réalisé le changement de variable $u = -t$ dans la dernière intégrale, de classe $\mathscr{C}^1$, puis utilisé la relation de Chasles.

Exercice ALEA.14.2 | **Formule des cumulants, cas continu** Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité positive f. On notera F sa fonction de répartition.

On souhaite montrer que X admet une espérance si et seulement si $\int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > t)\,dt$ converge, et qu'en cas de convergence :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > t)\,dt.$$

1. En admettant provisoirement le résultat de l'exercice, montrer que si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $Z = \min(X, Y)$ admet une espérance et la calculer.
2. On souhaite maintenant démontrer la proposition dans le cas où f est continue, pour simplifier.
   2.1) Soit $A > 0$. Montrer la formule suivante :
   $$\int_0^A t f(t)\,dt = \int_0^A \mathbf{P}(X > t)\,dt + A(F(A) - 1).$$
   2.2) Conclure.

Solution (exercice ALEA.14.2)

1. On a $Z = \min(X, Y)$. Puisque $X, Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on a pour tout $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z > t) &= \mathbf{P}(X > t, Y > t) \\ &= \mathbf{P}(X > t)\,\mathbf{P}(Y > t) \quad \textit{indépendance} \\ &= \left(e^{-\lambda t}\right)^2 \\ &= e^{-2\lambda t}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbf{P}(Z > t) = 1$ si $t < 0$. Donc :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc F_Z est bien continue, puisque $1 - e^{-2\lambda t} \xrightarrow{t \to 0} 0$, et elle est $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0. Donc Z est à densité, et une densité est donnée par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_Z(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Autrement dit : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{E}(2\lambda).}$ Elle possède donc une espérance, et elle vaut $\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{2\lambda}}$.

2. **2.1)** Soit $A > 0$. Puisque $G : x \longmapsto F(x) - 1$ est une primitive de f, et que f est continue, G est de classe $\mathscr{C}^1$. Par ailleurs, $x \longmapsto x$ est également de classe $\mathscr{C}^1$. Donc par intégration par parties :

$$\int_0^A t f(t)\,dt = -\int_0^A (F(t) - 1)\,dt + A(F(A) - 1) - 0(F(0) - 1).$$

Ainsi, puisque $F(t) - 1 = -(1 - F(t)) = -\mathbf{P}(X > t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, on déduit que :

$$\boxed{\int_0^A t f(t)\,dt = \int_0^A \mathbf{P}(X > t)\,dt + A(F(A) - 1)}.$$

2.2) Procédons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > t)\,dt$ converge. Alors l'intégrale de droite converge vers une limite finie ou de manière équivalente (on intègre des fonctions positives) il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que

$$\forall A \in \mathbf{R}^+, \quad \int_0^A \mathbf{P}(X > t)\,dt \leqslant M.$$

Et puisque $A(F(A) - 1) \leqslant 0$ pour tout $A \in \mathbf{R}^+$, on déduit

$$0 \leqslant \int_0^A t f(t)\,dt \leqslant \int_0^A \mathbf{P}(X > t)\,dt \leqslant M.$$

Ainsi, la fonction $A \longmapsto \int_0^A t f(t)\,dt$ est majorée, croissante car l'intégrande est positive, donc converge. Ainsi, X possède une espérance.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, supposons que X possède une espérance. Alors

$$0 \leqslant A(1 - F(A)) = A\int_A^{\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_A^{\infty} t f(t)\,dt \xrightarrow{A \to \infty} 0$$

car il s'agit du reste d'une intégrale convergente. Donc par théorème d'encadrement, on déduit que si X admet une espérance, alors

$$A(1 - F(A)) \xrightarrow{A \to \infty} 0,$$

et donc $A(F(A)-1) \xrightarrow{A\to\infty} 0$. D'après la question précédente, vient alors : $\boxed{\int_0^{\infty} \mathbf{P}(X>t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

4.2. Études de lois

Exercice ALEA.14.3 | Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1, \\ \frac{b}{2^t} & \text{si } t \geqslant 1, \end{cases} \quad b \in \mathbf{R}.$$

1. Déterminer b pour que g soit la densité d'une variable aléatoire à densité. Déterminer la loi de $X-1$.
2. En déduire que X possède une espérance et une variance.

Exercice ALEA.14.4 | **Loi de Cauchy** Soit $\Psi : x \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Montrer que Ψ est une densité de probabilité. Dans la suite on considère X de densité Ψ. On dit que X suit une loi de Cauchy.
2. Déterminer la fonction de répartition F associée à X.
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Une variance ?
4. **(Simulation)** Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $]0,1[$.
   - **4.1)** Après avoir déterminé F^{-1}, montrer que X et $F^{-1}(U)$ ont même loi, *i.e.* même fonction de répartition.
   - **4.2)** En déduire une méthode de simulation de la variable aléatoire X.

Exercice ALEA.14.5 |

1. **(Existence de** arccos**)**
   - **1.1)** Justifier que $\cos|_{[0,\pi]}$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$. On notera arccos la fonction réciproque de cette bijection.
   - **1.2)** Justifier que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $\arccos'$ sur cet intervalle. Quelle est sa monotonie ?
2. Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.
   - **2.1)** Déterminer la loi de $Y=\cos(\pi X)$.
   - **2.2)** Écrire une fonction `simulY()` qui simule la variable Y.
   - **2.3)** Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de Y.

Solution (exercice ALEA.14.5)

1.
2. **2.1)** Déterminons la loi de $Y=\cos(\pi X)$, c'est-à-dire une densité dans ce contexte. Constatons que $\mathbf{P}(Y\in[-1,1])=1$. Soit $t\in\mathbf{R}$, alors puisque arccos est décroissante et que $\arccos(\cos(\pi x))=\pi x$ pour tout $x\in[0,1]$,

$$\mathbf{P}(\cos(\pi X)\leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant -1 \\ \mathbf{P}(\cos(\pi X)\leqslant t)=\mathbf{P}(\pi X \geqslant \arccos t) & \text{si } t\in\,]0,1[\\ 1 & \text{si } t\geqslant 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant -1 \\ \mathbf{P}\left(X\geqslant \frac{\arccos t}{\pi}\right) & \text{si } t\in\,]0,1[\\ 1 & \text{si } t\geqslant 1. \end{cases}$$

Lorsque $t\in\,]0,1[$, puisque $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, nous avons $\mathbf{P}(\cos(\pi X)\leqslant t) = 1-\frac{\arccos t}{\pi}$. On déduit alors la fonction de répartition de Y :

$$\forall t\in\mathbf{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant -1 \\ 1-\frac{\arccos t}{\pi} & \text{si } t\in\,]-1,1[\\ 1 & \text{si } t\geqslant 1. \end{cases}$$

Puisque $1-\frac{\arccos t}{\pi} \xrightarrow{t\to -1} 1-\frac{\pi}{\pi}=0$, et $1-\frac{\arccos t}{\pi} \xrightarrow{t\to 1} 1-\frac{0}{\pi}=1$, la fonction F_Y est continue. De plus, elle est d'après la première question $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en $-1, 1$. Donc Y est à densité et une densité est donnée par :

$$\boxed{t \longmapsto f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} & \text{si } t \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

2.2) Écrivons une fonction `simulY()` qui simule la variable Y.

```
from math import pi,cos
import random as rd
def simuY():
    return cos(pi*rd.random())
```

2.3) On applique le théorème du transfert, puisque $\mathbf{P}(Y \in [-1,1]) = 1$ et elle admet donc une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 x\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathbf{Var}(X) = \int_0^1 x^2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x - \mathbf{E}(X)^2$$

Les deux intégrales se calculant ensuite par intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \int_0^1 x\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x + \left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 \qquad x \longmapsto x, x \longmapsto \tfrac{1}{\pi}\sin(\pi x) \text{ sont } \mathscr{C}^1 \\ &= \frac{1}{\pi^2}[\cos(\pi x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi^2}(-1-1) = \boxed{\frac{-2}{\pi^2}.} \end{aligned}$$

On procède de-même pour la variance.

Exercice ALEA.14.6 | **Moments d'ordre n de lois usuelles.** Après en avoir justifié l'existence, calculer $\mathbf{E}(X^n)$ dans les cas suivants :

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}[a,b]$,
2. $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$,
3. $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

4.3. Fonctions de variables aléatoires

Exercice ALEA.14.7 | **Carré lois classiques** Déterminer la densité de $Y = X^2$ dans les cas suivants :

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,1])$,
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,2])$.
3. $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

Exercice ALEA.14.8 | **Loi log-normale** Soit $a > 0$ et h la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que h est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité h. Montrer que X admet une espérance, calculer $\mathbf{E}(X)$.
3. Déterminer la loi de $Y = \frac{\ln X}{a}$.

4.4. Discret vS. Continu

Exercice ALEA.14.9 | Soit $\lambda \in [0,1]$, et f_λ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x \in]-1,0], \\ 1-\lambda & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f_λ est une densité de probabilité. Soit X admettant f_λ pour densité.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance. Les calculer.
3. Soient $\alpha > 0$ et $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha)$. Soit de plus Y une variable aléatoire telle que, pour tout $k \geqslant 0$, la loi conditionnelle sachant $\{N = k\}$ de Y soit à densité de densité $f_{\frac{1}{k+1}}$, *i.e.* pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}\big(Y \in I | N = k\big) = \int_I f_{\frac{1}{k+1}}.$$

3.1) Déterminer la fonction de répartition de Y.
3.2) En déduire que Y est à densité et donner une densité.
3.3) Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que $\mathbf{E}(Y) = 0$.
3.4) Écrire une fonction Python qui donne une valeur approchée de α à eps près, le faire tourner et donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution (exercice ALEA.14.9)

1. La fonction f_λ est continue sauf éventuellement en $-1, 0, 1$, positive car $\lambda \in [0,1]$, et son intégrale converge car f_λ est nulle en dehors de $]0,1]$. De plus,

$$\int_{-1}^{1} f_\lambda = \int_{-1}^{0} \lambda \,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-\lambda)\,\mathrm{d}x = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi $\boxed{f_\lambda \text{ est une densité de probabilités.}}$

2. Puisque $\mathbf{P}(X \in]-1,1]) = 1$, elle possède une espérance et une variance. Et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_{-1}^{1} x f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + (1-\lambda)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}(1-\lambda) = \boxed{\frac{1}{2} - \lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(X^2\big) &= \int_{-1}^{1} x^2 f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + (1-\lambda)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{\lambda}{3} + (1-\lambda)\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Var}(X) = \boxed{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2}.$$

3. **3.1)** Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, commençons par calculer

$$\mathbf{P}\big(Y \leqslant t | N = k\big) = \int_{-\infty}^{t} f_{\frac{1}{k+1}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En faisant un dessin, on se convainc des sous-cas à considérer.

- Si $t \leqslant -1$, alors $\mathbf{P}\big(Y \leqslant t | N = k\big) = 0$.
- Si $t \in]-1,0]$, alors

$$\mathbf{P}\big(Y \leqslant t | N = k\big) = \int_{-1}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{k+1} = \frac{t+1}{k+1}.$$

- Si $t \in]0,1]$, alors

$$\mathbf{P}\big(Y \leqslant t | N = k\big) = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{k+1} + \int_0^t \frac{k}{k+1}\,\mathrm{d}x = \frac{tk+1}{k+1}.$$

- Si $t > 1$, alors $\mathbf{P}\big(Y \leqslant t | N = k\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\frac{1}{k+1}} = 1$.

En résumé,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant t | N = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -1, \\ \frac{t+1}{k+1} & \text{si } t \in]-1, 0], \\ \frac{tk+1}{k+1} & \text{si } t \in]0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Donc d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{N = k\}_{k \in \mathbf{N}}$: En résumé,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} 0 \mathbf{P}(N = k) = 0 & \text{si } t \leqslant -1, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t+1}{k+1} \mathbf{P}(N = k) & \text{si } t \in]-1, 0], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{tk+1}{k+1} \mathbf{P}(N = k) & \text{si } t \in]0, 1], \\ \sum_{k=0}^{\infty} 1 \mathbf{P}(N = k) = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il ne reste donc plus que deux cas.

- Si $t \in]-1, 0]$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t+1}{k+1} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha}(t+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(k+1)!} \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}(t+1) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\alpha^\ell}{\ell!} \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}(e^\alpha - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}(t+1). \end{aligned}$$

- Si $t \in]0, 1]$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{tk+1}{k+1} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(t + \frac{1-t}{k+1}\right) \frac{\alpha^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha} \left(t e^\alpha + (1-t) \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}\right) \\ &= e^{-\alpha} \left(t e^\alpha + (1-t) \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - 1)\right) \\ &= t + (1-t) \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha}\right). \end{aligned}$$

$\frac{tk+1}{k+1} = \frac{t(k+1)+(1-t)}{k+1} = t + \frac{1-t}{k+1}$

On a donc enfin obtenu la fonction de répartition cherchée :

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -1, \\ \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}(t+1) & \text{si } t \in]-1, 0], \\ t + (1-t)\frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha}\right) & \text{si } t \in]0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3.2) On vérifie ensuite que F_Y est bien continue, et elle est $\mathscr{C}^1$ en tant que somme composée de telles fonctions, sauf éventuellement en $-1, 0, 1$. Donc Y est à densité et une densité est donnée par :

$$\boxed{f_Y : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} & \text{si } t \in]-1, 0], \\ 1 - \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} & \text{si } t \in]0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}.$$

On observe que $\boxed{\text{Y a pour densité } f_\lambda \text{ avec } \lambda = \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}}$.

3.3) D'après la première question, on déduit que :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}}.$$

Ainsi Y est centrée si et seulement si

$$\alpha - 2 + 2e^{-\alpha} = 0.$$

Notons $f : x \longmapsto x - 2 + 2e^{-x}$. Elle est dérivable et $f'(x) = 1 - 2e^{-x} = 0$ si et seulement si $x = \ln 2$. En résolvant les inéquations associées, on trouve que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \ln(2)$ donc f est croissante strictement sur $[\ln 2, \infty[$ et décroissante strictement sur $]0, \ln 2[$. Mais comme $f(0) = 0$, f ne peut s'annuler sur $]0, \ln 2[$, $f(\ln 2) = \ln(2) - 2 + 1 = \ln(2) - 1 < 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ par règles usuelles sur les limites et f est continue strictement croissante sur $[\ln 2, \infty[$ donc réalise une bijection vers $[\ln 2 - 1, \infty[\ni 0$. $\boxed{\text{Il existe donc un unique } \alpha > 0 \text{ qui centre Y.}}$

3.4) >_

```python
import math as ma
def f(x):
    return x - 2 + 2*ma.exp(-x)

def dicho(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et
    ↪ b avec précision prec
    Retourne faux si aucune racine n'existe
    """
    while b - a > prec:
        c = (a + b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            # changement de signe sur [a,c]
            b = c
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,c]
            a = c
    return (a + b)/2
```

Pour savoir comment initialiser la borne de droite, on peut calculer plusieurs valeurs de f sur $[\ln 2, \infty[$ et prendre la première qui dépasse 0.

```python
>>> dicho(ma.log(2), 2, f, 10**(-3))
1.593841884973831
```

Exercice ALEA.14.10 | Discret / Continu.

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$.
2. Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ telle que X et Z sont indépendantes — on ne demande pas dans la suite de justifier qu'un tel Z existe.
   Montrer que $T = \frac{X}{Z+1}$ est une variable aléatoire à densité que l'on déterminera.

Exercice ALEA.14.11 | Loi normale alternée Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et ε une variable aléatoire discrète indépendante de X telle que $\varepsilon(\Omega) = \{\pm 1\}$ avec

$$\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(\varepsilon = -1).$$

1. Déterminer la loi de $Y = \varepsilon X$.
2. On pose $Z = Y - 2X$. Justifier que Z admet une espérance et une variance. Les déterminer.

Solution (exercice ALEA.14.11)

1. Tout d'abord, $\mathbf{P}(Y \in \mathbf{R}) = 1$ et *a priori* on ne peut pas réduire l'ensemble des valeurs prises. Pour calculer la fonction de répartition, appliquons la formule des probabilités totales à $\{\varepsilon = \pm 1\}$ qui est un système complet d'évènements. Soit $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y \leqslant t) &= \mathbf{P}(1.X \leqslant t | \varepsilon = 1)\,\mathbf{P}(\varepsilon = 1) + \mathbf{P}(-1.X \leqslant t | \varepsilon = -1)\,\mathbf{P}(\varepsilon = -1) \\ &= \Phi(t)\frac{1}{2} + (1 - \Phi(-t))\frac{1}{2} \quad \textit{d'après le cours } \Phi(-t) = 1 - \Phi(t) \\ &= \Phi(t).\end{aligned}$$

Donc Y a même loi que X, *i.e.* $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$

2. La variable aléatoire $Z = Y - 2X$ admet une espérance car Y et X en admette une, et

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y) - 2\mathbf{E}(X) = \boxed{0}.$$

Pour la variance, puisque Y, X ne sont clairement pas indépendantes, écrivons plutôt :

$$Z = (\varepsilon - 2)X \quad \Longrightarrow \quad Z^2 = (\varepsilon - 2)^2 X^2.$$

Ainsi, par indépendance, on déduit

$$\mathbf{E}\left(Z^2\right) = \mathbf{E}\left((\varepsilon-2)^2\right)\mathbf{E}\left(X^2\right),$$

mais $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc $\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = 1$. Alors que

$$\mathbf{E}\left((\varepsilon-2)^2\right) = \mathbf{Var}(\varepsilon - 2) + \mathbf{E}(\varepsilon-2)^2 = \mathbf{Var}(\varepsilon) + (-2)^2 = \frac{2\times 4}{12} = \frac{2}{3}.$$

Donc $\boxed{\text{Z admet une variance}}$, et

$$\mathbf{Var}(Z) = \frac{2}{3} - 0^2 = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

4.5. Autour des min et max

Exercice ALEA.14.12 | Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires i.i.d. de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Montrer que Y est à densité, et en déterminer une. Reconnaît-on une loi classique?
2. Deux guichets sont ouverts dans une banque, le temps de service au premier guichet (*resp.* au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min. (*resp.* 30 min.). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1, et l'autre le 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier?
3. Même question mais avec le dernier.

Exercice ALEA.14.13 | **Loi de Gumbel. Max de lois exponentielles.** Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = e^{-e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. On dira que X suit une loi de Gumbel.
2. Déterminer une densité f de X.
3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
   3.1) Étudier pour $x \in \mathbf{R}$,
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbf{P}(M_n - \ln(n) \leq x).$$
   3.2) En déduire une fonction Python permettant de renvoyer une simulation de X. *On pourra se servir ici de la commande* `np.random.exponential(1)` *qui permet de simuler une exponentielle de paramètre* 1.

Solution (exercice ALEA.14.13)

1. Il y a deux choses à montrer ici : l'existence de la variable aléatoire, puis le caractère à densité. Pour l'existence, constatons que F est continue (donc continue à droite), $\lim_{x\longrightarrow\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} F(x) = 0$ puisque $e^{-x} \xrightarrow[]{x\longrightarrow\infty} 0$, $e^{-x} \xrightarrow[]{x\longrightarrow-\infty} \infty$. Enfin, elle est croissante puisque $x \longmapsto -e^{-x}$ l'est et que l'exponentielle aussi. Donc il existe X et $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, $x : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ de sorte que $F_X = F$. Enfin, X est à densité puisque F est continue comme déjà dit, et F est $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\text{X est donc à densité.}}$
2. Et une densité est donnée par la dérivée de la fonction F :
   $$\boxed{f_X : x \longmapsto e^{-x}e^{-e^{-x}} = e^{-x-e^{-x}}}.$$

3. 3.1) On calcule la probabilité demandée.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M_n - \ln(n) \leqslant x) &= \mathbf{P}(M_n \leqslant x + \ln n)\\ &= \mathbf{P}(X_1 \leqslant x + \ln n) \cdots \cdot \mathbf{P}(X_n \leqslant x + \ln n) \quad \text{indépendance}\\ &= \left(1 - e^{-x-\ln n}\right)^n \quad x + \ln n \geqslant 0 \text{ au moins pour } n \text{ assez grand}\\ &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de trouver la limite de cette suite réelle. On commence déjà par passer à la forme exponentielle.

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{=} \exp\left(n\left(-\frac{e^{-x}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} e^{-e^{-x}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(M_n - \ln(n) \leqslant x) \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} F(x)}.$$

3.2) Ainsi, pour simuler X, on peut simuler le maximum précédent et lui retrancher $\ln(n)$.

```python
import numpy as np

def simu_gumbel():
    n = 10**3
    Y = [np.random.exponential(1) for _ in range(n)]
    # Recherche du max
    maxi = Y[0]
    for i in range(1, n):
        if Y[i] > maxi:
            maxi = Y[i]
    return maxi - np.log(n)
```

Voici une simulation.

```
>>> simu_gumbel()
-0.1078457084394433
```

Exercice ALEA.14.14 | Max d'un nombre aléatoire de variables Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $n \in \mathbf{N}^\star$, $p \in]0,1[$. Soient $X_0, X_1, \dots, X_n$ une collection de $n+1$ variables aléatoires de loi $\mathscr{U}([0,1])$. On suppose que $X_0, X_1, \dots, X_n, N$ sont mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer la fonction de répartition de $T_k = \min(X_0, X_1, \dots, X_k)$.
2. On pose $T = \min(X_0, X_1, \dots, X_N)$.
   - **2.1)** Montrer que T est bien une variable aléatoire sur le même espace probabilisé sur lequel sont définies $X_0, X_1, \dots, X_n, N$.
   - **2.2)** Montrer que T est une variable à densité et déterminer une densité de T.

Exercice ALEA.14.15 | Max de lois normales On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ). On pose

$$Z = \max(X, Y)$$

et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité. On exprimera sa densité f en fonction de φ et Φ.
2. En remarquant que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer que Z a une espérance et donner sa valeur. *Indication : On pourra effectuer une intégration par parties.*

Solution (exercice ALEA.14.15)

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \leqslant x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) \\ &= \Phi(x)^2.\end{aligned}$$ *indépendance*

Donc par composition, Φ^2 est $\mathscr{C}^0, \mathscr{C}^1$ donc Z est à densité et une densité est donnée par :

$$\boxed{f : x \in \mathbf{R} \longmapsto 2\Phi(x)\varphi(x)}.$$

2. ▸ Soit $x \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \boxed{-x\varphi(x).}\end{aligned}$$

▸ La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \left(2\Phi(x)\varphi(x)\right) \mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

Commençons par étudier l'intégrale sur $\mathbf{R}^+$, en effectuant une intégration par parties. Soit $A > 0$, alors puisque $-\varphi, \Phi$ sont $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned}2\int_0^A \Phi(x)\left(x\varphi(x)\right)\mathrm{d}x &= \int_0^A \left(2\varphi(x)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x + 2\left[-\varphi(x)\Phi(x)\right]_0^A \\ &= 2\int_0^A \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x + 2A\varphi(A)\Phi(A) \quad (\star)\end{aligned}$$

Or $\varphi^2(x) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Par changement de variable $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$ (licite car $\mathscr{C}^1$ strictement croissant), $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ a même nature que

$$\sqrt{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Donc en en faisant $A \longrightarrow \infty$ dans $(\star)$ (la limite du deuxième terme venant des croissances comparées), puisque Φ est une fonction bornée, on obtient alors :

$$2\int_0^{\infty} \Phi(x)\left(x\varphi(x)\right)\mathrm{d}x = 2\frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi} + 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

De manière analogue : soit $B < 0$, alors

$$\begin{aligned}2\int_B^0 \Phi(x)\left(x\varphi(x)\right)\mathrm{d}x &= \int_B^0 \left(2\varphi(x)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x + 2\left[-\varphi(x)\Phi(x)\right]_B^0 \\ &= 2\int_B^0 \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x + 2B\varphi(B)\Phi(B) \\ &\xrightarrow{B \longrightarrow -\infty} 2\int_{-\infty}^0 \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Z admet une espérance}}$, et

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}}.$$