Chapitre ALEA.12.

Dénombrement, Espaces probabilisés, Variables aléatoires

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de lever certaines restrictions du programme de première année, à savoir la finitude des univers d'expériences aléatoires. En effet, il vous était impossible en première année de traduire l'expérience du lancer infini de pièce à l'aide d'un espace probabilisé.
Nous allons donc maintenant définir un cadre général pour les expériences aléatoires, tel que décrit par Andreï Nikolaievitch Kolmogorov (largement adopté par la communauté mathématique à partir de 1950) :

- un univers Ω contenant les données brutes d'une expérience aléatoire,
- une tribu $\mathscr{T}$ qui contient des parties de Ω dont on calculera la probabilité et qui sont les évènements liés à Ω,
- et enfin une probabilité $\mathbf{P}$ définie sur $\mathscr{T}$, qui doit donner une indication sur la vraisemblance d'un évènement.

Afin de disposer de tous les outils permettant de réaliser des calculs probabilistes, nous commençons par une section de révision de dénombrement.

Un être humain possède environ 150 000 cheveux (en tout cas, moins d'un million). Comme la ville de Paris compte 2,141 millions d'habitants, d'après le principe des tiroirs de Dirichlet*, il existe au moins deux personnes à Paris qui ont exactement le même nombre de cheveux.*

— Le saviez-vous ?

On estime à environ 10^{120} le nombre de parties différentes possibles au jeu d'échecs. Ce nombre s'appelle le nombre de Shannon.

— Le saviez-vous ?

Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.

— Emile Borel

Définition ALEA.12.1

On appelle *expérience aléatoire* une expérience renouvelable, et qui, renouvelée dans des conditions identiques – pour autant que l'observateur puisse s'en assurer – ne donne pas forcément le même résultat à chaque renouvellement. L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé *univers*, on le notera en général Ω dans la suite.

Probabilités ou Statistiques ? C'est le premier chapitre de Probabilités & Statistiques de l'année, précisions brièvement de quoi on parle au travers d'un exemple.

Un joueur parie sur le résultat du lancé d'un dé à 6 faces. S'il annonce le bon résultat, il gagne la valeur de la face en euros, s'il perd il ne gagne rien du tout.

- Les *probabilités* permettent de répondre à la question suivante : quelle stratégie le joueur doit-il adopter pour maximiser ses gains ? Il s'agit de faire la remarque suivante : quelle que soit la face qu'il annonce, il a toujours une chance sur six de gagner. Par contre, les gains en cas de bonne réponse dépendent de la face : s'il annonce 1 il a une chance sur six de gagner 1 euros, s'il annonce 2 il a une chance sur six de gagner 2 euros *etc.*...On devine ainsi que le joueur a tout intérêt à parier sur le 6 : il gagnera aussi souvent qu'avec une autre face mais gagnera plus. Mathématiquement cela s'écrit en terme de gain moyen, c'est-à-dire les chances de gagner multipliées par le gain, cela représente ce que le joueur gagne en moyenne par partie. On voit alors que le gain moyen en pariant sur le 6 est de $\frac{1}{6} \times 6 = 1$ euro tandis que les gains moyens sur les autres faces sont plus faibles : on vient de prouver que jouer le 6 est la meilleure stratégie. Le joueur vient de faire des probabilités.
- En revanche, tout le raisonnement précédent est basé sur le caractère non pipé du dé. Les *statistiques* permettent de répondre à la question suivante : en se basant sur un grand nombre d'observations, peut-on en conclure, avec forte probabilité, que le dé est non pipé ? Pour le vérifier, le joueur peut lance avant de commencer à parier 100 fois le dé et remarque que le 6 ne sort pas une seule fois et que le 4 sort une fois sur deux... il se dit donc naturellement que le dé n'est pas équilibré et que le 4 a une chance sur deux de sortir. Le joueur vient de faire des statistiques, et cela change donc la stratégie à adopter.

Avant de formaliser les expériences aléatoires à l'aide d'espaces probabilisés, nous allons avoir besoin de revoir des éléments de dénombrement.

1. Dénombrement

Il est indispensable, avant d'entamer la lecture de cette partie, de revoir votre chapitre de théorie des ensembles de première année (ensemble, application, réunion, intersection, propriétés, *etc.*...).

Rappels sur la notation indicatrice.

Notation Fonction indicatrice d'un ensemble.

Dans tout ce chapitre, nous nous servirons de la notation $\mathbb{1}_A$ où A est sous-ensemble d'un ensemble E. Il s'agit de l'application

$$\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

On rappelle également une propriété importante :

Proposition ALEA.12.1 | Indicatrice d'une réunion et d'une intersection

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors :

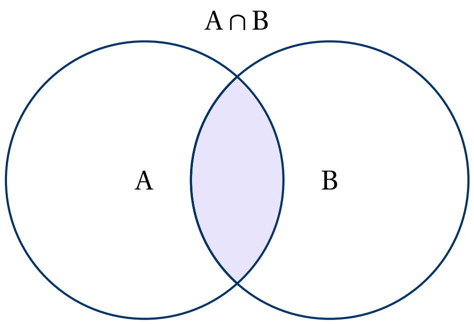
1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$,
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

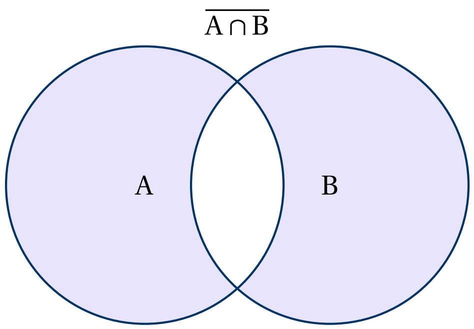
Preuve

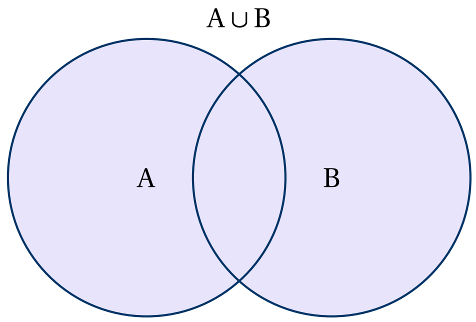
1. 🖋

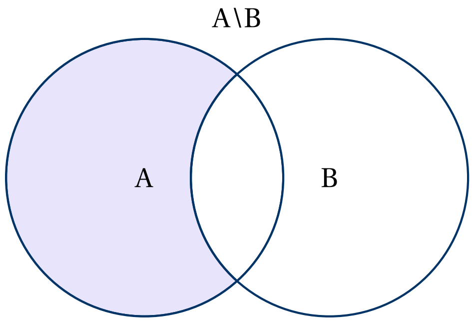
2. Soit $x \in E$, alors on montre que $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ en distinguant les cas $x \in A\backslash B$, $x \in B\backslash A$ puis $x \in A \cap B$.

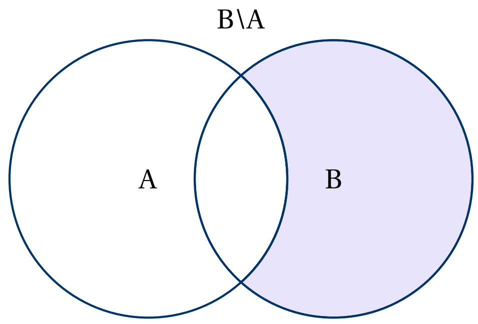
Rappels sur la théorie des ensembles Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On rappelle les différentes opérations ensemblistes définies en première année au travers des diagrammes ci-dessous.











Ainsi, pour $x \in E$,

- $x \in A \cap B$ si : $x \in A$ **et** $x \in B$,
- $x \notin A \cap B$ si : $x \in A\backslash B$ **ou** $x \in B\backslash A$,
- $x \in A \cup B$ si : $x \in A$ **ou** $x \in B$,
- $x \in A\backslash B$ si : $x \in A$ **et** $x \notin B$. De-même pour $x \in B\backslash A$.

1.1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition/Proposition ALEA.12.1

- On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe une bijection de E sur $[\![1\,,\,n]\!]$.
- L'entier n est unique, et est appelé le *cardinal* de E, noté $\#\,\mathrm{E}$. Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal zéro : $\#\,\varnothing = 0$.

Plus simplement, le cardinal d'un ensemble fini est donc son nombre d'éléments. Intuitivement, les éléments d'un ensemble de cardinal n peuvent être *numérotés* de 1 à n. En pratique, on pourra, si besoin, écrire

$$\mathrm{E} = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

S'il existe une bijection entre deux ensembles E et F, alors E est un ensemble fini si et seulement si F est un ensemble fini, et dans ce cas, ils ont le même cardinal.

Dans la pratique, nous allons rarement compter les éléments d'un ensemble «à la main». On pourra souvent représenter le contexte à l'aide d'une «situation typique» du cours (des uplets, des applications injectives/surjectives, des choix d'éléments dans un ensemble avec ou sans ordre, distincts ou non *etc.*...). Nous allons donc étudier toutes ces situations dans la suite du cours. Avantage : une fois qu'une telle situation est identifiée, il n'y aura plus rien à faire![1]

Exemple 1 —

1. $\#\,\{5, 8, 12\} = 3$.
2. Soit $(n, p) \in \mathbf{N}^2$ tel que $n \leqslant p$. Alors : $\boxed{\#\,([\![n\,,\,p]\!]) = p - n + 1.}$ C'est donc la différence des deux $\boxed{+1}$.

[1] Si on connait son cours, bien entendu

Proposition ALEA.12.2 | Cardinal d'une partie

Soit E un ensemble fini et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Alors :
- F est un ensemble fini, et : $\#\,\mathrm{F} \leqslant \#\,\mathrm{E}$.
- De plus, $\mathrm{F} = \mathrm{E} \iff \#\,\mathrm{F} = \#\,\mathrm{E}$.

On remarquera l'analogie de cette proposition avec celle faisant intervenir des espaces vectoriels et la dimension.

Proposition ALEA.12.3 | Cardinal du complémentaire

Soient E un ensemble fini et A une partie de E. Alors :
- $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ est un ensemble fini, et
- $\#\,(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) = \#\,\mathrm{E} - \#\,\mathrm{A}$.

Partitionnement. On formalise ici la notion «découpage» d'ensemble en sous-parties disjointes.

Définition ALEA.12.2 | Partition

Soit E un ensemble. Alors une famille de parties $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^{\mathbf{N}}$ est appelée *partition de* E si :
- pour tout $n \neq m$, $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \varnothing$,
- $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{E}$.

On dit aussi que E est la *réunion disjointe des* A_n, $n \in \boldsymbol{N}$.

Notation Réunion disjointe

Lorsque les hypothèses précédentes sont satisfaites, on note $\mathrm{E} = \biguplus_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{A}_n$.

Si E est un ensemble fini, alors tous les sous-ensembles A_n, $n \in \mathbf{N}$, qui précèdent sont finis. Et dans le cas fini, on obtient la formule de passage au cardinal ci-dessous.

Proposition ALEA.12.4 | Cardinal d'une réunion disjointe

Soient E un ensemble fini et $(A_n)_{1 \leqslant n \leqslant p}$, $p \in \mathbf{N}^\star$, une partition de E. Alors :

$$\# E = \sum_{n=1}^{p} \# A_n.$$

Remarque 1.1 — de vocabulaire Lorsque $E = \Omega$ est un univers probabiliste, alors une partition est simplement un système complet d'évènements. Nous le reverrons bientôt.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur p, le nombre d'éléments qui constituent la partie**)*
Pour $p = 2$, on utilise la Proposition ALEA.12.3 puisque $A_2 = E \setminus A_1$. Supposons la propriété vraie au rang p.

Remarque 1.2 — Cette proposition est d'une importance cruciale pour donner une consistance à vos raisonnements de dénombrement. On écrit, lorsque c'est possible, notre ensemble de départ comme une réunion disjointe d'ensembles plus simples. Le passage au cardinal nous permet ensuite de conclure.

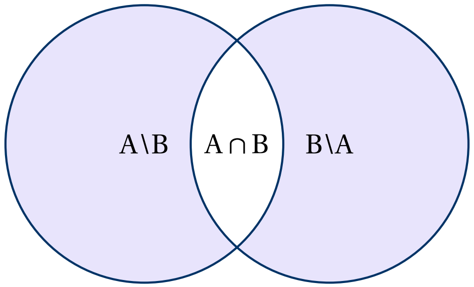
Exemple 2 — Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer, en utilisant un cardinal de réunion, le nombre de couples $(x, y) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$ tels que $x + y = n$. Lister les couples possibles et retrouver le résultat précédent.

Exemple 3 — ***Listes binaires sans termes consécutifs égaux*** Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes — on tient donc compte de l'ordre — de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs. Établir une relation de récurrence sur les termes de (u_n). Exprimer alors u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}^\star$.

Corollaire ALEA.12.1 | Cardinal d'une réunion

Soient E un ensemble fini et A et B deux parties de E. Alors :

$$\#\,(A\cup B) = \#\,A + \#\,B - \#\,(A\cap B).$$



Preuve La famille de parties $(A, (A\cup B)\setminus A)$ est une partition de $A\cup B$, de-même $(A\cap B, (A\cup B)\setminus A)$ est une permutation de B. En passant ensuite au cardinal, on obtient :

$$\#\,(A\cup B) = \#\,A + \#\,A\cup B - \#\,A = \#\,(A\cap B) + \#\,(A\cup B) - \#\,A.$$

Proposition ALEA.12.5 | Cardinal d'un produit cartésien.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $E\times F$ est fini et :

$$\#\,(E\times F) = \#\,E\times\#\,F.$$

Plus généralement, soit $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie d'ensembles finis. Alors,

- $E_1\times\cdots\times E_p$ est fini, et
- $\#\left(E_1\times\cdots\times E_p\right) = \prod_{k=1}^{p}\#\,E_k$.

En particulier, si E est un ensemble fini et $p\in\mathbf{N}^*$, alors :

$$\#\,(E^p) = \#\,E^p.$$

Preuve Pour $p=0$, on suppose donc que $E=\varnothing$. Alors $\#\,(\varnothing\times F) = \#\,\varnothing = 0$. Soit $p\in\mathbf{N}^\star$. Alors notons $E=\left\{x_1,\dots,x_p\right\}$, on a : $E\times F = \bigcup_{i=1}^{p}\{e_i\}\times F$. C'est une partition du produit donc on a :

$$\#\,(E\times F) = \sum_{i=1}^{p}\#\,(\{e_i\}\times F) = \sum_{i=1}^{p}\#\,F = p\#\,F.$$

La formule est donc démontrée.

Exemple 4 — On suppose que l'on peut représenter une cellule par une suite de $N\in\mathbf{N}$ entiers entre -5 et 5, et un entier qui vaut soit 0 soit 3 : le 0 correspondant à une cellule cancéreuse, et le 3 à une cellule saine. Combien y-a-t'il de configurations possibles ?

Proposition ALEA.12.6 | Cardinal de l'ensemble des applications de E dans F.

Soient E et F deux ensembles finis, de cardinaux non nuls. Alors l'ensemble $F^E = \mathscr{F}(E,F)$ des applications de E dans F est fini et :

$$\#\left(F^E\right) = \# F^{\# E}.$$

Preuve Notons n le cardinal de E et nommons ses éléments : $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ d'éléments de F. Il y a donc autant d'applications $f : E \longrightarrow F$ que d'éléments $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$. Ainsi, il existe une bijection entre les ensembles F^E et F^n. D'après la **??**, on a donc : $\#\left(F^E\right) = \#\left(F^n\right) = \# F^n = (\# F)^{\# E}$.

Exemple 5 — *Rangement de boules discernables dans des tiroirs* On considère 5 boules discernables que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles. *Il s'agit d'affecter un tiroir pour chaque boule, soient* 3^5 *possibilités en tout. C'est aussi le nombre d'applications d'un ensemble à* 5 *éléments vers un ensemble à* 3 *éléments.*

Proposition ALEA.12.7 | Cardinal de l'ensemble des parties.

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$\#\mathscr{P}(E) = 2^{\# E}.$$

Preuve Se donner une partie A de E c'est se donner une application de E dans $\{0,1\}$ où $x \in E$ est associé par exemple à 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1.2. Listes, Permutations, Combinaisons

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au cas de tirages de p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E. Il y a alors essentiellement quatre façons différentes de tirer p éléments parmi n :

- avec ordre et répétition (les p-listes d'éléments distincts dans la suite),
- avec ordre et sans répétition (les p-listes d'éléments quelconques dans la suite),
- sans ordre et sans répétition (les p-combinaisons d'éléments distincts dans la suite),
- sans ordre et avec répétition (les p-combinaisons d'éléments quelconques dans la suite).

La présence d'un ordre ou pas sera fixée par le choix de l'objet mathématique que l'on compte : des uplets pour les éléments ordonnés ($(1,2) \neq (2,1)$), et des ensembles pour les éléments non ordonnés ($\{1,2\} = \{2,1\}$).

1.2.1. Nombre de p-listes d'un ensemble fini : avec ordre

Définition ALEA.12.3 | p-listes

Soient E un ensemble et $p \in \mathbf{N}^*$. On appelle p*-uplet* ou p*-liste* d'éléments de E tout élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p. On parle aussi de *couples*pour $p = 2$), de *triplets* pour $p = 3$, de *quadruplets* pour $p = 4$.

Attention

Par exemple pour $p = 2$, $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$ dès que $x_1 \neq x_2$. Ainsi, on tient compte de l'ordre des éléments pour les p-listes.

Proposition ALEA.12.8 | Nombre de p-listes

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

En probabilités, ce type de cardinal interviendra dans des expériences de tirages effectués **avec remise**.

Preuve

Exemple 6 — En ne supposant aucune contrainte sur les séries de chiffres, combien de numéros de cartes bancaires existe-t-il ? Et de codes d'identification ?

On peut maintenant également se poser la question de la recherche du cardinal de ces mêmes listes, mais lorsque tous les éléments sont distincts.

Proposition ALEA.12.9 | Nombre de p-listes d'éléments distincts

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbf{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments **distincts** de E est :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > n, \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si} \quad p \leqslant n. \end{cases}$$

En probabilités, ce type de cardinal interviendra dans des expériences de tirages effectués **sans remise**.

Preuve Le résultat est évident dans le premier cas. Supposons $p \leqslant n$. La construction d'un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments distincts de E peut se faire ainsi : choisir x_1 parmi les n éléments de E, puis x_2 parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{x_1\}$, puis x_3 parmi les $n-2$ éléments de $E \setminus \{x_1, x_2\}$, *etc.* Le nombre de p-uplets d'éléments distincts est alors bien :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Corollaire ALEA.12.2 | Nombre d'injections

Soient E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal n. Le nombre d'injections (*i.e.* d'applications injectives) de E dans F est :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > n, \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si} \quad p \leqslant n. \end{cases}$$

Preuve L'image d'une application injective est une p-liste d'éléments distincts dans un ensemble à n éléments, et ces deux ensembles ont même cardinal.

Cas particulier : le nombre de permutations d'un ensemble fini. Rappelons tout d'abord la définition d'une permutation.

Définition ALEA.12.4

On appelle *permutation* d'un ensemble fini E toute bijection de E dans E.

Notation

Si E est un ensemble fini, on note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de E. Si $E = [\![1\,,\,n]\!]$ avec $n \in \mathbf{N}^\star$, on note plus simplement $\mathfrak{S}_n$ cet ensemble.

Si $E = [\![1\,,\,n]\!]$, une application $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut être écrite comme une application classique

$$\sigma \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E, \\ n & \longmapsto & \sigma(n), \end{array} \right.$$

ou encore sous la forme d'une liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ — c'est simplement la liste des images de chaque entier. On dit qu'une permutation *s'identifie à* une liste.[2] De plus, si σ est bijective, les $\sigma(i)$, $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, sont forcément tous distincts.

Corollaire ALEA.12.3 | Nombre de permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est

$$\mathfrak{S}_E = \# \mathfrak{S}_n = n!.$$

Preuve Puisque E est fini, $\sigma : E \longrightarrow E$ est une permutation si et seulement si elle est injective. Or, d'après le corollaire précédent, le nombre d'applications injectives de E dans E est $\frac{n!}{0!} = n!$.

On peut aussi refaire le calcul à la main.

Exemple 7 —

- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ?
- Autour d'une table ronde ?

Exemple 8 — Si une classe est constituée de 48 étudiants et si la salle de classe comporte exactement 48 places assises, alors il y a 48! dispositions différentes possibles, soit environ 12.10^{60}.

1.2.2. Nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini : sans ordre

Définition ALEA.12.5

Soient E un ensemble et $p \in \mathbf{N}$. On appelle *p-combinaison* (ou p-ensemble) d'éléments de E, toute partie $\{x_1, \dots, x_p\}$ de E de cardinal p.

Attention

Par exemple pour $p = 2$, $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$. Ainsi, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments pour les p-combinaisons.

Eléments distincts.

Proposition ALEA.12.10 | Nombre de p-combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de p-combinaisons d'éléments **distincts** de E est :

[2] Mais attention, ce sont deux objets de natures très différentes.

$$\binom{n}{p} \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > n \text{ ou } p < 0, \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant p \leqslant n. \end{cases}$$

Preuve

Exemple 9 — ***Loto*** Remplir une grille de loto consiste à cocher 5 cases parmi 49. Le nombre de combinaisons possibles est donc $\binom{49}{5} = 1\,906\,884$, dont une seule est gagnante. Au loto, on ne tient par compte de l'ordre des éléments.

Une partie de l'exemple qui suit, très classique, utilise plutôt des permutations.

Exemple 10 — ***Anagrammes d'un mot*** On appelle *anagramme d'un mot* toute permutation de l'ensemble des lettres. Dans la pratique, il faut bien distinguer deux cas, puisque certaines permutations peuvent donner *in fine* le même mot, il ne faut donc pas le compter deux fois !

1. **(Cas de lettres distinctes)** quel est le nombre d'anagrammes du mot CHEVAL ?

2. **(Cas de lettres répétées)** quel est le nombre d'anagrammes du mot ANANAS ?
   On essaye de remplir les 6 emplacements lettres par lettres (comme au jeu du pendu). Commençons par choisir la place des A : on doit choisir 3 emplacements parmi 6, et ce sans ordre (car l'ordre des A n'a pas d'importance, ce sont les mêmes lettres), et sans répétition car on ne peut pas placer deux lettres sur le même emplacement. On a donc des combinaisons de 3 lettres parmi 6 emplacements, soit $\binom{6}{3}$ *possibilités. On doit ensuite placer les 2 N parmi les 3 emplacements restants, on a donc* $\binom{3}{2}$ *possibilités. Enfin, il ne reste qu'une possibilité pour la place du S. Ainsi, on a* $\boxed{\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = 60 \text{ possibilités.}}$

Le nombre de p-combinaisons est inférieur au nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments.[3]

Proposition ALEA.12.11 | Propriétés des coefficients binomiaux

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}$. Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

1. **(Symétrie)** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. **(Formule de Pascal)** $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. **(Formule du binôme de Newton)** Soient $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve Démontrons ces propriétés de manière combinatoire.

1. Par passage au complémentaire, il est clair que le nombre de p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n est égal au nombre de $(n-p)$-combinaisons de cet ensemble. Le résultat découle alors.
2. Considérons le cas non trivial où $0 \leqslant p \leqslant n-1$ — pour le reste, c'est une simple vérification. Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$. Fixons un élément $a \in$ E. Les $(p+1)$-combinaisons de E se classent en deux parties : celles contenant a (il

[3] Ceci est tout à fait cohérent avec l'intuition, si on tient compte de l'ordre, il y a plus de possibilités.

y en a $\binom{n}{p}$) et celles ne contenant pas a (il y en a $\binom{n}{p+1}$). Comme ces deux classes de parties sont d'intersection vide, on somme leurs cardinaux pour trouver **2)**.

3. Les termes issus du développement du produit $(a+b)^n$ sont obtenus en choisissant, un certain nombre de puissances de a et de puissances de b tel que la somme des puissances soit égale à n. Plus précisément, notons $k \in [\![0, n]\!]$ la puissance de a d'un des termes, celle de b est alors $n-k$. Il y a par ailleurs $\binom{n}{k}$-façons d'obtenir le terme $a^k b^{n-k}$ — c'est le nombre de façons de choisir k fois a dans le produit $(a+b)\dots(a+b)$. D'où la formule.

ELÉMENTS QUELCONQUES. Ce cas là est plus rare mais il apparaît parfois. Rappelons que nous avons traité l'exemple ci-dessous mais avec des boules discernables.

Exemple 11 — ***Rangement de boules indiscernables dans des tiroirs*** On considère 5 boules indiscernables[4] que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles. Dessinons une configuration.

Cela revient donc à compter le nombre de façons de poser les 5 (boules) + 2 (cloisons internes) = 7 objets. On imagine alors qu'il y a 7 emplacements à remplir, donc le nombre de configurations est le nombre de choix pour les cloisons (*cf.* des boules, cela mènera au même résultat), soient $\binom{7}{2}$ configurations possibles. En effet, il faut faire ces choix de manière non répétée (on ne met pas deux objets au même endroit) et puisque les cloisons (*cf.* boules) sont identiques, on ne tient pas compte de l'ordre des emplacements.

[4] Le cas de boules indiscernables est plus complexe que le cas discernable, car on peut avoir trois boules dans le 1er tiroir *via* plusieurs configurations (mettre les deux premières que l'on choisit, ou la 1ère et la dernière que l'on choisit par exemple…).

Les rappels de dénombrement étant terminés, passons à l'axiomatique probabiliste.

Résumé

On essaie toujours de représenter un exercice à l'aide d'un objet de dénombrement du cours (application, liste, ensemble, *etc.*). Dans un raisonnement dénombrement, la phrase

- « soit ça soit ça » donnera une addition de cardinal — une partition de l'ensemble est cachée,
- « ça puis ça » donnera une multiplication de cardinal.

2. AXIOMATIQUE DES PROBABILITÉS

Certaines réalités doivent être modélisées par des objets méthématiques que nous qualifierons d'*aléatoires*, qui dépendant en fait de la réalisation d'un contexte précis. Voyons pourquoi.

DE L'ALÉATOIRE, POURQUOI ? L'aléatoire est présent dans toute expérience scientifique. Les deux grandes explications en sont :

- d'une part l'aléatoire « intrinsèque » lié à la complexité des individus et des phénomènes étudiés et au manque d'information dans le domaine. Exemple : vous observez une particule, qui se balade de manière anarchique sur la droite réelle, on essaye d'observer et de trouver une loi de déplacement, l'aléatoire est donc dû au manque d'informations sur cette loi *a priori* inconnue.

- D'autre part, de l'aléatoire peut intervenir « expérimentalement », par mesures entachées d'erreur, ou encore lorsque les moyens pour relever sont limités. Exemple 1 : un relevé expérimental en physique, il y a une erreur/incertitude due à la machine elle-même. Exemple 2 : vous voulez savoir si un vaccin contre la COVID–19 est efficace, vous pouvez le tester sur un échantillon, mais aussi grand soit-il, un aléatoire sera toujours présent (à moins de le tester à l'échelle de la planète, ce qui est bien entendu irréalisable dans la pratique).

La première source d'aléatoire est donc le manque d'informations, ou l'ignorance, la seconde est matérielle et peut donc être contrôlée et donnée elle-même lieu à une étude plus poussée. Il n'y a pas de raison de penser qu'une source d'aléatoire peut complètement être supprimée. En Biologie (ainsi qu'en Médecine), étant donné l'extrême complexité des systèmes étudiés, l'aléatoire est très présent.

2.1. Espace probabilisé

Les premières formalisations de la notion de hasard, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, répondaient pour l'essentiel à diverses questions issues de la théorie des jeux. Depuis la publication en 1933 des Fondements de la théorie des probabilités d'Andreï Kolmogorov, les probabilités sont solidement ancrées sur la formalisation proposée par Kolmogorov.

Afin de donner un sens intuitif au concept d'espace probabilisé (les variables aléatoires seront vues plus tard), considérons par exemple les expériences aléatoires ci-dessous.

1. **(Expérience 1)** L'expérience d'un lancer de dé à 6 faces peut conduire à 6 résultats selon la face obtenue.
2. **(Expérience 2)** L'expérience d'un nombre infini de lancers d'une pièce amenant à pile « P » ou face « F ».

- **(L'univers Ω)** Un ensemble qui décrit les résultats bruts de l'expérience. Dans l'expérience 1, on a $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Les résultats de l'expérience 2 peuvent être considérés comme des suites
$$(u_n) = (u_1, \dots, u_n \dots), \quad \forall i, \quad u_i \in \{P, F\}.$$
Donc $\Omega = \{P, F\}^{\mathbf{N}}$.
- **(Une tribu $\mathscr{T}$ sur Ω)** C'est un sous-ensemble de parties de Ω qui correspond à ce que l'on considère comme observable. Dans l'expérience 1, tout est observable, donc $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ décrit bien la situation. En revanche, dans l'expérience 2, un observateur humain ne peut relever qu'un nombre fini de lancers pour des raisons évidentes. Donc $\mathscr{T}$ contiendra au moins des évènements de la forme
$$A_i \quad \text{« le lancer } i \text{ a donné P »}, \quad i \geqslant 0,$$
ainsi que leur complémentaire réunion intersection. Les parties de Ω qui sont dans $\mathscr{T}$ seront appelées les *évènements*.
- **(Une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{T})$)** Une application qui donne un indicateur dans $[0, 1]$ de la vraisemblance d'un évènement (*i.e.* les chances qu'à une observation de survenir). Dans l'expérience 1, puisque le dé est supposé non truqué, l'application
$$\mathbf{P} : \omega \in \Omega \longmapsto \frac{1}{6}$$
décrit bien la situation. Ou plus généralement
$$\mathbf{P} : A \in \mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \frac{\# A}{6}.$$
Dans l'exemple 2, on poserait si la pièce est non truquée :
$$\mathbf{P} : A_i \in \mathscr{T} \longmapsto \frac{1}{2}.$$
On admet l'existence d'une probabilité, qui est non triviale dans l'Exemple 2.

Remarque 2.1 — Complément sur les tribus La notion de tribu ne paraît pas ici indispensable, et pourtant elle joue un rôle fondamental dans plusieurs contextes importants en Mathématiques :

1. la construction de l'intégrale de LEBESGUE : qui unifie l'intégrale de RIEMANN, les séries et d'autres choses, et qui fournit une définition générale de l'espérance.
2. Les phénomènes d'évolution, où l'information disponible peut dépendre du temps et donc on est amené à considérer des suites ou familles de tribus (on parle dans ce cas de *filtration*).

Bref, à notre niveau, il convient simplement de voir le concept de tribu comme de l'information disponible et accessible par observation, comme cela a été exposé précédemment.

En 1ère année les univers étaient toujours finis, ce qui était bien sûr restrictif (l'expérience 2 ne rentre pas dans ce cadre).

2.2. Univers & Espace probabilisable

Nous allons maintenant devoir imposer certaines propriétés sur les tribus et probabilités afin d'obtenir un cadre raisonnable permettant de faire des calculs. Voyons lesquels.

Définition ALEA.12.6 | Tribu sur un univers Ω

Soit Ω un ensemble appelé *univers*. On appelle *tribu* (ou σ-*algèbre*) sur Ω un sous-ensemble $\mathscr{T}$ des parties de Ω vérifiant :
1. $\emptyset \in \mathscr{T}$.
2. **(Stabilité par passage au complémentaire)** $A \in \mathscr{T} \implies {}^{C}A \in \mathscr{T}$,
3. **(stabilité par réunion dénombrable)** si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}\mathscr{T}^{\mathbf{N}} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathscr{T}$.[5]

Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$ est alors appelé *espace probabilisable*. Les éléments de Ω sont appelés les *résultats* (ou *issues*, *éventualités*), notés généralement ω. Les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés les *évènements*, l'ensemble $\emptyset$ est appelé *évènement impossible* et Ω *évènement quasi-certain*.

Attachons certaines propriétés à la notion d'univers.

Définition ALEA.12.7 | Ensemble dénombrable

Un univers Ω d'un $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ est dit :
1. *fini* si l'ensemble Ω est un ensemble fini,
2. *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbf{N}$,
3. *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Un univers dénombrable est donc en particulier de cardinal non fini. Tout ensemble dénombrable Ω peut s'écrire donc sous la forme « numérotée » suivante :

$$\Omega = \{\omega_i,\ i \in \mathbf{N}\}.$$

Remarque 2.2 — L'axiome **3)** est légitimé en considérant n'importe quelle expérience aléatoire mettant en jeu une série infinie d'actions. Imaginons qu'un joueur lance une pièce de monnaie et qu'il gagne s'il obtient trois fois de suite pile, si A_n « le joueur obtient, pour la première fois, trois fois de suite pile au n-ième lancer », alors l'évènement « le jour gagne » est $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

Donnons sans plus tarder quelques exemples d'espaces probabilisables.

Exemple 12 — *Exemples d'univers* Le résultat d'une expérience aléatoire peut prendre des formes variées :

1. le tirage de trois cartes dans un jeu de 32.

[5] Notez que l'on aurait pu (en utilisant **3)**) remplacer l'axiome **1)** par $\Omega \in \mathscr{T}$. À partir des trois axiomes principaux, on peut en déduire d'autres, qui auraient pu être pris d'ailleurs comme définition.

2. Lancer d'une pièce jusqu'à obtenir pile : $\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \dots\}$.
3. Lancer infini d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbf{N}}$ (non dénombrable cette fois-ci),
4. Durée de vie d'une ampoule : $\Omega = \mathbf{R}^{+\star}$ (non dénombrable),
5. Jeu de fléchettes : $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$ (non dénombrable), avec $R \in \mathbf{R}^\star$.

Exemple 13 — *Exemples de tribus* On peut munir un univers Ω des tribus ci-dessous.

- $\{\emptyset, \Omega\}$ appelée *tribu grossière*,
- l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω, appelée *tribu discrète*,
- si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ alors la *tribu engendrée par* A notée $\sigma(A)$ est $\{\emptyset, A, {}^cA, \Omega\}$, on montre sans difficulté qu'il s'agit de la plus petite tribu contenant A. [6]

Proposition ALEA.12.12

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable. Alors
1. $\Omega \in \mathscr{T}$,
2. **($\mathscr{T}$ est stable par réunion finie)** c'est-à-dire que pour toute famille finie $A_1, \dots, A_N \in \mathscr{T}$, $N \geqslant 1$, on a : $\bigcup_{i=1}^{N} A_i \in \mathscr{T}$.
3. **($\mathscr{T}$ est stable par intersection dénombrable)** pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbf{N}}$, on a : $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{T}$. En particulier, elle est aussi stable par intersection finie.
4. **($\mathscr{T}$ est stable par différence)** Si $(A, B) \in \mathscr{T}^2$, alors : $A \setminus B = A \cap {}^cB \in \mathscr{T}$.

Preuve
1. Comme $\emptyset \in \Omega$, vu que $\mathscr{T}$ est stable par passage au complémentaire, ${}^c\emptyset = \Omega \in \mathscr{T}$.
2. On sait que $\mathscr{T}$ est stable par réunion dénombrable. L'idée est qu'une réunion finie est en particulier dénombrable en la prolongeant par le vide. Considérons $A_1, \dots, A_N \in \mathscr{T}$. Posant $A_k = \emptyset$ pour tout $k \geqslant N + 1$, on a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \bigcup \emptyset = \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{T}.$$

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{T}$. Alors $({}^cA_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi une suite d'éléments de $\mathscr{T}$. D'après **2)**, on obtient :

$${}^c\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} {}^cA_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} {}^c({}^cA_n) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{T}.$$

4. Si $A, B \in \mathscr{T}$, alors ${}^cB$ est aussi dans $\mathscr{T}$, donc d'après **3)**, on obtient : $A \cap {}^cB \in \mathscr{T}$.

[6] De manière plus générale, étant donnée une partie $\mathscr{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$, on peut même montrer qu'il existe toujours une plus petite tribu sur Ω contenant $\mathscr{P}$.

Définition ALEA.12.8 | Système complet d'évènements

Soient Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de parties de Ω. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un *système complet d'évènements* si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une partition de Ω, *i.e.* si :
- $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$,
- les A_n sont deux à deux disjoints, *i.e.* pour tous $i \neq j$ deux entiers, on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$.

La notion de système complet d'évènements est en fait une notion purement ensembliste (appelée partition dans le début du chapitre). Dans un contexte plutôt probabiliste (*i.e.* lorsque l'on partitionne un univers Ω provenant d'une expérience aléatoire), on parle plutôt de système complet d'évènements. C'est juste une question de vocabulaire.

Autrement dit, la famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une partition de Ω si pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un et un seul $n \in \mathbf{N}$ tel que $\omega \in A_n$.

Exemple 14 —

- Pour tout $A \subset \Omega$, l'ensemble $\{A, {}^cA\}$ est un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, alors (A, B) où A = « faire pair » $= \{2, 4, 6\}$, B = « faire impair » $= \{1, 3, 5\}$ est un système complet d'évènements.

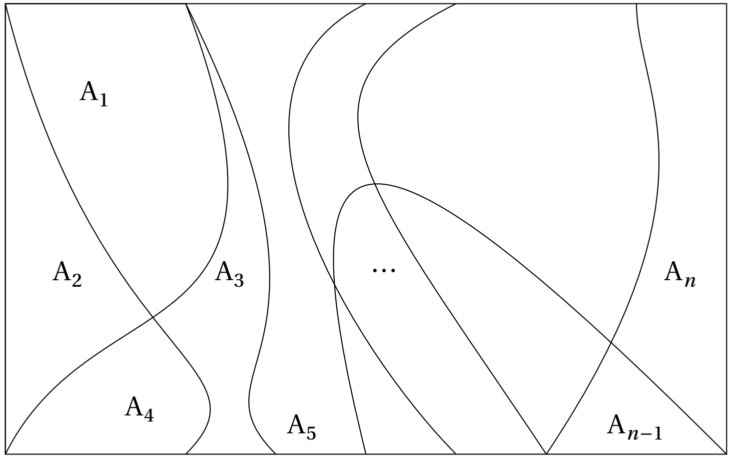


FIG. ALEA.12.1. : Représentation d'un système complet d'évènements

2.3. Espace probabilisé

Définition ALEA.12.9 | Probabilité

Soient un ensemble Ω et une tribu $\mathscr{T}$ sur Ω, on appelle *probabilité* (ou plus simplement *probabilité*) sur $(\Omega, \mathscr{T})$ une application $\mathbf{P} : \mathscr{T} \to [0,1]$ telle que les propriétés ci-dessous soient vérifiées :

- **(Additivité dénombrable ou σ-additivité)** pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{T}$ deux à deux disjoints (*i.e.* $A_n \cap A_m = \varnothing$ pour tout $n \neq m$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \text{ converge}, \quad \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

On appelle *espace probabilisé* un triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ où $\mathscr{T}$ est une tribu sur Ω, et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$. En particulier, si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système complet d'évènements, alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$.

Remarque 2.3 — La définition est bien posée Il y a une petite subtilité dans l'égalité

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

de la Définition ALEA.12.9. Étant donné que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est toujours invariante par permutation des A_n (vérification facile avec la définition d'une réunion), il faudrait justifier que c'est le cas aussi de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$. Dans le cas contraire, on pourrait avoir plusieurs valeurs en fonction de l'ordre en lequel on somme, et l'hypothèse n'est pas bien posée.

Pour justifier ceci, il nous suffit d'appliquer le Théorème ANA.10.3 du Chapter ANA.10 et donc de justifier que $(\sum \mathbf{P}(A_n))$ converge absolument. En effet, c'est bien le cas, car pour tout entier N, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |\mathbf{P}(A_n)| = \sum_{n=0}^{N} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leqslant 1.$$

La série précédente étant une série à termes positifs de somme partielle majorée, elle converge absolument.

Définition ALEA.12.10 | Certitude & Négligence d'un évènement

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

- Un événement A tel que $\mathbf{P}(A) = 1$ est dit $\mathbf{P}$-*quasi-certain*, on dit aussi que A a lieu $\mathbf{P}$-*presque sûrement*, « p.s. » en abrégé.
- Un événement A vérifiant $\mathbf{P}(A) = 0$ est dit $\mathbf{P}-$*négligeable* (ou $\mathbf{P}$-*quasi-impossible* parfois).

Définition ALEA.12.11 | Système quasi-complet

Soient Ω un ensemble. Considérons $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de parties de Ω. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un *système quasi-complet d'évènements* de Ω si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$,[7]
- les A_n sont deux à deux disjoints, *i.e.* pour tous $i \neq j$ deux entiers, on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition ALEA.12.13

Tout système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements.

Preuve

Remarque 2.4 — Structure de l'ensemble des probabilités

- L'ensemble des probabilités sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ n'est **pas** un espace vectoriel, car ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^\Omega$.
- **(Stabilité par combinaison convexe)** L'ensemble des probabilités sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ est stable par combinaison convexe : *i.e.* si $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ sont deux probabilités sur $(\Omega, \mathscr{T})$ alors $\lambda \mathbf{P}_1 + \mu \mathbf{P}_2$ est aussi une probabilité avec $\lambda + \mu = 1$.

[7] On a remplacé la réunion dans la définition de système complet d'évènements par une égalité en probabilité.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES D'UNE PROBABILITÉ.

Proposition ALEA.12.14 |

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Alors pour tout $(A, B) \in \mathscr{T}^2$, on a :

1. **(Différence)** $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$. En particulier si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
2. **(Formule d'inclusion/exclusion)** $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$,
3. **(Additivité)** si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. En particulier, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbf{P}\left({}^c A\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$,
4. **(Monotonie pour $\subset$)** si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

Preuve

Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans la Définition ALEA.12.9 n'est pas monotone, on a en revanche qu'une inégalité.

Proposition ALEA.12.15 | Sous-additivité dénombrable

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{T}$. Alors,

$$\text{si} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \quad \text{converge,} \quad \text{alors} \quad \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Remarque 2.5 — Même si la série majorante diverge, c'est forcément vers $+\infty$ puisqu'elle est à termes positifs. L'inégalité reste donc vraie également dans ce cas.

Preuve Nous admettons cette preuve. L'idée principale étant d'écrire la réunion *a priori* non disjointe $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ en une réunion disjointe $\bigcup_{n=0}^{\infty} \widetilde{A_n}$ avec $\widetilde{A_n} \in \mathscr{T}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. L'axiome d'additivité dénombrable d'une probabilité nous permet ensuite de conclure en faisant le lien entre les $\mathbf{P}(A_n)$ et les $\mathbf{P}(\widetilde{A_n})$.

Passons à présent à des exemples classiques d'espaces probabilisables.

Exemple 15 — ***Un jeu non truqué de pile ou face fini.*** Le pile ou face en une étape est décrit par l'espace $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ avec $\Omega = \{P, F\} = \{P\} \cup \{F\}$,

$$\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\},$$

où $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω donnée par $\mathbf{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# A}{2}$ pour tout $A \in \mathscr{T}$.

Vérifions que $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

Si l'on veut tenir compte d'une succession de N jeux, on prend plutôt $\Omega = \{P, F\}^N$, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur Ω donnée par $\mathbf{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# A}{2^N}$ pour tout $A \in \mathscr{T}$.

Exemple 16 — ***Main de Poker*** La sélection d'une main au poker peut être décrite par l'espace $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ avec $\Omega = \mathscr{P}_5(\{cartes\})$ l'ensemble des parties à cinq éléments de l'ensemble des cartes, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$, le nombre de cartes en main dépendant de la manche, et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme (sur Ω) donnée par $\mathbf{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# A}{\binom{52}{5}}$ pour tout $A \in \mathscr{T}$.

On vérifie de la même manière que $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

Exemple 17 — ***Généralisation : Probabilité uniforme discrète, issues équiprobables***

Soit Ω un ensemble fini non vide. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, posons

$$\mathbf{P}^{\#}_{\Omega}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}.$$

Alors on montre que $\mathbf{P}^{\#}_{\Omega}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ appelée *probabilité uniforme* sur Ω. Quelles expériences aléatoires pourraient correspondre à ce triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P}^{\#}_{\Omega})$? *N'importe quelle expérience aléatoire entrant dans un contexte d'équiprobabilité. Par exemple $\Omega = [\![1, 6]\!]$ correspondant au lancer d'un dé équilibré. Chaque issue est alors de probabilité* $1/6$.

Exemple 18 — *Jeu infini de pile ou face* Il est naturel d'introduire comme espace des issues l'ensemble Ω des suites $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ où les ω_i valent P ou F (et non plus des N-uplets finis). On a ainsi

$$\Omega = \{P, F\}^{\mathbf{N}^*},$$

l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$. **Cet univers n'est pas au plus dénombrable** : on peut montrer qu'il est en bijection avec $\mathbf{R}$.

La construction d'une tribu est beaucoup moins évidente que dans les autres cas. On suppose qu'il existe $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathscr{T}$ contient A_n « le n-ième lancer a donné face » (et donc *a fortiori* toute intersection ou réunion de tels ensembles ou de leur complémentaire — ce qui signifie, en terme d'information disponible, que l'on peut observer uniquement un nombre **fini** de lancers). Nous admettrons que sur cet espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ ainsi obtenu on peut définir une probabilité vérifiant la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2}.$$

Un joueur lance une pièce équilibré jusqu'à ce qu'il obtienne pile. Montrer que l'évènement F « le joueur obtient face à tous les lancers » est négligeable. *Indication : Introduire l'évènement B_n « le joueur obtient face au cours des n premiers lancers » pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.* *Notons F « le joueur obtient face à tous les lancers ». C'est un évènement car*

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n,$$

c'est donc une réunion dénombrable d'évènements (par hypothèse les A_n sont dans $\mathscr{T}$).

Mêmes si les A_n sont indépendants on ne peut dire que la probabilité de l'intersection est le produit infini des probabilités.[8]

Mais, $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k = B_n$. Or, $\mathbf{P}(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$. Donc par théorème de majoration, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0}$. L'évènement F est donc bien négligeable.

Exemple 19 — *Masse de Dirac, issues certaines* Soit Ω un ensemble quelconque et $\omega \in \Omega$. On définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ en posant pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que pour tout $\omega \in \Omega$, δ_ω est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, elle est appelée *masse de* Dirac en a. Pour cette probabilité, les évènements sont toujours certains ou négligeables. Quelle expérience aléatoire pourrait correspondre à ce triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \delta_\omega)$? *Par exemple, un lancer de dé qui ne comporterait que des 6, avec ω l'évènement « faire 6 au lancer ».*

2.4. Résultat d'existence de probabilités

On rappelle que le qualificatif *au plus dénombrable* signifie dénombrable ou fini.

Vous avez déjà rencontré le théorème suivant en première année dans le cas où Ω est fini. Si on note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, avec $n \in \mathbf{N}$ alors si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, on a pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

[8] Mais on peut utiliser le théorème dit de « continuité le long des suites croissantes/décroissantes », mais hors programme en BCPST.

En d'autres termes, il faut définir $\mathbf{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$ pour construire entièrement $\mathbf{P}$.[9] Mais peut-on prendre n'importe quoi pour $\mathbf{P}(\{\omega\})$? La réponse est non, en effet, puisque $\Omega = \biguplus_{\omega\in\Omega}\{\omega\}$ et que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, l'axiome d'additivité dénombrable impose

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Ces faits peuvent être généralisés sans peine aux univers au plus dénombrable, c'est ce qui est précisé dans le prochain théorème.

Théorème ALEA.12.1 | Existence d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable

Soit Ω un univers non vide, fini ou dénombrable. Pour toute famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de $\mathbf{R}^+$ telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :

- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- Plus précisément, elle est définie par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \ \mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Remarque 2.6 — Notation $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega$ Notez que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega$ a du sens puisque Ω est supposé au plus dénombrable : en effet, on peut écrire Ω sous forme « numérotée » $\Omega = \{\omega_n, \ n \in \mathbf{N}\}$ et on pose

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\omega_n}.$$

De plus, cette somme existe et ne dépend pas de la numérotation puisque la série converge absolument. De-même pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit ainsi $\sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Preuve ■ **Analyse –** (ou unicité). Si $\mathbf{P}$ est une probabilité sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega$ on ait $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, alors, si $A \in \Omega$, on a en utilisant la propriété d'additivité dénombrable d'une probabilité :

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}\left(\biguplus_{\omega\in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} \boldsymbol{P}(\{\omega\}).$$

On obtient la formule du théorème qui définit $\mathbf{P}$, donc si $\mathbf{P}$ existe, elle est forcément définie par cette formule.

■ **Synthèse.** Définissons alors $\mathbf{P}$ par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$. Vérifions que $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Exemple 20 — La suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geqslant 1}$ définie une probabilité sur $\mathbf{N}^\star$, mais aussi sur $\{(1), (2,2), (3,3,3), \dots, (n, \dots, n), \dots\}$ munis de leur tribu des parties.

[9] De la même manière que, pour définir une application linéaire, il suffit de la définir sur une base

2.5. Conditionnement & Indépendance d'évènements

Un énoncé de probabilité conditionnelle est un énoncé du type : « si B se produit alors la probabilité que A se produise est p ».

- Par exemple, considérons les évènements « il neige » et « le bus est en retard ». Si je sais qu'il neige, la probabilité que le bus soit en retard devrait être augmentée.
- Autre exemple, si l'on considère le jeu ci-après, trois portes, derrière l'une des trois se cache un trésor. J'ai le droit de regarder successivement derrière chacune des portes et d'en choisir une à chaque tour. Sachant que j'ai déjà regardé une porte, j'ai plus de chance au tour suivant de tomber sur la bonne.

On souhaite donc définir une nouvelle notion probabiliste qui tienne compte de cet apport d'information.

2.5.1. Conditionnement par rapport à un évènement

Mathématiquement, nous allons considérer la définition suivante.

Définition ALEA.12.12 |

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement non-négligeable *i.e.* tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Pour tout événement $A \in \mathscr{T}$ on pose

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Cette quantité est appelée *probabilité de* A *sachant* B ou *probabilité conditionnellement à* B.[10]

On aurait pu penser à introduire l'application

$$A \in \mathscr{T} \longmapsto \mathbf{P}(A \cap B)$$

pour décrire l'apport d'information. Seulement cette application n'est pas une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$, puisque $\mathbf{P}(\Omega \cap B) = \mathbf{P}(B) \neq 1$ *a priori*, il faut donc diviser par $\mathbf{P}(B)$ pour former une probabilité.

Attention **L'évènement $\{A \mid B\}$ n'existe pas !**

- Nous n'avons pas défini l'évènement $\{A \mid B\}$, **seulement la probabilité conditionnelle sachant** B.
- À ne pas confondre avec l'évènement $A \backslash B = A \cap {}^cB$. De plus, avant de parler de conditionnement **il est nécessaire de préciser que** B **n'est pas négligeable**.

Exemple 21 — Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons conditionnellement au fait qu'au moins l'un des deux est un garçon, que les deux soient des garçons ? Préciser un espace probabilisé associé à l'expérience.

Avec des notations évidentes, l'espace probabilisé est $\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$ *muni de la probabilité uniforme. La probabilité cherchée est*

$$\boldsymbol{P}(GG|\{GG, GF, FG\}) = \frac{\boldsymbol{P}(\{GG\})}{\boldsymbol{P}(\{GG, GF, FG\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

En revanche, $\boldsymbol{P}(GG) = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

[10] Parfois aussi notée $\mathbf{P}_B(A)$.

2.5.2. Formules probabilistes

On déduit directement de la définition une formule de permutation de conditionnement appelée formule de Bayes.

Attention
Un raisonnement probabiliste doit s'appuyer sur l'une des formules ci-après. Vous pouvez éventuellement vous appuyer sur un arbre **au brouillon**, mais l'utilisation d'un seul arbre sur une copie n'est pas une rédaction suffisamment convaincante.

Proposition ALEA.12.16 | Formule de Bayes ou de réciprocité conditionnelle

1. Soient A et B des événements non négligeables, alors
$$\mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})}.$$
2. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système complet d'évènements non négligeables. Alors :
$$\mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A})}{\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_n)\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)}.$$

Preuve

Exemple 22 — ***Intérêt des QCM pour les examens*** Considérons des questions où m réponses possibles sont proposées et supposons qu'un candidat a une probabilité p de connaître la réponse à une question prise au hasard parmi un ensemble fini de questions. Sachant que le candidat a répondu correctement à la question, quelle est la probabilité qu'il sache effectivement la réponse ? On suppose qu'un candidat ne sachant pas la réponse répond « au hasard », et donc que chacune des m réponses possibles sont équiprobables.

Soit RC l'événement « le candidat répond correctement » et Co l'événement « le candidat connaît la réponse ». Appliquons la règle de Bayes,
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{Co}\mid\mathrm{RC}) &= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{RC}\mid\mathrm{Co})\mathbf{P}(\mathrm{Co})}{\mathbf{P}(\mathrm{RC})}\\
&= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{RC}\mid\mathrm{Co})\mathbf{P}(\mathrm{Co})}{\mathbf{P}(\mathrm{RC}\cap\mathrm{Co})+\mathbf{P}\left(\mathrm{RC}\cap{}^{c}\mathrm{Co}\right)}\\
&= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{RC}\mid\mathrm{Co})\mathbf{P}(\mathrm{Co})}{\mathbf{P}(\mathrm{RC}\mid\mathrm{Co})\mathbf{P}(\mathrm{Co})+\mathbf{P}\left(\mathrm{RC}\mid{}^{c}\mathrm{Co}\right)\mathbf{P}\left({}^{c}\mathrm{Co}\right)} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{m}(1-p)}\\
&= \frac{mp}{mp+1-p}.
\end{aligned}$$
Donc plus m est grand, plus $\mathbf{P}(\mathrm{Co}|\mathrm{RC})$ est grand. C'est assez intuitif car il est probable que le candidat connaisse la réponse s'il a donné une bonne réponse parmi de nombreuses proposées. Remarquons que pour $m = 3$ et $p = 1/2$, $\mathbf{P}(\mathrm{Co}\mid\mathrm{RC}) = 3/4$. Ce qui est somme toute assez grand ! On conçoit donc qu'un questionnaire d'une trentaine de questions, chacune à trois ou quatre réponses possibles, soit à même de rendre compte du savoir d'un étudiant !

La formule des probabilités totales est la première grande formule à connaître en probabilités.

Proposition ALEA.12.17 | Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbf{N}}$ un système complet d'évènements de Ω. Alors, pour tout événement $B \in \mathscr{T}$, on a :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n).$$

En particulier, si pour tout $n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(A_n) \neq 0$, alors :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n).$$

Remarque 2.7 — Parfois, les énoncés ne font pas figurer la condition « pour tout $n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(B_n) \neq 0$ » mais décrètent que **par convention** :

$$\mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0 \quad \text{si } A_n \text{ est négligeable.}$$

Méthode Quand utiliser la formule des probabilités totales

Pour calculer la probabilité d'un évènement pour lequel on a besoin de faire une disjonction de cas. Exemple typique : deux urnes dont le tirage se fait dans l'une ou l'autre en fonction du résultat du tirage précédent, on utilise alors le résultat du tirage précédent comme système complet d'évènements puis on applique la formule des probabilités totales.

Preuve

- **(1er cas : $(A_n)_n$ est un système complet d'évènements)**

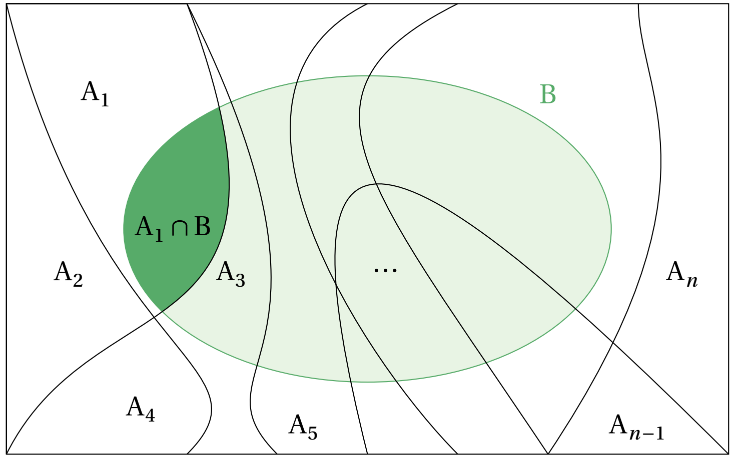


FIG. ALEA.12.2. : Écriture d'un évènement B avec un système complet d'évènements (A_n)

- **(2ème cas : $(A_n)_n$ est un système quasi-complet d'évènements)** Nous avons donc ici

$$\forall n \neq m, \quad A_n \cap A_m = \emptyset, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1.$$

De manière équivalente, c'est supposer que

$$\forall nesdd \neq m, \quad A_n \cap A_m = \varnothing, \quad \mathbf{P}\left(\biguplus_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = 1.$$

Notons dans la suite $A = \biguplus_{n\in\mathbf{N}} A_n$. On a

$$\begin{aligned} B &= (B\cap A) \biguplus (B \cap {}^{c}A) \\ &= \left(\biguplus_{n\in\mathbf{N}} B\cap A_n\right) \biguplus (B\cap {}^{c}A), \\ \mathbf{P}(B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B\cap A_n) + \mathbf{P}(B\cap {}^{c}A). \end{aligned}$$

en passant aux proba

Or, par hypothèse $\mathbf{P}(A) = 1$, donc $\mathbf{P}({}^{c}A) = 0$. Mais comme $(B\cap {}^{c}A) \subset {}^{c}A$, on obtient $0 \leqslant \mathbf{P}(B\cap {}^{c}A) \leqslant \mathbf{P}({}^{c}A) = 0$, donc $\mathbf{P}(B\cap {}^{c}A) = 0$ et la formule est établie.

Puisqu'un système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements nous aurions pu nous contenter du second cas.

Remarque 2.8 — Un cas particulier qui revient souvent est la formule

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|{}^{c}A)\,\mathbf{P}({}^{c}A)$$

valable dès que $0 < \mathbf{P}(A) \leqslant 1$ qui provient directement du système complet d'évènements $(A, {}^{c}A)$. Alors la visualisation ensembliste est la suivante.

Exemple 23 — ***Test et faux positifs.*** Une maladie affecte une personne sur 1000. Le test de dépistage n'est pas parfait : le résultat est toujours positif pour une personne malade et pour une personne saine il est positif (donc erroné) 2 fois sur 100. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un résultat positif au test soit effectivement malade?

Soit T l'événement « le test est positif » et M l'événement « la personne est malade ». On cherche $\boldsymbol{P}(M|T)$. On écrit

$$\boldsymbol{P}(M|T) = \boldsymbol{P}(T|M)\frac{\boldsymbol{P}(M)}{\boldsymbol{P}(T)}.$$

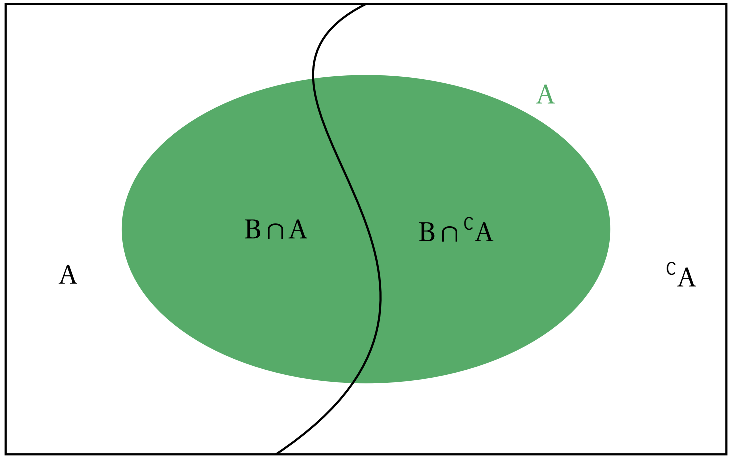


FIG. ALEA.12.3. : système complet d'évènements avec un évènement et son complémentaire

D'après les données du problème $\boldsymbol{P}(T|M) = 1$ et $\boldsymbol{P}(M) = 0,001$. De plus

$$\boldsymbol{P}(T) = \boldsymbol{P}(T|M)\boldsymbol{P}(M) + \boldsymbol{P}(T|M^{c})\boldsymbol{P}(M^{c}) = 1\times 0,001 + 0,02\times 0,999.$$

En regroupant tout, on trouve que $\boldsymbol{P}(M|T)$ est de l'ordre de 5%. Le test est probablement erroné.

Nous avons par définition, que pour tout couple d'évènements $(A,B) \in \mathscr{T}^2$, tels que B ne soit pas négligeable :

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B),$$

on peut généraliser sans trop de difficulté à une intersection de n évènements.

Théorème ALEA.12.2 | Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$, $n \geqslant 2$, et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{T}$ tels que : $\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\,\mathbf{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}).$$

Méthode Quand utiliser la formule des probabilités composées

Pour calculer la probabilité d'un évènement qui est une intersection d'évènements non indépendants.[11] Exemple typique : une urne dont on change les proportions de boules de chaque type étape par étape, piocher pour la première fois une boule d'un type au rang n revient à piocher que des boules des autres types jusqu'au rang $n-1$ puis une boule du bon type au rang n.

Remarque 2.9 — L'hypothèse $\mathbf{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$ garantit que toutes les probabilités conditionnelles existent. C'est un point clef de la démonstration ci-dessous.

Preuve

Remarque 2.10 — On l'utilise en général pour toute répétition d'expériences, dont la réalisation de la n-ième dépend de la $n-1$-ième.

Exercice ALEA.12.1 | Une histoire de princesse. Une princesse est retenue prisonnière dans un chateau. Un prince charmant se met en tête de la délivrer. Lorsqu'il arrive à l'entrée du chateau, il se trouve devant 3 portes. Il en ouvre une au hasard (équiprobable).

- S'il ouvre la 1ère porte, il délivre la princesse.
- S'il ouvre la deuxième porte, un dragon apparait et le dévore.
- S'il ouvre la troisième porte, une sorcière lui fait boire un filtre, il oublie tout ce qu'il a vu et est mis à la porte du chateau.

Le prince renouvelle ses tentatives jusqu'à ce qu'il meure ou qu'il délivre la princesse.

1. Calculer la probabilité de l'événement D_k : « il délivre la princesse au k-ème essai ».

2. Calculer la probabilité de l'événement D : « il délivre la princesse ».

[11] sinon c'est plus facile, on utilise l'indépendance.

2.5.3. Indépendance d'évènements

De façon intuitive, on dit que A est indépendant de B si savoir B ne change pas la probabilité de A. C'est-à-dire si

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A).$$

Pour que cette formule ait un sens on est obligé de supposer que $\mathbf{P}(B) > 0$, ce qui n'est pas le cas dans la définition suivante. Mais si c'est le cas l'égalité précédente signifie simplement

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

C'est cette définition que nous allons utiliser.

Définition ALEA.12.13

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbf{N}}$.

1. **(Indépendance)** On dit que les A_n sont *mutuellement indépendants* (on dit parfois seulement *indépendants*) si

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathscr{N}} A_n\right) = \prod_{n\in\mathscr{N}} \mathbf{P}(A_n)$$

pour toute partie $\mathscr{N}$ finie non vide incluse dans $\mathbf{N}$. Pour deux évènements A, B, on notera $A \perp\!\!\!\perp B$ lorsqu'ils sont indépendants.

2. **(Indépendance deux à deux)** On dit que les A_n sont *indépendants deux à deux* si pour tous $i, j \in \mathbf{N}$, $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$.

En particulier, deux événements A et B sont donc *indépendants* si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Exemple 24 — On tire une carte dans un paquet de 52. L'événement A : «tirer un roi» est indépendant de l'événement B : «tirer un pique». Pourquoi? *En effet $\mathbf{P}(A \cap B)$ est la probabilité de tirer le roi de pique, soit $1/52$, qui est bien égal à $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = (4/52) \times (13/52) = 1/52$.*

Proposition ALEA.12.18 | Propriétés de l'indépendance

Soient $A, B \in \mathscr{T}$. Alors :

1. $A \perp\!\!\!\perp A \implies \mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$.
2. $A \perp\!\!\!\perp B \iff {}^{c}A \perp\!\!\!\perp {}^{c}B$.
3. $A \perp\!\!\!\perp B \implies A \perp\!\!\!\perp {}^{c}B, \quad B \perp\!\!\!\perp {}^{c}A$.
4. **(Généralisation)** Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'évènements deux à deux indépendants (*resp.* mutuellement indépendants), et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une autre famille d'évènements telle que $B_n = A_n$ ou ${}^{c}A_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   Alors : $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'évènements deux à deux indépendants (*resp.* mutuellement indépendants).

Preuve

1.

2.

3.

4. Récurrence sur le nombre d'évènements après avoir choisi une partie finie.

Exemple 25 — On jette deux pièces. Les événements «la première pièce tombe sur pile», «la deuxième pièce tombe sur pile» et «les deux pièces donnent le même résultat» sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

3. VARIABLES ALÉATOIRES

Reprenons notre expérience 1 introductive de lancer de dé. Nous l'avons décrite au moyen d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Un autre point de vue est celui des variables aléatoires : *i.e.* de voir les valeurs d'un lancer de dé comme les valeurs d'une fonction sur un ensemble Ω.

On ne sera donc pas toujours intéressé par le résultat complet d'une expérience aléatoire, *i.e.* les éléments de Ω, mais plutôt par une une fonction de ces derniers. Une telle fonctio sera appelée *variable aléatoire* si la quantité d'intérêt est à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou *vecteur aléatoire* si la quantité est à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$.

3.1. Généralités

En règle générale, puisqu'en 2 ème année les évènements sont les éléments de $\mathscr{T}$ — et pas n'importe quelle partie —– la définition de variable aléatoire sera très légèrement modifiée par rapport à celle de première année.

Définition ALEA.12.14 | Variable aléatoire réelle

Une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est appelée *variable aléatoire réelle* si

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \{X \leqslant a\} \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant a\} \in \mathscr{T}. \tag{VaProp}$$

On appelle *support de* X (ou *univers image de* X) l'ensemble $X(\Omega)$.

Dans Eq. (VaProp) on peut en fait remplacer le symbole « $\leqslant a$ » par n'importe quel intervalle « $\in$ I », comme nous le voyons dans la proposition qui suit.

Proposition ALEA.12.19

Une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire réelle si pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$:

$$\{X \in I\} = \{\omega, X(\omega) \in I\} \in \mathscr{T}.$$

En particulier : pour tout $a \in I$, $\quad \{X = a\} = \{\omega, X(\omega) = a\} \in \mathscr{T}$.

Notation

Généralement, on note plus simplement $\mathbf{P}(X \in I)$ plutôt, qu'en toute rigueur, $\mathbf{P}(\{X \in I\})$.

L'assertion $\{X \leqslant a\} \in \mathscr{T}$ signifie que les probabilités

$$\mathbf{P}(X \leqslant a) \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \mathbf{P}(\{X \leqslant a\})$$

sont bien définies pour tout $a \in \mathbf{R}$ (on rappelle que $\mathbf{P}$ est définie sur $\mathscr{T}$ uniquement).

Malgré la terminologie, une variable aléatoire est avant tout une **application** et pas une « variable » au sens propre du terme.

Remarque 3.1 —

- Notez bien que la notion de variable aléatoire réelle dépend de la tribu sous-jacente $\mathscr{T}$.
- Lorsque $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ (cadre de première année) alors il est immédiat que Eq. (VaProp) est satisfaite pour tout $a \in \mathbf{R}$. En revanche si $\mathscr{T}$ ne contient pas toutes les parties de Ω, ce n'est plus forcément le cas.

Exemple 26 — *Cas discret*

- On lance simultanément deux dés discernables et on choisit comme univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ (*cf.* Chapter ALEA.12), comme tribu celle des parties $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ et que l'on munit de la probabilité uniforme. Cette probabilité décrit l'expérience puisque les dés ne sont pas truqués. Notons alors :
  — X la somme des valeurs des dés,
  — Y le maximum des deux valeurs.
  Que valent $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$?

  Écrire explicitement les applications X et Y mises en jeu.

  Les applications X, Y sont bien des variables aléatoires puisque $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$.
- On tire à pile ou face avec une pièce jusqu'à obtenir pile et on note X le nombre de tirs effectués,

$$\Omega = \{P, FP, FFP, \dots\} \cup \underbrace{\{FFFFF\dots\}}_{\omega 0},$$

auquel on associe la tribu $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$. Mais $X(\omega_0)$ n'aura pas de sens dans ce cas puisqu'X est à valeurs dans $\mathbf{R}$ (et pas dans $\overline{\mathbf{R}}$!).

Exemple 27 — ***Cas réel***

- On considère une ampoule électrique et on note X sa durée de vie.
- On observe deux bactéries et on s'intéresse à la durée de vie T de celle qui disparaîtra la première. On choisit comme univers $\Omega = [0, \infty[\times [0, \infty[$. On admet que

$$T \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & \min(\omega_1, \omega_2) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire relativement à une tribu sur Ω.[12]

Proposition ALEA.12.20 | Structure d'espace vectoriel, opérations

- Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, alors :
  - $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire réelle,
  - XY est une variable aléatoire réelle.

  De plus, l'ensemble des variables aléatoires réelles muni de l'addition et de la multiplication externe des applications est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- **(Minimum/maximum)** Soient $X_1, \ldots, X_n$ une collection de n variables aléatoires réelles, alors :

$$\min(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad \max(X_1, \ldots, X_n)$$

  sont des variables aléatoires réelles.

La preuve qui suit est à bien connaître car nous utiliserons des techniques similaires dans des chapitres ultérieurs.

Preuve Nous admettons **1)**. Nous montrons **2)**.

[12] que l'on ne précisera pas, il s'agit de la plus petite tribu contenant tous les produits d'intervalles ouverts de $[0, \infty[$

3.2. Fonction de répartition & Loi

On reprend dans cette section les précédentes notations, on se donne $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle.

Définition ALEA.12.15 | Loi

On appelle *loi* de la variable aléatoire réelle X, la fonction $\mathbf{P}_X$ qui à un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ associe $\mathbf{P}_X(I)$ définie par

$$\mathbf{P}_X(I) = \mathbf{P}(X \in I).$$

Nous aurons plutôt recours à la fonction ci-après pour étudier une variable aléatoire réelle.

Définition ALEA.12.16 | Fonction de répartition

On appelle *fonction de répartition*[13] de la variable aléatoire réelle X, la fonction $F_X : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ donnée, pour $x \in \mathbf{R}$, par :

$$F_X(x) = \mathbf{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbf{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbf{P}(X \leqslant x),$$

Déterminer la loi d'une variable aléatoire c'est donc trouver avec quelle probabilité elle arrive dans un certain intervalle. Trouver la fonction de répartition c'est déterminer avec quelle probabilité elle est plus petite qu'une certaine valeur.

Remarque 3.2 — Notion de loi dans le cas discret. Dans le cas discret, que nous verrons plus tard, on appellera plutôt loi (ou *fonction de masse*) l'application

$$\mathbf{P}_X : x \in X(\Omega) \longmapsto \mathbf{P}(X = x)$$

Nous verrons que la donnée de la loi, ou de la fonction précédente, sont équivalentes.

Propriétés de la fonction de répartition.

Proposition ALEA.12.21 | Propriétés analytiques

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Alors

1. $0 \leqslant F_X \leqslant 1$,
2. F_X est croissante,
3. F_X est c.à.d.l.a.g. : *i.e.* elle est continue à droite en tout $x \in \mathbf{R}$, *i.e.*

$$F_X(x) = \lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ y > x}} F_X(y),$$

et possède une limite à gauche notée $F_X(x-) \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \lim_{\substack{y \longrightarrow x \\ y<x}} F_X(y)$ en tout $x \in \mathbf{R}$.

4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

[13] *cumulative distribution function* en Anglais

Preuve

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, alors $\{X \leqslant x\} \subset \Omega$, alors par propriété de monotonie de probabilité :

$$\mathbf{F}_X(t) \leqslant \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

2. Soient $x \leqslant y$, alors $\{X \leqslant x\} \subset \{X \leqslant y\}$ donc $\mathbf{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbf{P}(X \leqslant y)$, ce qui montre que F_X est croissante.
3. La fonction F_X possède nécessairement une limite finie à droite et à gauche puisqu'elle est croissante et à valeurs dans $[0,1]$. Nous admettons la continuité à droite.
4. Admise.

Remarque 3.3 — Ces propriétés caractérisent la notion de fonction de répartition au sens suivant : si F_X est une fonction vérifiant les trois propriétés précédentes alors on peut trouver un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P}(X \leqslant x) = F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Plus précisément, si on a seulement la continuité à droite, cela suffit, comme le mentionne le théorème suivant.

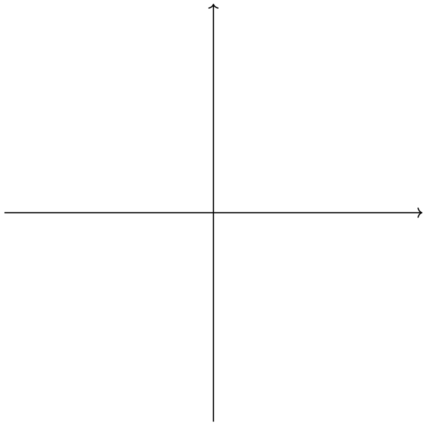
Théorème ALEA.12.3 | Existence d'une variable aléatoire de fonction de répartition fixée

Soit F une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles telle que :

1. F est croissante sur $\mathbf{R}$,
2. $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,
3. F est continue à droite en tout point,

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace tels que $F_X = F$.

Exemple 28 — On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, ..., 6\}$ donnant le résultat du lancé d'un dé à 6 faces. Calculer sa fonction de répartition et la tracer.



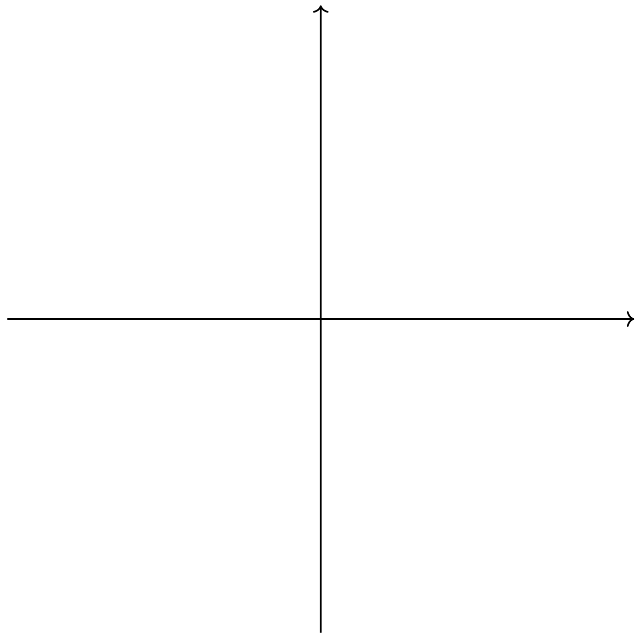
Proposition ALEA.12.22 | Propriétés probabilistes

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Soient $x \leqslant y$ des réels, on a

1. $\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$, la fonction $1 - F_X$ est en général appelée *fonction d'anti-répartition*,
2. $\mathbf{P}(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x)$,
3. $\mathbf{P}(X < x) = F_X(x-)$,
4. $\mathbf{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$. En particulier, F_X est continue en x $\iff$ $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

Lorsque $\mathbf{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, on dit que X est *sans atome*.

Si X n'a pas d'atome, alors la fonction F_X est continue en chaque point. Esquissons à présent le dessin typique d'une fonction de répartition. :



Preuve

1.

2. *Découlent directement de la définition de* F_X*, en écrivant que pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$ *tels que* $x \leqslant y$*,*

$$\{x < X \leqslant y\} = \{X \leqslant y\} \setminus \{X \leqslant x\},$$

on applique ensuite $\mathbf{P}$ *de chaque côté.*

3. Constatons que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$]-\infty; x[=]-\infty; x-1] \biguplus \left(\biguplus_{n=1}^{+\infty} \left] x - \frac{1}{n}; x - \frac{1}{n+1} \right] \right).$$

Cette égalité se prouve par double inclusion. Puis on déduit :

$$\{X \in]-\infty; x[\} = \{X \in]-\infty; x-1]\} \biguplus \biguplus_{n=1}^{+\infty} \left\{ X \in \left] x - \frac{1}{n}; x - \frac{1}{n+1} \right] \right\}.$$

En passant aux probabilités, puisque les réunions sont disjointes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X < x) &= F_X(x-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(X \in \left] x - \frac{1}{n}; x - \frac{1}{n+1} \right] \right), \\
&= F_X(x-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_X\left(\frac{1}{n+1} \right) - F_X\left(\frac{1}{n} \right) \right) \\
&= F_X(x-1) + \lim_{n \longrightarrow \infty} F_X\left(x - \frac{1}{n+1} \right) - F_X(x-1) = F_X(x-).
\end{aligned}$$

téléscopage

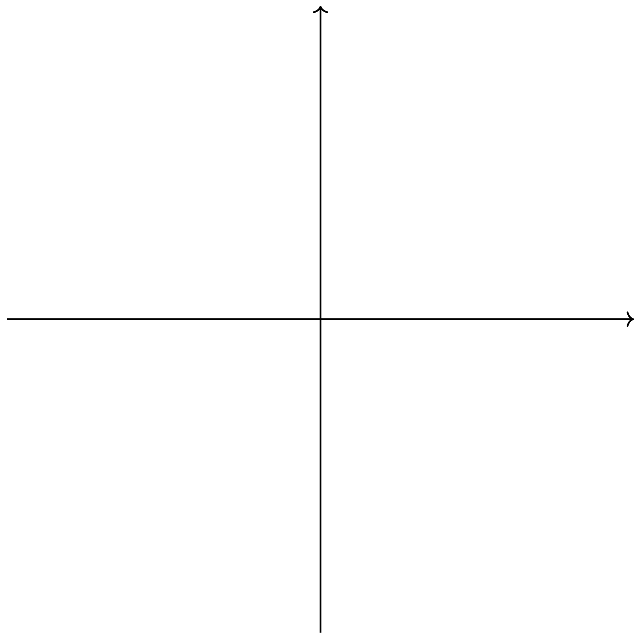
4.

REPRÉSENTATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE PAR HISTOGRAMME.

Définition ALEA.12.17

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On appelle *histogramme* de X de pas $h > 0$ la courbe représentative de la fonction H constante par morceaux, satisfaisant pour tout $i \in \mathbf{Z}$:

$$H : x \in [ih, (i+1)h[\quad \longmapsto \quad \mathbf{P}\left(X \in [ih, (i+1)h[\right).$$



Nous verrons plus tard comment tracer un tel histogramme avec Python, en effectuant des simulations.

ABSENCE DE MÉMOIRE. Pour termine, présentons une propriété qui caractérise deux lois que nous rencontrerons plus tard.

Définition ALEA.12.18 | Absence de mémoire

Une variable aléatoire réelle X est dite *sans mémoire* si :

1. elle est positive ou nulle,
2. pour tout couple $(t,s) \in (\mathbf{R}^{+\star})^2$, on a :
3.

$$\mathbf{P}(X > t+s) = \mathbf{P}(X > s)\mathbf{P}(X > t). \qquad \text{(Abs,Mém)}$$

Avec les mêmes notations que dans la définition, l'Eq. (Abs,Mém) signifie aussi, de manière équivalente, que la fonction de répartition F vérifie la proposition suivante.

Proposition ALEA.12.23 | Reformulation de l'absence de mémoire

Une variable aléatoire réelle X est dite *sans mémoire* si et seulement si elle est positive, et pour tout couple $(t,s) \in (\mathbf{R}^{+\star})^2$, on a :

$$F(t+s) = F(t) + F(s) - F(t)F(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(X > t+s | X > s) = \mathbf{P}(X > t).$$

Preuve

Exemple 29 — Dans des chapitres ultérieures, nous montrerons que les variables ci-après sont à absence de mémoire :

- **(Loi géométrique)** X telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbf{P}\left(X = k\right) = p\cdot(1-p)^{k-1}$ avec $p \in [0,1]$. C'est même la seule loi discrète vérifiant cette propriété.
- **(Loi exponentielle)** X telle que pour tout $a < b$ réels, $\mathbf{P}\left(X \in [a,b]\right) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ avec $\lambda \geqslant 0$. C'est même la seule loi à densité vérifiant cette propriété.

★★★ **Fin du chapitre** ★★★

4. EXERCICES

4.1. Dénombrement

Exercice ALEA.12.2 | Combien le mot BCPST possède-t-il d'anagrammes distinctes ? Le mot CONFINEMENT ?

Solution (exercice ALEA.12.2)

Dans le mot BCPST, il y a 5 lettres distinctes. Ainsi, un anagramme s'identifie à une permutation d'un ensemble à 5 éléments, il y a donc $\boxed{5! \text{ anagrammes.}}$

Pour le mot CONFINEMENT, on a des lettres identiques donc on place les lettres une par une. On a $\binom{11}{3}$ emplacements pour les N, puis $\binom{8}{2}$ emplacements pour les E (on choisit des combinaisons puisque l'ordre n'importe pas pour ces lettres identiques et on ne peut pas mettre deux lettres dans le même emplacement) et enfin 6! possibilités pour les lettres distinctes restantes, soit au total : $\boxed{\binom{11}{3} \times \binom{8}{2} \times 6! \text{ anagrammes.}}$

Exercice ALEA.12.3 | À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former

1. ne contenant que des lettres distinctes ?
2. ne contenant jamais deux lettres identiques consécutives ?

Solution (exercice ALEA.12.3)

1. Cela revient à compter le nombre de n-listes d'éléments distincts dans un ensemble (l'alphabet) de p éléments. Le cours donne alors le cardinal cherché :

$$\begin{cases} \frac{(p-n)!}{n!} & \text{si } n \leqslant p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tout est logique, on peut former de mot avec que des lettres distinctes s'il y a moins de lettres dans l'alphabet que d'emplacements dans le mot.

2. Pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet (p possibilités). Ensuite, pour la suivante, on en a $p-1$ car on ne peut reprendre la même. C'est ensuite le cas pour toutes les autres, on a donc au total $\boxed{p(p-1)^{n-1}}$ mots possibles.

Exercice ALEA.12.4 | Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot « MERCI ». ?

Solution (exercice ALEA.12.4)

Le mot « MERCI » contient 5 lettres. On peut donc placer le « M » en position 1,2,3 ou 4. Une fois « MERCI » placé, il nous reste 4 lettres possibles, avec 26 choix pour chaque donc 26^4 possibilités.

Notons $\mathscr{M}_k$ l'ensemble des mots contenant « MERCI » en position $k \in [\![1\,,\,4]\!]$, et $\mathscr{M}$ l'ensemble des mots. Alors

$$\mathscr{M} = \biguplus_{k=1}^{4} \mathscr{M}_k,$$

donc en passant au cardinal :

$$\#\mathscr{M} = \sum_{k=1}^{4} \#\mathscr{M}_k = \sum_{k=1}^{4} 26^4,$$

ainsi, $\boxed{\#\mathscr{M} = 4 \cdot 26^4.}$

Exercice ALEA.12.5 | Soient n couples qui se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y aura-t-il de poignées de mains échangées ?

Solution (exercice ALEA.12.5)

Il y a ici $2n$ personnes et n couples.

- **(1ère Méthode)** commençons par compter les poignées de main pour le couple 1 : on en a $2n-2$ pour chaque membre du couple donc $2(2n-2)$ pour le couples 1. Ensuite pour le couple deux, on ne reconsidère pas les poignées déjà comptées, on a donc $2(2n-4)$ — c'est simplement le résultat précédent où l'on a remplacé le nombre de couples n par $n-1$ (le couples 1 n'étant plus compté). Donc on obtient finalement

$$2(2n-2)+2(2n-4)+\ldots+2\times 2 = 2^2((n-1)+(n-2)+\cdots+1) = 2^2\frac{n(n-1)}{2} = \boxed{2n(n-1)}.$$

- **(2ème Méthode)** on ne se préoccupe pas des poignées déjà comptées. On a alors $2(2n-2)$ poignées par couple, donc pour n couples au total $2n(2n-2)$ poignées de main. Si l'on ne souhaite pas compter deus fois chaque poignées, on divise simplement le résultat précédent par deux, d'où : $n(2n-2) = \boxed{2n(n-1)}$ au total. On retrouve le précédent.

Exercice ALEA.12.6 | À l'issu d'un concours, 160 candidats sont admis et classés dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

Solution (exercice ALEA.12.6)

On choisit d'abord la composition du classement : 5 filles parmi les 90, soient $\binom{90}{5}$ et 5 garçons parmi les 70, soient $\binom{70}{5}$, ensuite il faut considérer toutes façons de permuter les 10 candidats sélectionnés, donc les permutations d'un ensemble à 10 éléments. Donc au total

$$\boxed{\binom{90}{5}\cdot\binom{70}{5}\cdot 10!.}$$

Exercice ALEA.12.7 | Soit E un ensemble fini de cardinal n et

$$\mathrm{F} = \left\{(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2,\ \#\ (\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 1\right\}.$$

1. Calculer $\#\,\mathrm{F}$ de deux manières différentes.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{n-k}$.

Solution (exercice ALEA.12.7)

1. - On peut commencer par découper F suivant l'élément que constitue l'intersection, *i.e.* en écrivant que

$$\mathrm{F} = \bigcup_{x\in\mathrm{E}} \mathrm{F}_x$$

où $\mathrm{F}_x = \left\{(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{P}(\mathrm{E})^2,\ \mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \{x\}\right\}$, et chercher $\#\,\mathrm{F}_x$ pour tout $x\in\mathrm{E}$. Pour ce calcul, on ne cherche pas à remplir les deux parties A, B mais plutôt on va parcourir les éléments de E sauf x et regarder combien il y a de possibilités d'appartenance. Notons $\mathrm{E} = \{x_1,\ldots,x_{n-1}\}\uplus\{x\}$, avec $x_i \neq x$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n-1]\!]$.
Le nombre de couples de parties $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{F}_x$ est de manière équivalente le nombre de façons de répartir les éléments x entre $\mathrm{A}\backslash\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ et $\mathrm{E}\backslash\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, il y a donc 3 choix possibles pour chaque x_i, donc 3^{n-1} choix possibles au total. Ainsi

$$\#\,\mathrm{F} = \sum_{x\in\mathrm{E}} 3^{n-1} = \boxed{n3^{n-1}}.$$

   - On peut aussi découper F selon le nombre d'éléments dans A (par exemple).

$$\mathrm{F} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$$

où $\mathrm{A}_k = \left\{(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{P}(\mathrm{E})^2,\ \#\ (\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 1,\ \#\,\mathrm{A} = k\right\}$. Pour compter les éléments de A_k, $k\in[\![0\,,\,n]\!]$, on commence par choisir les k éléments de A au total $\binom{n}{k}$ possibilités, puis l'élément de $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ donc k choix possibles, et enfin pour les $n-k$

restants dans E qui ne sont pas dans A cela revient à compter le nombre de parties possibles dans un ensemble à 2^{n-k} éléments donc 2^{n-k} possibilités. Ainsi

$$\# A_k = \binom{n}{k} \cdot k \cdot 2^{n-k}.$$

Ainsi

$$\# F = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot 2^{n-k}}.$$

2. On a donc établi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot 2^{n-k} = n3^{n-1}}.$$

Exercice ALEA.12.8 | Formule de Vandermonde

1. Soient $(a,b,c) \in \mathbf{N}^3$. Donner deux démonstrations de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c},$$

1.1) en développant de deux manières $(1+X)^a(1+X)^b$,

1.2) en calculant de deux manières le nombre de parties de cardinal c dans $E \cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b respectivement.

2. (Applications) Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.

Solution (exercice ALEA.12.8)

1. 1.1)
- D'une part, on peut utiliser les règles usuelles sur les puissances.

$$\begin{aligned}(1+X)^a(1+X)^b &= (1+X)^{a+b} \\ &= \sum_{c=0}^{a+b}\binom{a+b}{c}X^c.\end{aligned}$$

formule du binôme

- Deuxième calcul :

$$\begin{aligned}(1+X)^a(1+X)^b &= \left(\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}X^k\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}X^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{a}\sum_{j=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{j}X^{k+j} \\ &= \sum_{c=0}^{a+b}\left[\sum_{k=0}^{c}\binom{a}{k}\binom{b}{c-k}\right]X^c.\end{aligned}$$

réecriture de la somme

Il reste à identifier les coefficients de ces deux polynômes, les coefficients devant X^c donnent le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{c}\binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}}.$$

1.2) Découpons les parties à c éléments de $E \uplus F$ de cardinal c, noté $\mathscr{P}_c(E \uplus F)$, en fonction du nombre d'éléments dans E. Plus précisément, on pose

$$\mathscr{P}_c(E \uplus F) = \biguplus_{k=0}^{c} E_k, \quad E_c = \{A \in \mathscr{P}_c(E \uplus F),\ \#(A \cap E) = k\}.$$

Pour définir $A \in E_k$, on choisit donc k éléments dans E puis $c-k$ dans F, donc au total

$$\# E_c = \binom{a}{k}\binom{b}{c-k}.$$

Donc en passant au cardinal on obtient

$$\binom{a+b}{c} = \#\left(\mathscr{P}_c(E \uplus F)\right) = \sum_{k=0}^{c} \# E_k = \sum_{k=0}^{c}\binom{a}{k}\binom{b}{c-k}.$$

On a donc établi de nouveau que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}}.$$

2. Il suffit de choisir $a = n, b = n, c = n$. On obtient

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}}.$$

4.2. Espaces probabilisés

4.2.1. Généralités

Exercice ALEA.12.9 | **Deux probabilités sur** $\{1,\dots,n\}$ Soit $\Omega = \{1,2,\dots,n\}$.

1. Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\mathbf{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k.
2. Déterminer une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\mathbf{P}(\{1,2,\dots,k\})$ soit proportionnel à k^2.

Solution (exercice ALEA.12.9)

1. Une condition nécessaire et suffisante est la suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{k\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$
Notons $\lambda \in \mathbf{R}^+$ de sorte que $\mathbf{P}(\{k\}) = \lambda \cdot k$. Alors
$$\lambda \sum_{k=1}^{n} k = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{n(n+1)}.$$
Donc
$$\boxed{\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \mathbf{P}(\{k\}) = \frac{2k}{n(n+1)}}.$$
2. Une condition nécessaire et suffisante est la suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{k\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$
Or, pour tout $k \geqslant 2$,
$$\mathbf{P}(\{k\}) = \mathbf{P}(\{1,2,\dots,k\}) - \mathbf{P}(\{1,2,\dots,k-1\}).$$
Notons $\lambda \in \mathbf{R}^+$ de sorte que $\mathbf{P}(\{1,2,\dots,k\}) = \lambda \cdot k$. Alors
$$\lambda \sum_{k=2}^{n} \lambda(k-(k-1)) + \lambda 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{n}.$$
Donc
$$\boxed{\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \mathbf{P}(\{k\}) = \frac{k}{n}}.$$

Exercice ALEA.12.10 | **L'équiprobabilité sur N existe-t-elle ?** Peut-on choisir un entier naturel au hasard de manière équiprobable ?

Solution (exercice ALEA.12.10)

Si une telle probabilité existait, alors $\mathbf{P}(\{n\}) = p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ avec $p \in [0,1]$. Donc par additivité dénombrable, on aurait $\mathbf{P}(\mathbf{N}) = \sum_{n\in\mathbf{N}} p = 1$. Si $p = 0$, alors c'est déjà une contradiction. Sinon $p \neq 0$, et par le cours sur les séries, on sait bien que $\sum_{n\in\mathbf{N}} p$ diverge — c'est là encore une contradiction.

$\boxed{\text{Il n'existe donc pas d'équiprobabilité sur } \mathbf{N}.}$

Exercice ALEA.12.11 |

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$.
2. Soient $A_1, ..., A_n$ des évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\right)$.

Solution (exercice ALEA.12.11)

1. Simple étude de fonction pour $x \longmapsto e^x - 1 - x$.
2. On souhaite donc majorer la probabilité $\mathbf{P}(A_1^c \cap ... \cap A_n^c)$. Comme $A_1, ..., A_n$ sont indépendants, les évènements $A_1^c, ..., A_n^c$ le sont aussi (pour le voir : commencer avec $n = 2$ et cela s'étend ensuite par réccurence). Donc : $\mathbf{P}(A_1^c \cap ... \cap A_n^c) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(A_k))$. Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1 - x \leqslant e^{-x}$ d'après la question précédente. L'inégalité découle alors en faisant le produit puisque tous les termes sont positifs.

4.2.2. Expériences aléatoires

Exercice ALEA.12.12 | **Roulette russe** Un revolver à 6 coups contient une seule balle mais on ne sait pas à quel endroit du barillet. Le premier joueur place le revolver sur sa tempe et presse la gâchette. S'il survit le deuxième joueur fait de même. Vaut-il mieux jouer en premier ou en second ? La taille du barillet importe-t-elle ?

Solution (exercice ALEA.12.12)

Notons B_k l'évènement « on se prend la balle en jouant à la partie k ». Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_1) &= \frac{1}{6}, \\
\mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}(B_2 \cap {}^{C}B_1) \\
&= \mathbf{P}(B_2 | {}^{C}B_1)\, \mathbf{P}({}^{C}B_1) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de raison de jouer en premier ou en deuxième. Cela est intuitivement clair, puisque certes avec un barillet entièrement vierge on a qu'une chance sur 6 de mourir (1 chance sur 5 après un essai), mais en jouant en deuxième on est avantagé par le fait que le premier joueur prend un risque avant nous. *In fine*, en probabilité, le jeu est équilibré.

Le barillet n'a aucune incidence sur la conclusions, s'il comporte $N \geqslant 1$ balles, nous aurions

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_1) &= \frac{1}{N}, \\
\mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}(B_2 \cap {}^{C}B_1) \\
&= \mathbf{P}(B_2 | {}^{C}B_1)\, \mathbf{P}({}^{C}B_1) \\
&= \frac{1}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

La conclusion est toujours la même :

$$\boxed{\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2)}.$$

Exercice ALEA.12.13 | **Indice de coïncidence d'un texte** L'indice de coïncidence I_c d'un texte est la probabilité pour que, si on prenne deux lettres au hasard dans ce texte, ce soient les mêmes. On note $n_A, \dots, n_Z$ le nombre de $A, \dots, Z$ dans le texte, et n le nombre total de lettres. Montrer que :

$$I_c = \frac{n_A \times (n_A - 1)}{n \times (n-1)} + + \cdots + \frac{n_Z \times (n_Z - 1)}{n \times (n-1)}.$$

Cet indice est très utilisé en cryptographie, notamment dans celui de VIGENÈRE *qui effectue des décalages par blocs de lettres. Le calcul de l'indice permet alors de trouver assez facilement la longueur des blocs ayant permis le codage en testant les possibilités, et en comparant à l'indice de coincidence de la langue française.*

Solution (exercice ALEA.12.13)

L'expérience aléatoire consiste ici à piocher deux lettres dans le texte, au hasard. L'univers Ω est l'ensemble des parties à deux éléments formées par les n lettres du texte. On munit Ω de la probabilité uniforme, sachant que $\#\,\Omega = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Notons $\mathscr{A} = \{A, B, \dots, Z\}$ l'alphabet, E «deux lettres choisies au hasard dans le texte sont les mêmes» et, pour chaque lettre $a \in \mathscr{A}$, E_a «deux lettres choisies au hasard dans le texte sont les mêmes et sont des a». Alors $(E_a)_{a\in\mathscr{A}}$ forme un système complet d'évènements, et donc

$$I_c = \mathbf{P}(E) = \sum_{a\in\mathscr{A}} \mathbf{P}(E_a) = \sum_{a\in\mathscr{A}} \frac{\#\,E_a}{\#\,\Omega} = \sum_{a\in\mathscr{A}} \frac{\binom{n_a}{2}}{\binom{n}{2}} = \sum_{a\in\mathscr{A}} \frac{\frac{n_a(n_a-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{I_c = \frac{n_A \times (n_A - 1)}{n \times (n-1)} + \frac{n_B \times (n_B - 1)}{n \times (n-1)} + \frac{n_C \times (n_C - 1)}{n \times (n-1)} + \cdots + \frac{n_Z \times (n_Z - 1)}{n \times (n-1)}}.$$

Exercice ALEA.12.14 | **Relectures d'un livre pour la détection d'erreurs** Un livre contient 4 erreurs. On le confie à N lecteurs différents, indépendants entre eux, pour détecter ces erreurs; pour chaque lecteur, chaque erreur est détectée, indépendamment des autres erreurs, avec une probabilité $1/3$.

1. On note p_N la probabilité probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur après N lectures. Calculer p_N en fonction de N.
2. Déterminer, à l'aide de commandes Python, le nombre de relectures nécessaires pour que la probabilité qu'elles soient toutes corrigées soit supérieure à $0,90$.
3. On suppose que le nombre x d'erreurs est réparti uniformément sur $\{0,1,2,3,4\}$.
   3.1) Calculer à nouveau p_N en fonction de N.
   3.2) Calculer la limite de cette probabilité lorsque $N \longrightarrow \infty$. Cela est-il cohérent ?

Solution (exercice ALEA.12.14)

1. Notons par exemple A, B, C, D les quatre erreurs et A_n, B_n, C_n, D_n les évènements «l'erreur A, B, C ou D n'est pas corrigée au bout de n lectures». On a : $\mathbf{P}(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puisque les lectures réalisées de manière indépendantes.
Si l'on ne souhaite pas passer à l'évènement complémentaire, on peut aussi regarder la probabilité de «l'erreur A *est corrigée en* n *lectures» qui est*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3}^{k-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \frac{1 - (2/3)^n}{1 - 2/3} = 1 - (2/3)^n.$$

On retrouve bien l'expression précédente, la somme est obtenue en écrivant Ω *comme réunion des évènements «l'erreur* A *est corrigée à la première lecture», «l'erreur* A *est corrigée à la seconde lecture»,$\cdots$,«l'erreur* A *est corrigée à la* n*-ième lecture».* Comme les lectures se font de manière indépendante, la probabilité demandée est :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(^{c}A_n \cap {}^{c}B_n \cap {}^{c}C_n \cap {}^{c}D_n) \\ &= \mathbf{P}(^{c}A_n) \times \mathbf{P}(^{c}B_n) \times \mathbf{P}(^{c}C_n) \times \mathbf{P}(^{c}D_n) \\ &= \boxed{(1-(2/3)^n)^4.}\end{aligned}$$

2. Dans ce cas on ne connaît plus le nombre d'erreurs, mais la question précédente s'étend sans peine à k erreurs avec $k \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) = \boxed{(1-(2/3)^n)^k},$$

où E_i est l'évènement «l'erreur i n'est pas corrigée en n lectures». Ainsi, en conditionnant suivant le nombre d'erreurs entre 0 et 4 on a la probabilité cherchée :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\text{tout est corrigée en } n \text{ lectures}\})\\
&= \sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(\{\text{tout est corrigée en } n \text{ lectures}\} \mid \mathrm{N}_k)\mathbf{P}(\mathrm{N}_k)\\
&= \sum_{k=0}^{4} (1-(2/3)^n)^k \frac{1}{5}\\
&= \boxed{\frac{5^n}{5.2^n}\left[1-(1-(2/3)^n)^5\right]}
\end{aligned}$$

où N_k est l'évènement «il y a k erreurs», qui est bien non négligeable pour tout k, et en utilisant la formule donnant la somme de premiers termes d'une suite géométrique.

Exercice ALEA.12.15 | Une urne contient six boules dont 4 blanches et 2 noires. On extrait une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On effectue ensuite des tirages avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule de la même couleur que précédemment. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la probabilité que le nombre de tirage après remise de la boule initialement tirée soit k.

Solution (exercice ALEA.12.15)

Ici, on a besoin de faire une disjonction de cas suivant le résultat du premier lancer. La formule des probabilités totales est donc bien adaptée.

Notons N_k l'évènement «le tirage k mène à une boule noire» pour $k \geqslant 0$. Le tirage 0 étant considéré comme le tirage initial sur lequel est basée l'expérience aléatoire. Notons T_n l'évènement «il y a $n \geqslant 1$ tirages après le tirage 0». Alors, puisque $(\mathrm{N}_0, {}^{\complement}\mathrm{N}_0)$ est un système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{T}_n) &= \mathbf{P}(\mathrm{T}_n|\mathrm{N}_0)\,\mathbf{P}(\mathrm{N}_0) + \mathbf{P}(\mathrm{T}_n|{}^{\complement}\mathrm{N}_0)\,\mathbf{P}({}^{\complement}\mathrm{N}_0)\\
&= \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{2}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{6}\right)\cdot\frac{4}{6}\\
&= \frac{2^{n+2}+2^{n+1}}{6^{n+1}}\\
&= \boxed{\frac{3\cdot 2^{n+1}}{6^{n+1}}.}
\end{aligned}$$

Exercice ALEA.12.16 | **Urne à composition variable** Soient $n, b \in \mathbf{N}^\star$. On dispose d'une urne contenant initialement deux boules blanches et deux boules noires dans laquelle on effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si la boule tirée est noire, on arrête les tirages. Si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avec en plus b autres boues blanches. On note N_k «obtenir une boule noire lors du $k^{\text{ème}}$ tirage», A_n l'évènement «une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages» et F «ne jamais obtenir de boules noires». L'objectif de l'exercice est de montrer que l'évènement F est négligeable.

1. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{N}_n)$ et montrer que $\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{kb+2}{kb+4}$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Supposons ici que $b = 1$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}_n)$. Conclure.
3. Nous allons généraliser ce résultat à b quelconque dans la suite.
   - **3.1)** Établir que $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k$ pour toute famille $x_1, \dots, x_n$ de réels positifs.
   - **3.2)** Établir une minoration de $\frac{1}{\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, et montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_n) = 0$.
   - **3.3)** En utilisant le fait que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_m$, calculer
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right).$$
   - **3.4)** Conclure.

Solution (exercice ALEA.12.16)

1. On utilisera deux fois la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{N}_n) &= \mathbf{P}\left(\mathrm{N}_n \cap {}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_{n-1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_1\right)\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{N}_n | {}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_{n-1} \cap \cdots \cap {}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_1) \times \mathbf{P}({}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_{n-1} | {}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_{n-2} \cap \cdots \cap {}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_1) \times \cdots \times \mathbf{P}({}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_2 | {}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_1)\,\mathbf{P}({}^{\mathrm{C}}\mathrm{N}_1)\\ &= \frac{2}{4+(n-1)b} \cdot \frac{2+(n-2)b}{4+(n-2)b} \cdot \cdots \cdot \frac{2+b}{4+b}\frac{2}{4}\\ &= \boxed{\frac{2}{4+(n-1)b} \cdot \prod_{k=0}^{n-2} \frac{2+kb}{4+kb}}.\end{aligned}$$

De-même :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) &= \frac{2+(n-1)b}{4+(n-1)b} \cdot \cdots \cdot \frac{2+b}{4+b}\frac{2}{4}\\ &= \boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{kb+2}{kb+4}}.\end{aligned}$$

2. Supposons ici que $b = 1$. On a dans ce cas

$$\mathbf{P}(\mathrm{N}_n) = \frac{2}{n-3} \cdot \prod_{k=0}^{n-2} \frac{2+k}{4+k} = \frac{12n!}{(n+3)!} = \boxed{\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}}.$$

On cherche ensuite a, b, c trois réels tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}.$$

Après calculs on trouve $a = 1/2, b = -1, c = 1/2$, donc

$$\begin{aligned}&\forall \mathrm{N} \in \mathbf{N}^\star, \quad \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{P}(\mathrm{N}_n)\\ &= 6\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\\ &= 6\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right)\right)\\ &\xrightarrow[]{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} 1.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}_n) = 1.}$

Donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{N}_n$ est un évènement quasi-certain, de complémentaire F, donc

$\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{F}) = 0}$.

3. Nous allons généraliser ce résultat à b quelconque dans la suite.

3.1) Faisons une récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour $n = 1$, on a bien $1 + x_1 \geqslant x_1$. Supposons la propriété vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)(1+x_{n+1})\\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) + x_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k.\end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

HR + produit de réels ⩾ 1

La propriété est donc établie par récurrence. On a donc

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k}$$

pour toute famille $x_1, \cdots, x_n$ de réels positifs.

3.2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)} &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{kb+4}{kb+2}\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{kb+2}\right)\\ &\geqslant \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{kb+2}}.\end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{kb+2} = \infty$ puisque la série harmonique est divergente.

Donc $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0.}$

3.3) On a pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_m$, donc par monotonie d'une probabilité

$$0 \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \mathbf{P}(\mathrm{A}_m) \xrightarrow[]{m\longrightarrow\infty} 0.$$

Donc par théorème d'encadrement, et puisque le minorant ne dépendant pas de m, on déduit

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = 0}.$$

3.4) Nous avons

$$\mathrm{F} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n.$$

On déduit alors $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{F}) = 0}$. En d'autres termes, l'évènement «ne jamais obtenir de noir» est négligeable.

Exercice ALEA.12.17 | **Propagation d'un message** On considère n «menteurs» $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_n$. Le premier menteur I_1 reçoit une information sous la forme de «oui» ou «non». Il transmet l'information à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n qui l'annonce au monde. Chacun des menteurs transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p et le contraire avec la probabilité $1-p$ où $0 < p < 1$. De plus, les réponses des n individus sont indépendantes.

1. Soient $n \in \mathbf{N}$ et p_n la probabilité que l'information possédée par le menteur n soit correcte *i.e.* celle d'origine. Déterminer une relation liant p_n et p_{n+1}.
2. En déduire la valeur de p_n et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Solution (exercice ALEA.12.17)

1. Notons C_n l'évènement «l'information possédée par le menteur n est correcte», *i.e.* $\mathbf{P}(\mathrm{C}_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors, puisque $\{\mathrm{C}_n, {}^{\mathrm{c}}\mathrm{C}_n\}$ est un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{C}_{n+1}) &= \mathbf{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\,\mathbf{P}(\mathrm{C}_n) + \mathbf{P}(\mathrm{C}_{n+1}|{}^{\mathrm{c}}\mathrm{C}_n)\,\mathbf{P}({}^{\mathrm{c}}\mathrm{C}_n)\\ &= pp_n + (1-p)(1-p_n)\\ &= \boxed{p_n(2p-1) + (1-p).}\end{aligned}$$
2. La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. Deux cas se présentent.
   - Si $p = 1$, alors $p_{n+1} = p_n = p_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc $\boxed{p_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 1.}$ L'information est donc presque-sûrement correctement transmise.
   - Si $p \neq 1$, cherchons $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$ de sorte que
   $$\mathrm{C} = (2p-1)\mathrm{C} + (1-p) \iff \mathrm{C} = \frac{1-p}{2(1-p)} = \frac{1}{2}.$$
   Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
   $$p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) = (2p-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}.$$
   Donc :
   $$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}.$$
   Puisque $p \neq 1$, $(2p-1)^{n-1} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$ et donc $\boxed{p_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}}$. Il y a donc une chance sur deux qu'elle soit bien transmise.

Exercice ALEA.12.18 | Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume le jour n.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

1. Chercher une relation de récurrence sur la suite (p_n).
2. Exprimer p_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Déterminer $\lim_{n \to \infty} p_n$.

Solution (exercice ALEA.12.18)

1. Notons F_n l'évènement « fume le jour n ». Alors puisque $(\mathrm{F}_n, {}^{\mathrm{C}}\mathrm{F}_n)$ est un système complet d'évènements pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{F}_{n+1}) &= \mathbf{P}(\mathrm{F}_{n+1} | \mathrm{F}_n)\,\mathbf{P}(\mathrm{F}_n) + \mathbf{P}(\mathrm{F}_{n+1} | {}^{\mathrm{C}}\mathrm{F}_n)\,\mathbf{P}({}^{\mathrm{C}}\mathrm{F}_n) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) \\ &= \frac{3}{4} p_n - \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}.}\end{aligned}$$

2. Cherchons $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$ de sorte que

$$\mathrm{C} = \frac{1}{4}\mathrm{C} + \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{C} = \frac{2}{3}.$$

Alors $(p_n - \mathrm{C})$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$, et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad p_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4^{n-1}}\left(p_1 - \frac{2}{3}\right),$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{4^{n-1}}\left(p_1 - \frac{2}{3}\right)}.$$

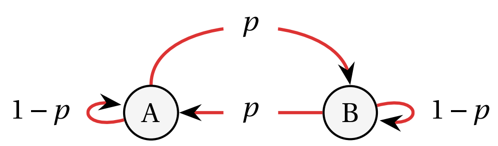
3. On déduit $\boxed{p_n \xrightarrow[]{n \to \infty} \frac{2}{3}}$. Il y a deux chances sur 3 qu'il continue à fumer lorsque le nombre de jours grandit.

Exercice ALEA.12.19 | **Relation vectorielle en dimension 2** Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n » et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$ et $b_n = \mathbf{P}(\mathrm{B}_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Déterminer les expressions explicites de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.
3. Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.

Solution (exercice ALEA.12.19)

On peut représenter les transitions sur un graphe de sommets les noms de fleurs.



1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors constatons que $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n)$ forme un système complet d'évènements. Donc par formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \mathbf{P}(\mathrm{A}_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{A}_{n+1} | \mathrm{A}_n)\,\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbf{P}(\mathrm{A}_{n+1} | \mathrm{B}_n)\,\mathbf{P}(\mathrm{B}_n) \\ &= \boxed{(1-p)\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) + p\mathbf{P}(\mathrm{B}_n)} \\ b_{n+1} &= \mathbf{P}(\mathrm{B}_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{B}_{n+1} | \mathrm{A}_n)\,\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbf{P}(\mathrm{B}_{n+1} | \mathrm{B}_n)\,\mathbf{P}(\mathrm{B}_n) \\ &= \boxed{p\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) + (1-p)\mathbf{P}(\mathrm{B}_n)}.\end{aligned}$$

2. Il s'agit ici de deux suites récurrentes linéaires imbriquées, on passe donc par des matrices. Notons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$X_{n+1} = AX_n, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Diagonalisons la matrice A. Puisque la somme sur chaque ligne est constante égale à 1, on sait que $1 \in \operatorname{Spec} A$ et $\lambda = 1$ est une valeur propre dont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-p-\lambda & p \\ p & 1-p-\lambda \end{pmatrix} & \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} p & 1-p-\lambda \\ 1-p-\lambda & p \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} p & 1-p-\lambda \\ 0 & p^2-(1-p-\lambda)^2 \end{pmatrix}. && L_2 \leftarrow pL_2 - (1-p-\lambda)L_1 \end{aligned}$$

De plus, $p^2-(1-p-\lambda)^2 = (p-1+p+\lambda)(1-\lambda) = (2p-1+\lambda)(1-\lambda)$. Donc $\operatorname{Spec} A = \{1, 1-2p\}$. Mais $1-2p = 1 \iff p = 1$ ce qui est exclu, donc A possède donc bien deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. De plus, les deux espaces propres sont de dimension 1. Et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{1-2p}(A)$ si et seulement si

$$px + (1-p-1+2p)y = 0 \iff x + y = 0,$$

donc $E_{1-2p}(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1-2p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Ensuite, notons $Y_n = P^{-1}X_n$. Alors $Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}PDP^{-1}X_n$. Donc $Y_{n+1} = DY_n$. Si on note $Y_n = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \end{pmatrix}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a'_{n+1} = (1-2p)a'_n, \quad b'_{n+1} = b'_n.$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a'_n = (1-2p)^n a'_0, \quad b'_n = b'_0.$$

Mais $a_0 = 1, b_0 = 0$ donc

$$Y_0 = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On déduit que

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-2p)^n \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-2p)^n + 1 \\ -(1-2p)^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Or $|1-2p| < 1$ donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}}$.
Finalement, en temps long, cela revient à considérer que l'abeille choisit chaque fleur de manière équiprobable! Ceci n'est pas surprenant puisque les transitions $A \to B$ et $B \to A$ ne privilégie pas une fleur plutôt que l'autre.

Exercice ALEA.12.20 | **Relation vectorielle en dimension 3** Dans tout l'énoncé p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et $q = 1-p$. Sur une table sont placées deux boules noires (étape 0), puis une des deux boules est choisie au hasard et éliminée de la table. Ensuite on repose sur la table (étape 1) :

- soit une boule blanche, avec la probabilité p,
- soit une boule noire, avec la probabilité q.

Cette action est répétée ainsi indéfiniment, de sorte qu'à la $k \in \mathbf{N}$-ième itération de l'expérience, deux boules sont sur la table :

- soit deux noires (événement noté NN_k),
- soit une noire et une blanche (événement noté NB_k),

- soit deux blanches (événement noté BB_k).

Pour $k \in \mathbf{N}$, on note également $a_k = \mathbf{P}(NN_k)$, $b_k = \mathbf{P}(NB_k)$, $c_k = \mathbf{P}(BB_k)$, et on définit les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} q & q/2 & 0 \\ p & 1/2 & q \\ 0 & p/2 & p \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix},$$

$$U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. **1.1)** Calculer les produits PD, MP. Que dire de MP − PD ?
1.2) En déduire que M est diagonalisable.

2. **2.1)** Donner a_0, b_0, c_0. Justifier $a_1 = q$, $b_1 = p$ et $c_1 = 0$.
2.2) Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $U_{k+1} = MU_k$.

3. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$:

$$U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. En déduire pour tout entier naturel $k \in \mathbf{N}^\star$, a_k, b_k, c_k en fonction de k et montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = q^2, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 2pq, \qquad \lim_{k\to+\infty} c_k = p^2.$$

5. Interpréter.

Solution (exercice ALEA.12.20)

1. **1.1)** On a

$$P\cdot D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{2} & q^2 \\ 0 & \frac{-p+q}{2} & 2pq \\ 0 & \frac{-p}{2} & p^2 \end{pmatrix}, \quad M\cdot P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{2}(q+p) & q^2(q+p) \\ p+q-1 & \frac{-p+q}{2} & pq(q+p+1) \\ 0 & -\frac{p}{2}(q+p) & p^2(p+q) \end{pmatrix}.$$

En utilisant la relation $p+q=1$, on déduit que $P\cdot D = M\cdot P$. On a donc obtenu que $\boxed{MP - PD = 0}$.

1.2) Donc puisque P est inversible, on a obtenu :

$$\boxed{M = PDP^{-1}}.$$

Donc M est diagonalisable, et $\text{Spec}(M) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

2. **2.1)** On a $\boxed{a_0 = \mathbf{P}(NN_0) = 1}$ car $NN_0 = \Omega$, et $\boxed{b_0 = c_0 = 0}$. Pour a_1, étant donné qu'il y a forcément deux boules noires au temps zéro, la probabilité d'avoir deux noires au temps 1 est celle de l'ajout d'une boule noire à la première étape, donc q.

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{P}(NN_1) = q \\ c_1 &= \mathbf{P}(BB_1) = 0, \quad (BB_1 = \varnothing) \\ b_1 &= 1 - a_1 - c_1 \\ &= 1 - q = p. \end{aligned}$$

2.2) Soit k un entier non nul. Le système (NN_k, NB_k, BB_k) est un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales, on a (on donne les explications pour la première ligne uniquement pour alléger la rédaction) :

$$\mathbf{P}(\mathrm{NN}_{k+1})$$
$$= \mathbf{P}(\mathrm{NN}_{k+1}|\mathrm{NN}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{NN}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{NN}_{k+1}|\mathrm{NB}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{NB}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{NN}_{k+1}|\mathrm{BB}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{BB}_k)$$
$$= \underbrace{\boxed{q}}_{\text{pioche une N puis rempl. par N}}\mathbf{P}(\mathrm{NN}_k) + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\cdot q}}_{\text{pioche B puis rempl. par N}} + 0\cdot\mathbf{P}(\mathrm{BB}_k)$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{NB}_{k+1})$$
$$= \mathbf{P}(\mathrm{NB}_{k+1}|\mathrm{NN}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{NN}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{NB}_{k+1}|\mathrm{NB}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{NB}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{NB}_{k+1}|\mathrm{BB}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{BB}_k)$$
$$= p.\mathbf{P}(\mathrm{NN}_k) + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\cdot q + \frac{1}{2}\cdot p}}_{\text{pioche B puis rempl. par B ou pioche N puis rempl. par B}}\mathbf{P}(\mathrm{NB}_k)$$
$$+ q\cdot\mathbf{P}(\mathrm{BB}_k)$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{BB}_{k+1})$$
$$= \mathbf{P}(\mathrm{BB}_{k+1}|\mathrm{NN}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{NN}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{BB}_{k+1}|\mathrm{NB}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{NB}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{BB}_{k+1}|\mathrm{BB}_k)\,\mathbf{P}(\mathrm{BB}_k)$$
$$= 0.\mathbf{P}(\mathrm{NN}_k) + \frac{p}{2}\cdot\mathbf{P}(\mathrm{NB}_k) + p\cdot\mathbf{P}(\mathrm{BB}_k).$$

Les trois relations forment alors la relation matricielle

$$\boxed{\mathrm{U}_{k+1} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{U}_k}.$$

3. Pour $k = 1$, on a $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$. D'autre part

$$\mathrm{PD}\begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La relation est donc initialisée pour $k = 1$. Supposons-là vraie au rang k, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{k+1} &= \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{U}_k \\ &= \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^k\begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= \mathrm{PD}^{k+1}\begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, on déduit que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$:

$$\boxed{\mathrm{U}_k = \mathrm{PD}^k\begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

4. Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$\mathrm{U}_k = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\left(\frac{p}{2^{k-1}}\right) \\ 2p\left(\frac{p-q}{2^k} + q\right) \\ p^2\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \end{pmatrix}.$$

Donc en faisant $k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ dans chaque coordonnée, on obtient

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} a_k = q^2, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 2pq, \qquad \lim_{k\to+\infty} c_k = p^2}.$$

5. Quand on attend suffisamment longtemps, on a donc une probabilité q^2 d'avoir deux boules noires, $2pq$ d'avoir une noire et une boule blanche et p^2 d'avoir deux boules blanches. Ces probabilités correspondent à celle d'obtenir les configurations BB, NB, NN lorsque l'on fait deux tirages successifs dans un ensemble où la probabilité d'obtenir une noire est q et celle d'obtenir une blanche p.