Chapitre ANA.10.

Séries Numériques

Résumé & Plan

L'objectif principal de ce chapitre est de donner un sens à la notion de somme infinie, que nous allons définir comme une limite, en cas d'existence.
Nous allons donc étudier des suites particulières, que l'on appelle «série», *i.e.* les suites dont le terme général d'indice $n \in \mathbf{N}$ est la somme de $n+1$ termes d'une suite numérique. Ces suites apparaissent naturellement dans bon nombre de problèmes en Mathématiques; de la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, en passant par les calculs d'espérances de variable aléatoire discrètes à support dénombrable. Bref, une théorie générale s'impose.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{90}$$

— Le saviez-vous ?

Cadre

Dans toute la suite, nous c)onsidèrerons des suites définies sur N : il convient d'adapter les notions pour des suites définies à partir d'un certain rang.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions

Définition ANA.10.1 | Somme partielle

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On lui associe une nouvelle **suite** (S_n) en posant :

$$\forall n \geqslant 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- La **suite** (S_n) s'appelle la *série de terme général* u_n, et on la note généralement $(\sum u_n)$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors le **réel** S_n est appelé la *somme partielle d'ordre* n.

Définition ANA.10.2 | Série convergente/divergente

- On dit qu'une série $(\sum u_n)$ *converge*, ou encore que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge*, si la suite des sommes partielles (S_n) converge, *i.e.* si et seulement s'il existe $S \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{n \to \infty} S.$$

- La limite S est alors appelée la *somme de la série*, et on la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On dit qu'une série *diverge* si elle ne converge pas.
- *Déterminer la nature d'une série* c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Attention

Il faut prendre du recul sur l'expression « $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ». Car en écrivant $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ on suppose déjà l'existence d'une limite (et donc la convergence). C'est donc un abus de langage, mais cependant très utilisé y compris pour les intégrales généralisées que nous verrons dans le Chapter ANA.11 : je l'utiliserai donc aussi.

Conjecture de la nature d'une série par tracé

Généralement, pour conjecturer la nature d'une série avec Python, on trace par exemple la suite des sommes partielles en fonction de $n \in \mathbf{N}$. On constate, avec les notations de la définition précédente, que (S_n) vérifie une relation de récurrence simple :

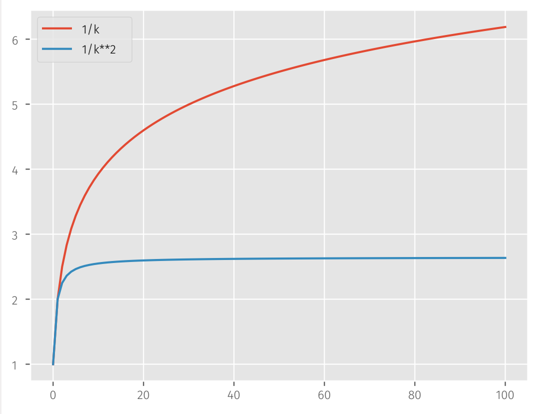
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_{n+1} = S_n + u_{n+1}.$$

On peut donc construire facilement la liste $[S_0, \dots, S_n]$. Voyons deux exemples, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = 100
S_1 = 1
L_1 = [S_1]
S_2 = 1
L_2 = [S_2]
for k in range(1, n+1):
    S_1 += 1/k
    S_2 += 1/k**2
    L_1.append(S_1)
    L_2.append(S_2)
plt.plot(L_1, label='1/k')
plt.plot(L_2, label='1/k**2')
plt.legend()
```

On peut ensuite tracer.



Définition ANA.10.3 | Reste d'ordre n

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, on appelle *suite des restes partiels*, la suite (R_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \left(= \lim_{\mathrm{N} \longrightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} u_k \right).$$

Proposition ANA.10.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $n_0 \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \text{ converge.}$$

Remarque 1.1 — La nature d'une série ne dépend donc que du comportement de u_n lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Preuve Précisons les deux membres de l'équivalence.

- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\longrightarrow\infty} (u_0 + \cdots + u_n)$ converge.
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(u_{n_0} + \cdots + u_n\right)$ converge.

Proposition ANA.10.2 | Condition nécessaire de convergence sur le reste

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, on a pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad \mathrm{S} = \mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n$. En particulier,

$$\mathrm{R}_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0.$$

Preuve

SÉRIE DE FORME TÉLÉSCOPIQUE. On s'intéresse ici aux séries dont la somme partielle est une somme téléscopique, *i.e.* avec un terme général de la forme $u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Proposition ANA.10.3 | Série téléscopique

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Alors :

$$(u_n) \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) \quad \text{converge.}$$

Preuve

Méthode — Série quasi-téléscopique

Lorsque le terme général d'une série est de la forme $u_{n+p} - u_n$, avec $p \in \mathbf{N}$ fixé, alors on se ramène à une série téléscopique en écrivant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+p} - u_n = \left(u_{n+p} - u_{n+p-1}\right) + \cdots + \left(u_{n+1} - u_n\right).$$

Chacune des séries intervenant est alors téléscopique.

Exemple 1 — Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.

Divergence grossière. Lorsque la série converge, nous allons montrer que son terme général tend vers zéro, il s'agit donc d'une condition nécessaire. Lorsque ladite condition ne sera pas satisfaite, on parlera de *divergence grossière*.

Proposition ANA.10.4 |

Si $\left(\sum u_n\right)$ est une série convergente, **alors** :

$$u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0.$$

Preuve *En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, choisissons $S \in \boldsymbol{R}$ de sorte que $S_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} S$. En passant à la limite, on récupère $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} S - S = 0$.*

Attention

La réciproque est fausse ! Nous montrerons que $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge et pourtant $\frac{1}{n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$. Ce constat est **le** point clef du chapitre à bien assimiler.

S'il suffisait que le terme général converge vers zéro pour assurer la convergence, ce chapitre sur les séries serait totalement inutile. Le caractère convergeant d'une série est **beaucoup plus fort** que la seule convergence de son terme général vers zéro. En revanche, si vous parvenez à montrer que le terme général ne converge pas vers zéro alors *a fortiori* la série ne converge pas. Nous parlerons *infra* de *divergence grossière*.

Définition/Proposition ANA.10.1 | Divergence grossière

On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *diverge grossièrement* si :

$$u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Exemple 2 — La série $(\sum \cos(n))$ diverge grossièrement. *En effet, si l'on avait* $\cos(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, *alors l'égalité* $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ *donnerait une absurdité par passage à la limite. Ou alors, nous avons déjà vu que cette suite n'admet carrément pas de limite.*[1]

1.2. Propriétés

Tous les théorèmes connus pour la convergence des suites peuvent être utilisés pour la convergence de la suite des sommes partielles, donc pour la convergence de la série.

Proposition ANA.10.5 | Linéarité de la somme, structure d'espace vectoriel des séries convergentes

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ deux séries convergentes à valeurs dans $\mathbf{R}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

- $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente, et
- $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$

En particulier,

- l'ensemble des séries convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbf{R}$.
- Une somme de séries convergentes est convergente.

Preuve Montrons que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.

- L'ensemble des séries convergentes est bien inclus dans l'ensemble des suites convergentes.
- La suite nulle $(0)_n = (0 + \cdots + 0)_n$ est bien une série convergente.
- Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites telles que $\left(\sum u\right)_n, \left(\sum v\right)_n$ convergent, et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors la somme partielle de $\left(\sum \lambda u_n + \mu v_n\right)$ est définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par :

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Par passage à la limite, on obtient alors l'égalité annoncée, et le fait que $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge.

Attention

On veillera donc, avant d'invoquer la linéarité d'une somme infinie, à *justifier la convergence de toutes les séries* apparaissant dans le calcul.

Exemple 3 — *d'égalité illicite* La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente mais on **ne peut pas écrire** :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}}$$

FAUX!

car les deux sommes du membre de droite sont divergentes.

Proposition ANA.10.6 | « Convergeant + Divergeant = Divergeant »

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une série divergente. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) \quad \text{est divergente.}$$

Preuve Notons (S_n) la somme partielle de $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$. Soit $n \in \mathbf{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Donc (S_n) est une somme de deux suites, dont l'une converge $\left(\text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n\right)$, et l'autre diverge $\left(\text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_n\right)$. Donc (S_n) diverge.

Afin d'achever ce paragraphe de propriété, énonçons une propriété déjà bien connue dans le cas des sommes finies, et qui reste vraie aussi pour les sommes infinies.

[1]En effet, cos n'a pas de limite en $+\infty$, $\cos(2n\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $\cos(2n\pi + \pi/2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors que $2n\pi \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et $\pi/2 + 2n\pi \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Proposition ANA.10.7 | Somme infinie nulle

Soit $(\sum u_n)$ une série convergente. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 0.$$

En particulier, si (u_n) est une **suite positive** ou **négative**,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 0.$$

Ainsi, la propriété déjà bien connue pour les sommes finies reste vraie pour les sommes infinies. L'hypothèse de signe constant (positif ou négatif) sur les termes reste cruciale.

Preuve Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = 0,$$

puisque $|u_n| \geqslant 0$ pour tout n. Donc pour tout entier n, $S_n = 0$. Or, il s'agit d'une somme finie de termes positifs qui est nulle donc chaque terme est nul :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad |u_k| = 0.$$

Ceci implique

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad u_k = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on récupère alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 0.$$

Remarque 1.2 — Cette proposition nous servira notamment dans le Chapter ALEA.13 afin de montrer la propriété suivante : si une variable aléatoire réelle discrète X positive ou négative est d'espérance nulle, alors X est nulle.

2. SÉRIES USUELLES

Plusieurs séries usuelles sont au programme :

- les séries géométriques, dont nous allons établir la convergence à l'aide de résultats sur les sommes de termes géométriques,
- deux séries du type $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ avec $\alpha = 1$ ou 2 — appelées séries de RIEMANN,
- et la série dite « exponentielle », puisqu'en sommant nous retrouverons la fonction exp.

2.1. Géométrique

Définition/Proposition ANA.10.2 | Série géométrique

Soit $q \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On appelle *série géométrique de raison q* la série

$$\left(\sum q^n\right)_{n \geqslant 0}.$$

Elle converge si et seulement si $|q| < 1$. De plus, dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \tag{Geo}$$

et son reste à l'ordre n est donné par :

$$R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Comme pour les sommes finies géométriques, la formule de la somme partielle s'adapte lorsque le premier terme de la somme est différent de 1 — c'est dans ce cas aussi la formule mentionnée sur le reste R_n. Nous pouvons donc retenir une formule générale (pour la somme partielle et le reste) de la manière suivante :

$$\sum^{\infty} \text{suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1 - \text{raison}}.$$

Preuve *(Point clef — **Formule de sommation de termes géométriques**)*

Définition/Proposition ANA.10.3 | Série géométrique et géométrique dérivée (réelle)

Soit $q \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On appelle *série géométrique dérivée $k \geqslant 0$ fois de raison q* la série

$$\left(\sum (q^n)^{(k)}\right)_{n \geqslant k} = \left(\sum n(n-1)\dots(n-k+1)q^{n-k}\right)_{n \geqslant k}.$$

Elle converge si et seulement si $|q| < 1$. De plus, dans ce cas :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)q^{n-k}}_{(q^n)^{(k)}} = \left(\frac{1}{1-q}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-q)^{k+1}} \qquad \text{(GeoDer)}$$

En particulier, si $k = 2$ et $k = 3$, nous avons :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)^{(2)} = \frac{1}{(1-q)^2}$,
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \left(\frac{1}{1-q}\right)^{(2)} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Remarque 2.1 — La formule Eq. (GeoDer) signifie que :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)q^{n-k}}_{(q^n)^{(k)}} = \left(\frac{1}{1-q}\right)^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^{(k)}.$$

donc que,

Dans le cas des séries géométriques, on peut échanger dérivée en q et somme **infinie** en n.[2]

Preuve Nous faisons la preuve pour $k = 1$. Le cas général d'une dérivée d'ordre k se traite de la même manière.

[2] Ce qui n'est *a priori* pas évident, seul le cas des sommes finies est évident d'après les résultats généraux sur la dérivation

Exemple 4 — Déterminer la nature et somme éventuelle de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$.

Systématisons les calculs précédents dans une méthode.

Méthode Calcul d'une somme de série polynôme fois géométrique

Une série du type $\left(\sum n^k q^n\right)_{n\geqslant 0}$, avec $|q| < 1, k \geqslant 0$, peut s'exprimer en fonction de séries géométriques et géométriques dérivées. En effet,

- pour $k = 1$, on écrit
$$n^1 q^n = q(nq^{n-1}).$$
- Pour $k = 2$, on écrit
$$n^2 q^n = q^2\left(n(n-1)q^{n-2}\right) + q\left(nq^{n-1}\right).$$

2.2. Exponentielle

Définition/Proposition ANA.10.4 | Série exponentielle

La série $\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)$, appelée *série exponentielle de* x, converge pour tout $x \in \mathbf{R}$, et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Cette série peut d'ailleurs servir de définition de l'exponentielle — mais bien entendu inaccessible en Terminale ! Elle vient s'ajouter aux autres :

- l'unique solution du problème $y' = y, y(0) = 1$.
- La limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ définit e^x pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Commençons par montrer le lemme ci-après : le résultat est trivial si $|x| < 1$ (le numérateur tend vers zéro !), mais pas dans le cas général.

Lemme ANA.10.1

Soit $x \in \mathbf{R}$, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Preuve *(du lemme)* L'idée est la suivante : il y a autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur, mais les facteurs du dénominateur ne cessent de grandir alors que ceux du numérateur sont toujours « des x ». Cela nous incite donc à découper le dénominateur en « deux morceaux », dont le second sera composé de facteur strictement supérieurs à x.

$$0 \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!} \times \frac{|x|^{n-\lfloor x\rfloor}}{(\lfloor x\rfloor+1)\times\ldots\times n} \leqslant \frac{|x|^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}\left(\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{n-\lfloor x\rfloor}.$$

Puisque $\left|\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor+1}\right| < 1$, le majorant converge vers zéro — c'est le terme général d'une suite géométrique. Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ par théorème d'encadrement.

Preuve On admettra dans la preuve que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Montrons la formule suivante par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ — appelée égalité de Taylor-Laplace pour l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, il suffit d'établir que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0$. Pour ceci, on majore.

Exemple 5 — Déterminer la nature et somme éventuelle de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

Systématisons les calculs précédents dans une méthode.

Méthode Calcul d'une somme de série polynôme fois exponentielle

Une série du type $\left(\sum \frac{n^k}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$, avec $k \in \mathbf{N}$, peut s'exprimer en fonction de séries exponentielles après changement d'indice. En effet,

- pour $k = 1$, on écrit pour $n \geqslant 1$

$$\frac{n^1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

- Pour $k = 2$, on écrit

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} \quad \text{si} \quad n \geqslant 1,$$
$$= \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

si $n \geqslant 2$

Il apparaît parfois aussi des sommes exponentielles mais ne faisant intervenir que les termes pairs et impairs, elles s'expriment toutes les deux à l'aide de séries exponentielles comme nous allons le voir.

Exemple 6 — *Exponentielles des termes pairs/impairs* Soit $x \in \mathbf{R}$, alors :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$ [3]

2.3. de RIEMANN

Définition/Proposition ANA.10.5 | Série harmonique, constante d'EULER

- La *série harmonique* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, mais ne diverge pas grossièrement.[4]
- De plus, il existe une constante γ, appelée *constante d'EULER*, qui vaut $0,577$ à 10^{-3} près, telle que :

$$\mathrm{H}_n \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Preuve

1. (Divergence.)

- **(Méthode 1 : par l'absurde et minoration)** *Notons $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série d'ordre n. On peut montrer que pour tout entier n, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$. Si (H_n) convergeait disons vers $\ell \in \mathbf{R}$, alors en passant à la limite dans l'inégalité précédente, nous aurions $\ell - \ell = 0 \geqslant \frac{1}{2}$. C'est une*

[4]De multiples proverbes interprètent ce résultat : «*Les petits ruisseaux font les grands fleuves*», «*Les grains de sable amassés forment une montagne*»

contradiction.

- **(Méthode 2 : par comparaison série intégrale)** Soient $k \geqslant 1$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k, k+1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} &\leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}, \quad \forall t \in [k, k+1] \\ \Longrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ \frac{1}{k+1} &\leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

intégration sur $[k, k+1]$

En considérant le membre de droite, puis en sommant de $k = 1$ à n, on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n+1) - 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_n. \end{aligned}$$

téléscopage

Comme $\ln(n+1) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \infty$, on conclut en utilisant le théorème de divergence par minoration.

2. **(Existence de de la constante d'Euler)** Nous avons déjà vu une première méthode dans l'Exemple 6 du Chapter ANA.9.

La technique mise en jeu dans la preuve précédente, appelée *comparaison série/intégrale*, sera étudiée un peu plus tard dans le chapitre.

Exemple 7 — *Autres exemples*

1. $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge}}$ et : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$. Ce résultat est classique, mais non immédiat, nous prouverons la convergence un peu plus tard.
2. $\boxed{\text{La série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge}}$ et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$. Nous en verrons une démonstration en exercice.

3. SÉRIES DE SIGNE CONSTANT & CONVERGENCE ABSOLUE

3.1. Séries de signe constant

Définition ANA.10.4 | Séries à termes particuliers

- Une série $(\sum u_n)$ est *à termes positifs* (*resp. négatifs*) si $u_n \geqslant 0$ pour tout n (*resp.* $u_n \leqslant 0$ pour tout n). Si les inégalités précédentes sont vraies pour n assez grand, nous parlerons de séries à *termes positifs (resp. négatifs) pour n assez grand.*
- Une série $(\sum u_n)$ est *à termes de signes constants* si elle est à termes positifs ou négatifs.

Cadre

Nous nous intéressons dans cette section aux séries associées à des suites à termes positifs. Les résultats analogues s'appliquent :

- **aux séries à termes négatifs en considérant $(\sum(-u_n))$.**
- **Aux séries à termes positifs pour n assez grand — extension triviale dans les démonstrations !**

L'étude spéciale des séries à termes positifs est motivée par le constat ci-après, qui se trouve être central dans la démarche.

Soit (u_n) une suite de $\mathbf{R}^+$, alors pour tout entier n :

$$\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = (u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1}) - (u_1 + \ldots + u_n + u_n) = u_{n+1} \geqslant 0.$$

La suite (S_n) est donc croissante, et sa convergence (la convergence de la série donc) se réduit à son éventuel caractère majoré (d'après le théorème de convergence monotone, toute suite monotone converge vers une limite finie si et seulement si elle est majorée ou minorée, *cf.* Section 1 sur les suites numériques).

En résumé :

les sommes partielles d'une série de signe constant sont monotones !

Proposition ANA.10.8 | Convergence des séries positives

Soit $(\sum u_n)$ un série à termes positifs, de somme partielle S_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad (S_n) \text{ est majorée.}$$

Preuve *Soit $(\sum u_n)$ une suite à termes positifs, et soit (S_n) la suite de ses sommes partielles. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a*

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0,$$

la suite (S_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. De plus, elle converge si et seulement si elle est majorée, et elle diverge vers $+\infty$ sinon. La conclusion en découle.

Exemple 8 —

1. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ est convergente. *Indication : Minorer $k!$, on n'utilisera pas de résultat sur les séries exponentielles.*

2. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. *Indication : Minorer k^2 par $k(k-1)$ (pour $k \geqslant 2$).*

Comparaison de séries à termes positifs. Nous systématisons la technique mise en oeuvre dans les exemples précédents : nous avons majoré le terme général d'une série à termes positifs par celui d'une série à termes positifs convergente, nous en avons déduit la convergence de la série à termes positifs de départ. Plus généralement, nous avons le résultat qui suit.

Théorème ANA.10.1 | Comparaison de séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que l'on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n,$$

ou au moins pour n assez grand. Alors :

- $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge,
- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

Preuve

-

- On contrapose simplement la première partie.

L'utilisation du théorème de comparaison se fera en général au travers de deux moyens :

- soit on vous a fait trouver un encadrement (ou alors elle est évidente comme dans les exemples précédents),
- soit on utilise la formulation avec des équivalents ci-après. Elle est officiellement [H.P] mais les sujets la nécessitant l'admettent en préambule d'exercice.

Corollaire ANA.10.1 | Comparaison de séries à termes positifs avec $\sim$ [H.P]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que l'on a

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n.$$

Alors : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont de même nature.

On utilisera donc ce résultat **uniquement si l'énoncé vous le permet**.

Attention — Faux si les séries ne sont pas à termes positifs

- La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge; nous serons capable de le justifier sans difficulté après avoir vu les séries *alternées* en TD.
- La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente,
- alors que $\displaystyle\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

Preuve (*Point clef — **Traduire l'équivalent à l'aide d'une inégalité***)
On sait que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Cela signifie que v_n est non nulle pour n assez grand et que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, *i.e.*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \frac{1}{2}.\text{[a]}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on constate que pour n assez grand $\frac{u_n}{v_n}$ est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$:

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad -\frac{1}{2} < \frac{u_n}{v_n} - 1 < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2}.$$

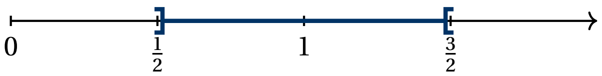


FIG. ANA.10.1. : Le quotient u_n/v_n est dans cet intervalle, au moins pour n assez grand

Donc pour n assez grand, on a finalement l'encadrement ci-après :

$$0 \leqslant \frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}. \quad (\star)$$

On peut à présent appliquer le théorème de comparaison.

- Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, alors puisque $0 \leqslant \frac{v_n}{2} \leqslant u_n$ pour n assez grand — partie gauche de $(\star)$ — le théorème de comparaison livre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{2}$ converge et donc la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
- Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, alors puisque $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$ pour n assez grand — partie droite de $(\star)$ — le théorème de comparaison livre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3v_n}{2}$ diverge et donc la diverge de $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

On a donc montré que les deux séries ont la même nature.

Exemple 9 — Déterminer la nature des séries ci-après, en appliquant le théorème de comparaison si une inégalité est évidente, ou le critère sur les équivalents sinon.

1. Les séries $\left(\sum \frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\sum \frac{1}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ divergent.

[a] Définition de la limite avec « $\varepsilon = \frac{1}{2}$ »

2. La série $\left(\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\right)$ converge.

3. La série $\left(\sum \dfrac{1}{2n+1}\right)$ diverge.

- **(Inégalité)**

- **(Équivalents)**

Le deuxième exemple peut se généraliser sans problème à des exponentielles plus générales.

Méthode Convergence des séries exponentielles convergeant vers zéro

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \infty$. Alors :

1. $n^2\mathrm{e}^{-u_n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0$ par croissances comparées,
2. donc pour n assez grand, $n^2\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
3. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, le théorème de comparaison donne la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u_n}$.

Séries de type Riemann et comparaison série—intégrale. On appelle série de Riemann toute série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Il existe une technique générale permettant d'étudier la convergence de ce type de série, très communes dans la pratique mais commençons par un exemple. Rappelons avant tout que nous avons déjà croisé deux types de série de Riemann :

- $(\alpha = 2)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ qui converge, nous l'avions admis,
- $(\alpha = 1)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ qui diverge, nous l'avions démontré.

Exemple 10 — ***Cas*** $\alpha = 1/2$ La série $\left(\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est divergente.

- **(Par comparaison)** En comparant $\sqrt{n}$ et n pour tout $n \geqslant 1$, établir la divergence.

- **(Par comparaison série/intégrale)** Montrer la divergence par comparaison série-intégrale.

Deux techniques semblent donc possibles pour étudier une série de Riemann :

- comparer $\frac{1}{n^\alpha}$ à $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$,
- ou alors réaliser une comparaison série-intégrale.

De manière plus générale, nous avons le résultat suivant.

Exemple 11 — *Cas général* Montrer que : $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente $\iff$ $\alpha > 1$.

- **(Par comparaison)** En comparant $\dfrac{1}{n^\alpha}$ à $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n^2}$ en fonction de α. Notons pour commencer que la série diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 0$.

- **(Par comparaison série/intégrale)** En effectuant une comparaison série-intégrale. Notons pour commencer que la série diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 0$.
  Supposons donc $\alpha > 0$ et posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ pour $n \geqslant 1$ la somme partielle de la série. Par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, on a pour $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

puis pour $n \geqslant 1$, nous obtenons avec la relation de CHASLES *en sommant entre* 1 *et* $n-1$ *:*

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n$$

d'où, en mettant S_n *au milieu de l'encadrement et en calculant l'intégrale :*

$$\frac{(n+1)^{-\alpha+1} - 1}{1-\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{n^{-\alpha+1} - 1}{1-\alpha}.$$

— *Si* $\alpha = 1$, *nous avons déjà montré la divergence de la série.*
— *Si* $\alpha > 1$ *: alors* $n^{-\alpha+1} \xrightarrow[]{n\to\infty} 0$, *donc* (S_n) *est majorée. Puisqu'elle est de plus croissante, elle converge. Donc la série converge.*
— *si* $\alpha \in]0,1[$ *: alors* $(n+1)^{-\alpha+1} \xrightarrow[]{n\to\infty} \infty$, *donc par divergence par minoration on déduit que* (S_n) *diverge. Donc la série diverge.*

- En déduire que si $\alpha > 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Remarque 3.1 — De cet exemple on retient :

- le cas «limite» pour les natures des séries de RIEMANN est donc $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$.
- Tout ce qui décroît plus lentement vers zéro, comme par exemple $\left(\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$, sont divergentes.
- Tout ce qui décroît plus rapidement vers zéro comme par exemple $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{n^{2022}}\right)$, sont convergentes.

La démarche utilisée dans la preuve précédente, qui consiste à comparer les sommes partielles à des intégrales, est appelée *comparaison série—intégrale*. Elle fonctionne pour toutes les séries de la forme $\sum f(n)$ où f est une fonction continue, positive et monotone, dont une primitive est connue. Voyons un exemple qui sort du contexte des séries de RIEMANN.

Exemple 12 — ***Comparaison série-intégrale pour un terme général décroissant*** Étudier la convergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n \ln n}\right)_{n\geqslant 2}$.

Remarque 3.2 — La comparaison série—intégrale permet souvent de donner en plus un équivalent des restes partiels R_n lorsque la série converge (ils tendent vers zéro), ou un équivalent des sommes partielles S_n lorsque la série diverge (elles tendent vers $+\infty$).

3.2. Séries à termes quelconques & Convergence absolue

Nous considérons de nouveau dans cette section des suites dont les termes peuvent être des réels de signe quelconque. Nous allons regarder une notion de convergence plus forte que la convergence des sommes partielles : il s'agit de la *convergence absolue*.

Définition ANA.10.5 | Série absolument convergente

On dit qu'une série $\left(\sum u_n\right)$ *converge absolument* si la série $\left(\sum |u_n|\right)$ converge.

Remarque 3.3 — La série $\left(\sum |u_n|\right)$ est une série à termes positifs : tous les critères vus dans la Section 3 peuvent donc s'appliquer et c'est cela le gros avantage de la notion de convergence absolue.

Théorème ANA.10.2 | Convergence absolue $\Longrightarrow$ Convergence

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série. Alors :

$$\left(\sum |u_n|\right) \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum u_n\right) \text{ converge.}$$

Autrement dit, toute série absolument convergente est convergente.

Définition ANA.10.6 | Série semi-convergente

On dit qu'une série $\left(\sum u_n\right)$ est *semi-convergente* si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge mais pas $\left(\sum |u_n|\right)$.

Attention Réciproque fausse

La réciproque du théorème précédent est fausse, précisément pour toutes les séries semi-convergentes. En effet, on peut montrer que la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge, mais $\left(\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\right) = \left(\sum \frac{1}{n}\right)$ ne converge pas (nous l'avons déjà vu).

Preuve Nous avons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n| \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|.$$

Ainsi la série $\left(\sum \left(u_n + |u_n|\right)\right)$ est une série à termes positifs, tout comme $\left(\sum |u_n|\right)$ qui converge par hypothèse, donc en appliquant le théorème de comparaison, nous déduisons que :

$$\left(\sum \left(u_n + |u_n|\right)\right) \quad \text{converge.}$$

Mais comme $u_n = \left(u_n + |u_n|\right) - |u_n|$, la série $\left(\sum u_n\right)$ s'exprime alors comme la différence de deux séries convergentes, elle est donc elle aussi convergente.

Nous croiserons rarement des séries à termes quelconques semi-convergentes (donc telle que $\left(\sum |u_n|\right)$ ne converge pas), tout simplement parce que les techniques existantes permettant de les traiter (transformation d'Abel, critère des séries alternées, *etc.*) ne sont pas au programme de BCPST.

Exemple 13 — La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

Proposition ANA.10.9 | Structure d'espace vectoriel des séries absolument convergentes

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ deux séries absolument convergentes à valeurs dans $\mathbf{R}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

- $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente, et
- En particulier, l'ensemble des séries convergentes est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites convergentes.

Preuve

Proposition ANA.10.10 | Inégalité triangulaire généralisée

Soit $(\sum u_n)$ une série absolument convergente. Alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Preuve *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire usuelle :*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|.$$

Le résultat s'obtient alors par passage à la limite, la fonction $x \longmapsto |x|$ étant continue.

ORDRE DE SOMMATION. On admet le théorème suivant qui sera utile en probabilités et qui nous autorise, s'il y a convergence absolue, à sommer dans n'importe quel ordre les éléments d'une série. Attention, cela n'est pas du tout évident ! Nous pouvons toujours le faire pour une somme finie, mais, pour une somme quelconque, cela n'est pas clair du tout. Considérons par exemple pour tout $n \in \mathbf{N}$ la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Alors on peut démontrer que $(\sum u_n)$ converge (on note $\ell \in \mathbf{R}$ la somme de la série), mais pas absolument (c'est la série harmonique). En effet nous ne pouvons pas permuter n'importe comment l'ordre des termes, puisque si cela était possible nous aurions :

$$\begin{aligned}
\ell &= \boxed{1} - \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \boxed{\frac{1}{5}} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \\
&= \left(\boxed{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\boxed{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\boxed{\frac{1}{2k-1}} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{\ell}{2}.
\end{aligned}$$

Théorème ANA.10.3 | Permutation des termes d'une série absolument convergente

Soit $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une bijection, et $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ une série absolument convergente.

Alors : $\left(\sum u_{\sigma(n)}\right)$ converge absolument, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Preuve Admis.

Remarque 3.4 — Si la convergence absolue est en défaut, on ne peut rien dire
Lorsque $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas absolument mais converge $\left(\textit{i.e.}\ \left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}\text{ est semi-convergente}\right)$, alors on peut même construire une bijection $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que $\left(\sum u_{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ diverge. L'hypothèse de convergence absolue est donc cruciale.

3.3. Résumé : plan d'étude d'une série numérique

4. SÉRIES DOUBLES

Nous aurons besoin en probabilités de permuter parfois des sommes infinies (pour des calculs d'espérance de couples de variables aléatoires réelles notamment). Nous donnons ici sans démonstration le résultat principal : il s'agit du théorème de Fubini, et plus précisément ici d'un cas particulier. Là encore, ce qui paraît évident pour des sommes finies ne l'est pas forcément pour des sommes quelconques : nous ne pourrons pas toujours permuter deux sommes infinies.

Définition ANA.10.7 | Suite double

On appelle *suite double* toute application d'un sous-ensemble $\mathscr{N}$ de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{R}$, *i.e.* toute famille de scalaires de $\mathbf{R}$ indexée par un sous-ensemble de $\mathbf{N}^2$, elle est

notée $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathcal{N}}$.
Pour tout $(n,p)\in\mathcal{N}$, on dit que $u_{n,p}$ est le (n,p)-ième *terme* de la suite, ou le terme de *rang* (n,p). Si $\mathcal{N} = ([n_0,\infty[\cap\mathbf{N})\times([n_1,\infty[\cap\mathbf{N})$ avec $n_0, n_1\in\mathbf{N}$, on dit que $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathcal{N}}$ est *définie à partir d'un certain rang.*

Exemple 14 — Pour tout $i,j\geqslant 0$, si $u_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}}$, alors $(u_{i,j})$ est une suite double.

Cadre

Dans toute la suite, nous considèrerons des suites doubles définies sur N^2 : il convient d'adapter les notions pour des suites définies à partir d'un certain rang.

Notation Abus de ...

Comme d'habitude si le contexte n'impose pas de le préciser, nous notons $\left(u_{n,p}\right)$ au lieu de $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathcal{N}}$. On note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ les suites doubles indexées par $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

Théorème ANA.10.4 | Permutation de sommes infinies si $u_{n,p}$ est positive

Soit $\left(u_{n,p}\right)$ une suite double réelle **positive**. On suppose que :

1. pour tout n, $\left(\sum u_{n,p}\right)_{p\geqslant 0}$ converge,
2. $\left(\sum \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right)_{n\geqslant 0}$ converge.

Alors : pour tout p, $\left(\sum u_{n,p}\right)_{n\geqslant 0}$ converge, et la série $\left(\sum\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right)_{p\geqslant 0}$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right). \tag{4.1}$$

Preuve Admis.

Remarque 4.1 — Version allégée Parfois dans la littérature on peut trouver comme seule hypothèse : «la suite $u_{n,p}$ est positive» au lieu des deux hypothèses de convergence *supra*.
En fait, si **1)** n'est pas vérifiée, alors puisque $u_{n,p}$ est positive, la somme partielle diverge forcément vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = \infty \quad \text{pour tout entier} \quad p\in\mathbf{N}.$$

Ainsi la série $\left(\sum\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right)$ de **2)** diverge vers $+\infty$ elle aussi. On peut justifier dans ce cas que l'égalité Eq. (4.1) devient :

$$\boxed{+\infty \quad = \quad +\infty.}$$

Elle est donc vérifiée là encore, mais le programme ne souhaite pas que vous écriviez de telles choses.

Lorsque les séries sont à termes quelconques, là il est nécessaire de rajouter de la convergence absolue dans les hypothèses.

Théorème ANA.10.5 | Permutation de sommes infinies dans le cas général

Soit $\left(u_{n,p}\right)$ une suite double réelle. On suppose que :

1. pour tout n, $\left(\sum |u_{n,p}|\right)$ converge,
2. $\left(\sum\sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|\right)$ converge.

Alors pour tout p, $\left(\sum |u_{n,p}|\right)$ converge, la série $\left(\sum\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,p}|\right)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right). \tag{4.2}$$

Vous ne pouvez retenir que ce résultat, qui est plus général que celui sur les séries à termes positifs.

Preuve Admis.

Définition ANA.10.8 | Série double convergente

On dira que $\left(\sum u_{n,p}\right)_{n,p\in\mathbf{N}}$ *converge absolument* si les hypothèses du théorème de FUBINI sont vérifiées, *i.e.*

1. pour tout n, $\left(\sum |u_{n,p}|\right)_{p\in\mathbf{N}}$ converge,
2. et $\left(\sum \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|}_{\text{une série en } n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Dans ce cas, on notera $\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} u_{n,p}$ la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$.

Remarque 4.2 — D'après le Théorème ANA.10.5, nous pourrions aussi prendre comme définition de série double convergente : pour tout p, $\left(\sum |u_{n,p}|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, la série $\left(\sum \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,p}|\right)_{p\in\mathbf{N}}$ converge. L'une impliquant l'autre d'après le théorème de FUBINI.

Exemple 15 — Étudier la convergence absolue de la série double $\left(\sum \frac{1}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$. Calculer sa somme le cas échéant.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du chapitre** ⋆ ⋆ ⋆

5. EXERCICES

5.1. Séries simples

Exercice ANA.10.1 | **Études de convergences** Étudier la convergence de $\left(\sum u_n\right)$, et calculer la somme si cela vous semble possible, lorsque :

- $u_n = \frac{n+2}{2^n}$ pour $n \geqslant 0$,
- $u_n = \frac{n^2}{n!}$ pour $n \geqslant 0$,
- $u_n = \frac{n(-1)^n}{3^{n-2}}$ pour tout $n \geqslant 0$,
- pour $k \geqslant 0$, $u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$, pour tout $n \geqslant k$,
- $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ pour $n \geqslant 2$,
- $u_n = n\mathrm{e}^{-n}$,
- $u_n = \sin(2^{-n})$,
- $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$,
- $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,
- $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$,
- $u_n = \frac{(-1)^n\cos(n)}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser, uniquement en cas de besoin, le résultat suivant : si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites positives telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\left(\sum u_n\right), \left(\sum v_n\right)$ sont de même nature.

Solution (exercice ANA.10.1)

- Soit $n \geqslant 0$. On reconnaît la somme d'une série géométrique et géométrique dérivée.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{2^k}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \left|\tfrac{1}{2}\right|\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \boxed{4.}\end{aligned}$$

- Soit $n \geqslant 0$. On reconnaît quasiment une série exponentielle.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \quad \textit{changement indice}\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}+\mathrm{e}\\ &= \boxed{2\mathrm{e}.}\end{aligned}$$

- Soit $n \geqslant 0$. On reconnaît quasiment une série géométrique.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(-1)^k}{3^{k-2}}\\ &= 9\sum_{k=0}^{n} k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\\ &= -3\sum_{k=1}^{n} k\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad \left|-\tfrac{1}{3}\right| < 1\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} -3\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= \boxed{2\mathrm{e}.}\end{aligned}$$

- Pour tout $n \geqslant k$, on a

$$u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{k!(n-k)!}.$$

Donc pour tout $\mathrm{N} \geqslant n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} u_n &= \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-k)!} \quad \text{changement indice} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-k} \frac{1}{n!} \\
&\xrightarrow[]{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \boxed{\frac{\mathrm{e}}{k!}.}
\end{aligned}$$

- Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{changement d'indice} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \quad \text{téléscopage} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&\xrightarrow[]{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \boxed{\frac{3}{4}.}
\end{aligned}$$

- Soit $n \geqslant 0$. On reconnaît quasiment une série géométrique dérivée.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} k \left(\frac{1}{\mathrm{e}} \right)^k \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{\mathrm{e}} \right)^{k-1} \quad \left|\tfrac{1}{\mathrm{e}}\right| < 1 \\
&\xrightarrow[]{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2} \\
&= \boxed{\frac{\mathrm{e}}{(1-\mathrm{e})^2}.}
\end{aligned}$$

- Par étude de fonction, on montre sans difficulté que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant x$. Donc pour tout $n \geqslant 0$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant 2^{-n}.$$

Or, $\left(\sum 2^{-n}\right)$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Donc d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ converge.}}$$

- Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=0}^{n} \ln(k+1) \quad \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) \quad \text{téléscopage} \\
&= \ln(n+2) - \ln(1) \\
&\xrightarrow[]{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \boxed{\infty.}
\end{aligned}$$

Donc la série diverge, résultat que l'on aurait pu retrouver en regardant un équivalent, et en utilisant la divergence de la série harmonique.

- Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k \cdot k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \quad \text{téléscopage} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2 \\
&\xrightarrow[]{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \boxed{-\ln 2.}
\end{aligned}$$

- Pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$. Or, $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ diverge.}}$$

- Ce n'est pas une série à termes positifs, et ce n'est pas non plus une série usuelle. On regarde donc la convergence absolue,

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par théorème de comparaison pour les séries positives, on déduit que $\boxed{\sum_{n=1} u_n \text{ converge}}$ (et même absolument!).

Exercice ANA.10.2 | On considère la série $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 2}$ où $u_n = \frac{2n^2}{n^3-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{2}{n}$.
2. En déduire la nature de $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 2}$.
3. Écrire une fonction en Python qui étant donné un entier n renvoie une liste contenant les valeurs des sommes partielles d'indice k pour $k \in [\![2\,,\,n]\!]$. Représenter alors graphiquement les 49 premières valeurs de ces sommes partielles.

Solution (exercice ANA.10.2)

1. Soit $n \geqslant 2$. Alors $u_n \geqslant \frac{2}{n}$ est équivalent à $\frac{2n^2}{n^3-1} \geqslant \frac{2}{n}$, soit $2n^3 \geqslant 2(n^3-1)$ soit $0 \geqslant -2$. Cette inégalité étant vérifiée, nous déduisons que $\boxed{u_n \geqslant \frac{2}{n}}$.
2. D'après le cours, la série $\left(\sum \frac{2}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge, les séries étant positives, d'après le théorème de comparaison, nous déduisons que :

$$\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 2} \quad \text{diverge.}$$

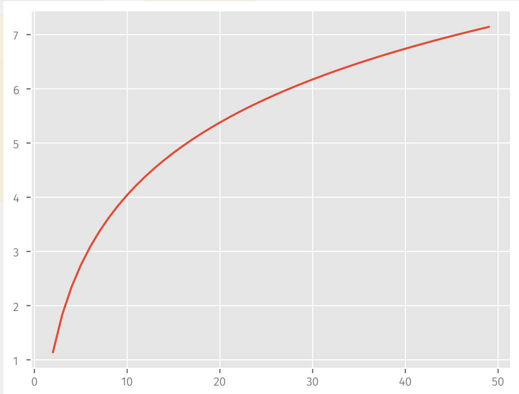
3.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def liste_S():
    """
    retourne une liste contenant S2, ..., S49
    """
    liste_somme_part = [8/7]
    S = liste_somme_part[0]
    for i in range(3, 50):
        S += (2*i**2)/(i**3-1)
        liste_somme_part.append(S)
    return liste_somme_part

# ON TRACE ENSUITE CES TERMES
plt.plot(list(range(2, 50)), liste_S())
```

Puis on l'affiche.



Exercice ANA.10.3 | **Avec des croissances comparées**

1. Justifier que pour n assez grand dans $\mathbf{N}$, on a : $\quad n \ln n e^{-2n} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
2. Déterminer la nature de $\left(\sum (-1)^n n \ln n e^{-2n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Solution (exercice ANA.10.3)

1. Par croissances comparées, $n^2 \cdot n \ln n e^{-2n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$, donc pour n assez grand, cette

quantité est majorée par 1. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\boxed{n \ln n e^{-2n} \leqslant \frac{1}{n^2}}.$$

2. Il ne s'agit pas d'une série à termes positifs, donc étudions la convergence absolue. Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \left|(-1)^n n \ln n e^{-2n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ converge, donc par théorème de comparaison, on déduit que $\boxed{\left(\sum (-1)^n n \ln n e^{-2n}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge absolument, donc converge.}}$

Exercice ANA.10.4 |

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{4n}{n^4+2n^2+9} = \frac{a}{(n-1)^2+2} + \frac{b}{(n+1)^2+2}.$$

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{4n}{n^4+2n^2+9}$, $n \geqslant 0$. Calculer sa somme en cas de convergence.

Solution (exercice ANA.10.4)

1. On cherche $a, b \in \mathbf{R}$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{4n}{n^4+2n^2+9} = \frac{a}{(n-1)^2+2} + \frac{b}{(n+1)^2+2}.$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{4n}{n^4+2n^2+9} = \frac{a((n+1)^2+2)+b((n-1)^2+2)}{n^4+2n^2+9}.$$

En développant le numérateur et en regroupant chaque terme suivant les puissances de n, on obtient la condition équivalente ci-après :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n^2(a+b)+2n(a-b)+(a+2+b+2) = 4n.$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ses coefficients le sont, donc

$$a+b=0, \quad 2(a-b)=4, \quad a+b=-4 \quad \Longleftrightarrow \quad a=1, \quad b=-1.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{4n}{n^4+2n^2+9} = \frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2}.$$

2. On constate alors une série de forme téléscopique. Soit $\mathrm{N} \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{n^2+2}\right) + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2}\right) \quad \textit{téléscopage} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{\mathrm{N}^2+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^2+2} \\
&\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve donc la convergence de la série associée.

Exercice ANA.10.5 |

Soit $u_0 \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $u_n \in]0,1[$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, puis que $u_n \xrightarrow[]{n\to\infty} 0$.
2. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ est convergente et calculer la somme.

Solution (exercice ANA.10.5)

1. La suite (u_n) vérifie une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto x - x^2$, et $u_0 \in \,]0,1[$. Or, le graphe de f est une parabole orientée vers le bas, de racines 0 et 1, le maximum étant atteint en $-\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$, la valeur du maximum est alors $f(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Donc $f(]0,1[) =]0,1/4[\subset]0,1[$, donc $]0,1[$ est un intervalle stable par f. Ainsi, par récurrence immédiate on déduit que que $\boxed{u_n \in]0,1[\text{ pour tout entier } n \in \mathbf{N}}$.
Essayons d'appliquer le théorème de convergence monotone pour montrer la convergence de la suite. Soit $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ donc la suite (u_n) est décroissante, elle est de plus minorée par zéro donc converge vers une limite finie $\ell \in [0,1]$. Puisque f est continue, $\ell = \ell - \ell^2$ soit $\ell^2 = 0$, ceci implique que $\ell = 0$. En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0}.$$

2. Montrons que $\left(\sum u_n^2\right)$ est convergente et calculons sa somme. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}),$$

la dernière somme étant téléscopique, nous déduisons

$$S_n = u_0 - u_{n+1} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} u_0.$$

Donc $\boxed{\text{la série } \left(\sum u_n^2\right) \text{ est convergente}}$, et $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 = u_0}$.

Exercice ANA.10.6 | On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n = \arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)$.

1. Montrer la formule suivante : $\quad \forall a, b \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

2. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2}$.
3. Étudier la convergence et calculer la somme de $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$.

Solution (exercice ANA.10.6)

1. Soient $a, b \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$. Alors

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \boxed{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}.$$

division par $\cos a \cos b$

On obtient par imparité aussi :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2. Notons $v_n = \arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors, en utilisant la question précédente, on a :

$$\tan v_n = \tan\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2}\right) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}}{1 + \frac{1}{n}\frac{1}{n+2}},$$

donc $\tan v_n = \frac{(n+2)-n}{n(n+2)+1} = \frac{2}{n(n+2)+1} = \frac{2}{(n+1)^2}$. Or, on sait que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan x) = x.$$

Donc comme $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (c'est une différence de deux éléments dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$), on obtient :

$$v_n = \boxed{\arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right) = \arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2}}.$$

3. La série apparaît alors comme une série téléscopique. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
&S_n\\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k\\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+2}\right) && \textit{question précédente pour } k \geqslant 1\\
&= \arctan(2) + \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k+1} - \arctan\frac{1}{k+2}\right) && \textit{télescopage}\\
&= \arctan(2) + \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) + \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\\
&\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \boxed{2\arctan 2 + \frac{\pi}{4}.}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve donc la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exercice ANA.10.7 | **Critère général des séries alternées** Soit une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par : $v_n = (-1)^n u_n$ avec (u_n) une suite réelle positive décroissant vers zéro.

1. On note (S_n) la suite des sommes partielles de (v_n). Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites adjacentes. Qu'en déduit-on pour $\left(\sum v_n\right)$?
2. **(Application)** Étudier les séries $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$, et la série $\left(\sum \sin\left(\pi\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\right)_{n\geqslant 0}$.

Solution (exercice ANA.10.7)

1. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
   - $S_{2(n+1)} - S_{2n} = v_{2n+2} + v_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ puisque (u_n) est décroissante,
   - $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = v_{2n+3} + v_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$ puisque (u_n) est décroissante,
   - $S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$.

   Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites adjacentes, convergent donc *de facto* vers la même limite, donc (S_n) converge aussi vers cette limite par propriété sur les suites extraites. Ainsi, $\boxed{\left(\sum v_n\right) \text{ converge.}}$
2. **(Application)**
   - Pour la première, notons $u_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors (u_n) décroît comme inverse de suite croissante, et tend vers 0 par règles usuelles. Donc $\boxed{\left(\sum \frac{(-1)^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge}}$ d'après la première question.
   - Pour la seconde, constatons que
   $$\sin\left(\pi\frac{n^2+n+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi\frac{n(n+1)+1}{n+1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n+1}\right).$$
   Rappelons que
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}, \quad (-1)^n \sin x = \sin(x+n\pi).$$
   Donc
   $$\sin\left(\pi\frac{n^2+n+1}{n+1}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$
   Notons à présent $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Cette suite décroît (puisque $(\pi/(n+1))$ décroît aussi, et $u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$. Donc $\boxed{\left(\sum \sin\left(\pi\frac{n^2+n+1}{n+1}\right)\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}$

Exercice ANA.10.8 | **Transformation d'Abel**

1. Soient (u_n) et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On note $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la somme partielle de v. On suppose que
   - $u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$, (u_n) est décroissante,
   - et que (V_n) est bornée.

L'objectif de cette question est d'établir que $\left(\sum u_n v_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

1.1) **(Formule d'intégration par parties discrète)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.$$

1.2) En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ converge.

2. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ converge.

Solution (exercice ANA.10.8)

1. 1.1) Pour la démontrer, dans le cas d'une intégrale, on intègre simplement la relation $(fg)' = f'g + fg'$, dans le cas de sommes on réindexe à l'aide d'un changement de variable. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} u_k v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k v_k + u_0 V_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k (V_k - V_{k-1}) + u_0 V_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k V_k - \sum_{k=1}^{n} u_k V_{k-1} + u_0 V_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k + u_0 V_0 \qquad \textit{changement d'indices} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_0 V_0 - u_1 V_0 + u_n V_n \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n.}
\end{aligned}$$

1.2) Il suffit de démontrer que le membre de droite admet une limite lorsque $n \to \infty$. Comme V est une suite bornée, u converge vers 0, la suite $(u_n V_n)$ converge donc vers 0. Le premier terme est une somme partielle de série absolument convergente : en effet, puisque $u_k - u_{k+1} \geqslant 0$ pour tout entier k et que (V_k) est bornée, il existe une constant M positive telle que pour tout n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|(u_k - u_{k+1}) V_k\right| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = M(u_0 - u_n),$$

comme (u_n) converge vers zéro, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|(u_k - u_{k+1}) V_k\right|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, et c'est une somme partielle de série positive donc elle est croissante, donc $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \text{ converge}}$ (et même absolument).

2. Il n'est pas clair qu'il y ait convergence absolue, puisque le cosinus est borné par 1. Mais, la suite $(\cos 1 + \dots + \cos n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos k &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i} . \frac{1 - \left(e^{i}\right)^n}{1 - e^{i}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i} \frac{e^{\frac{ni}{2}}}{e^{\frac{i}{2}}} \frac{\sin(n/2)}{\sin(1/2)}\right) \qquad \textit{angle moitié} \\
&= \frac{\sin(n/2+1)\sin(n/2)}{\sin(1/2)}.
\end{aligned}$$

Donc $\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(1/2)|}$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, ce qui prouve que $(\cos 1 + \dots + V_n)$ est bornée. Enfin, la suite $(1/n)_n$ décroît vers zéro, donc d'après la question précédente, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ converge.}}$

5.2. Séries doubles

Exercice ANA.10.9 | Étudier la nature des séries doubles ci-dessous, calculer leur somme lorsque cela est possible.

1. $\left(\sum \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!}\right)_{i,j\geqslant 0}$,
2. $\left(\sum \frac{a}{2^{i+j}}\right)_{i,j\geqslant 0}$, pour tout $a \in \mathbf{R}$. Déterminer a de sorte que la somme soit égale à un.

Solution (exercice ANA.10.9)

1. ▸ Fixons $i \in \mathbf{N}$, étudions la convergence absolue de la série en $j \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \frac{(i+j)\,|\lambda|^{i+j}}{i!j!} \\
&= \frac{|\lambda|^i}{i!}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{i\,|\lambda|^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{j\,|\lambda|^j}{j!}\right) \\
&= \frac{|\lambda|^i}{i!}\left(i\sum_{j=0}^{n} \frac{|\lambda|^j}{j!} + |\lambda|\sum_{j=1}^{n} \frac{|\lambda|^{j-1}}{(j-1)!}\right) \quad \textit{changement d'indice + série exponentielle} \\
&\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \frac{|\lambda|^i}{i!}\left(i\mathrm{e}^{|\lambda|} + |\lambda|\,\mathrm{e}^{|\lambda|}\right) \\
&= \frac{|\lambda|^i\,\mathrm{e}^{|\lambda|}}{i!}\left(i+|\lambda|\right).
\end{aligned}$$

▸ Étudions à présent la convergence absolue de la série en $i \in \mathbf{N}$ de terme général $\frac{|\lambda|^i \mathrm{e}^{|\lambda|}}{i!}(i+|\lambda|)$. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{|\lambda|^i\,\mathrm{e}^{|\lambda|}}{i!}(i+|\lambda|)\right) \\
&= \mathrm{e}^{|\lambda|}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{i\left|\lambda^i\right|}{i!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{|\lambda|^{i+1}}{i!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{|\lambda|}\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda| \frac{|\lambda|^{i-1}}{(i-1)!} + |\lambda|\sum_{i=0}^{n} \frac{|\lambda|^i}{i!}\right) \quad \textit{changement d'indice + série exponentielle} \\
&\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \mathrm{e}^{|\lambda|}\,|\lambda|\left(\mathrm{e}^{|\lambda|} + \mathrm{e}^{|\lambda|}\right) = 2\mathrm{e}^{2|\lambda|}\,|\lambda|.
\end{aligned}$$

De tous ces calculs, on déduit la convergence de la série double. En les refaisant sans valeur absolue, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!} = 2\lambda\mathrm{e}^{2\lambda}.}$$

2. ▸ Fixons $i \in \mathbf{N}$, étudions la convergence absolue de la série en $j \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \frac{|a|}{2^{i+j}} \\
&= \frac{|a|}{2^i}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} \quad \left|\tfrac{1}{2}\right| < 1 \\
&\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \frac{|a|}{2^{i-1}}.
\end{aligned}$$

▸ Étudions à présent la convergence absolue de la série en $i \in \mathbf{N}$ de terme général $\frac{|a|}{2^{i-1}}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \frac{|a|}{2^{i-1}} \\
&= 2\,|a|\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \quad \left|\tfrac{1}{2}\right| < 1 \\
&\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 4\,|a|.
\end{aligned}$$

De tous ces calculs, on déduit la convergence de la série double. En les refaisant sans valeur absolue, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a}{2^{i+j}} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a}{2^{i+j}} = 4a.}$$

Donc la somme double est égale à 1 si et seulement si $\boxed{a = \frac{1}{4}.}$