Chapitre ANA.7.

Fonctions de la variable réelle

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les éléments d'analyse réelle des fonctions d'une variable. Sa vocation n'est donc pas de se substituer à votre cours de première année, il faut le voir comme un complément.
Nous allons commencer par revoir des généralités sur les fonctions (du vocabulaire mais pas que), nous passerons ensuite aux propriétés analytiques : la continuité pour commencer, ensuite la dérivabilité, et enfin les développements limités qui généralisent l'approximation locale d'une fonction par sa tangente, afin de résoudre des problèmes de calculs de limite par exemple.

Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.

— **Henri Poincaré**

Définition ANA.7.1 | Intervalle & Voisinage ouvert

On appelle *intervalle* de **R** une partie convexe de **R**, c'est-à-dire un ensemble I vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad (x \leqslant y \implies [x,y] \subset \mathrm{I}).$$

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On appellera *voisinage ouvert de* x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

1. GÉNÉRALITÉS

Dans cette première section, les fonctions seront définies sur une partie $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$ et à valeurs dans **R**.

Rappelons également qu'une fonction est une application, à ce titre elle ne peut posséder plusieurs images associées à un même antécédent. On rappelle également que si $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, l'ensemble *image* noté $f(\mathrm{D})$ est :

$$f(\mathrm{D}) = \{f(x), \quad x \in \mathrm{D}\}.$$

Notation

$\mathscr{F}(\mathscr{D}, \mathbf{R})$ (et $\mathbf{R}^{\mathrm{D}}$) désignent l'ensemble des fonctions de D dans **R** à valeurs réelles.

Définition ANA.7.2 | Ensemble de définition et graphe

L'*ensemble de définition* d'une fonction, ou ensemble de départ, est l'ensemble des réels en lesquels elle est définie. Le *graphe* (ou *représentation graphique de f*) d'une fonction $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie D de **R** est l'ensemble constitué des couples $(x, f(x))$, où x parcourt D. Si on le note $\mathscr{C}_f$, on a alors, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$$(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff [\quad x \in \mathrm{D} \quad \text{et} \quad y = f(x) \quad].$$

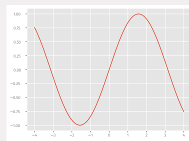
Attention

Il ne faut pas confondre une fonction f et l'image $f(x)$ de x par f. En particulier, on écrira pas « la fonction $f(x)$ ».

Tracés de graphes de fonctions en Python. Pour rappel, les tracés de courbe en Python se font toujours par discrétisation : on relie un nuage de points construit à l'aide de Python, avec un espacement suffisamment petit.

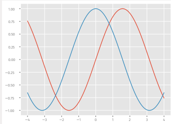
Représentation de la fonction sinus entre -4 et 4

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-4, 4, 1000) #Maillage de
    1000 points de l'intervalle [-4,4]
Y = np.sin(X) #Fonction sin appliquée
    coordonnée par coordonnée
plt.plot(X, Y)
```



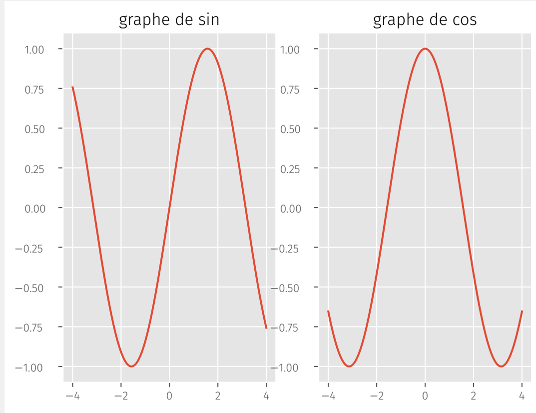
Représentation des fonctions sinus et cosinus entre -4 et 4

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-4, 4, 1000) #Maillage de
↪ 1000 points de l'intervalle [-4,4]
Y = np.sin(X) #Fonction sin appliquée
↪ coordonnée par coordonnée
Z = np.cos(X) #Fonction cos appliquée
↪ coordonnée par coordonnée
plt.plot(X, Y)
plt.plot(X, Z)
```



Représentation des fonctions sinus et cosinus entre -4 et 4 (en grille)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-4, 4, 1000) #maillage de 1000 points de
↪ l'intervalle [-4,4]
Y = np.sin(X)
Z = np.cos(X) #Fonction appliquée coordonnée par coordonnée
plt.subplot(121) #grille de graphes de format 2 L x 1 C, 1er
↪ emplacement pour sin
plt.plot(X, Y)
plt.title('graphe de sin')
plt.subplot(122) #grille de graphes de format 2 L x 1 C, 2ème
↪ emplacement pour cos
plt.plot(X, Z)
plt.title('graphe de cos')
```



Dans les tracés précédents, on peut se passer de la commande `linspace` et utiliser des boucles classiques ou listes par compréhension. Nous en ferons des exemples en TP d'Informatique.

Attention

Vous devez savoir tracer des fonctions en autonomie, aucun rappel sur ce sujet n'est inscrit dans les sujets d'oraux.[1]

Définition ANA.7.3 | Opérations sur les fonctions

Soient $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions définies sur D. On appelle *somme* de f et g l'application $f+g : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

De même, on appelle *produit* de f et g l'application $fg : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Si g ne s'annule pas, alors on appelle *inverse* de g (*resp. quotient de f par g*) l'application $\dfrac{1}{g} : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ (*resp.* $\dfrac{f}{g} : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$) définie par :

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}, \quad \left(\textit{resp.} \forall x \in \mathrm{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

[1] à la rigueur, on vous rappellera que la commande `plot` existe

Soit $n \in \mathbf{Z}$. Si $n \geqslant 0$ ou si f ne s'annule pas, alors on appelle *puissance* $n^{ème}$ de f l'application $f^n : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad (f^n)(x) = (f(x))^n.$$

Attention

À l'inverse des applications linéaires, la puissance pour les fonctions réelles correspond au produit classique des réels.

Remarque 1.1 — On rappelle que

$$(\mathscr{F}(\mathrm{D}, \mathbf{R}), +, \times)$$

est un **R**-espace vectoriel : consulter le Chapter ALG.3.

Définition ANA.7.4 | Parité/Imparité

Soit $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est *paire* si pour tout $x \in \mathrm{D}$, on a :

$$-x \in \mathrm{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

De même, f est dite *impaire* si pour tout $x \in \mathrm{D}$, on a :

$$-x \in \mathrm{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Proposition ANA.7.1 | Structure d'espace vectoriel des fonctions paires/impaires

Soit $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$. Alors l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbf{R}^{\mathrm{D}}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{E} = \mathbf{R}^{\mathrm{D}}$.

Preuve Faisons la preuve pour les fonctions paires. Elle est quasiment identique pour les fonctions impaires.

Définition ANA.7.5 | Périodicité

Soit $\mathrm{T} > 0$. Une fonction $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite T-*périodique* si pour tout $x \in \mathrm{D}$, on a :

$$x + \mathrm{T} \in \mathrm{D} \quad \text{et} \quad f(x + \mathrm{T}) = f(x).$$

Le réel T est appelé **<u>une</u>** *période* de la fonction. Une fonction est dite *périodique* s'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que f soit T-périodique.

Attention

Il n'y a pas unicité de la période. En effet, une fonction T-périodique est *a fortiori* 2T-périodique, 3T-périodique, *etc.* Par ailleurs, une période est forcément positive.

Exemple 1 — La fonction tan est π-périodique, et elle est définie sur $\mathbf{R} \Big\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right\}$.

Exemple 2 — Déterminer la plus petite période de $f : x \longmapsto \cos(2x) + \sin(3x)$.

Proposition ANA.7.2 | Structure d'espace vectoriel des fonctions périodiques

Soit $D \subset \mathbf{R}$ et $T > 0$. Alors l'ensemble des fonctions T-périodiques de $\mathbf{R}^D$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbf{R}^D$.

Preuve

Définition ANA.7.6 | Monotonie pour le cas R = R

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *croissante* (*resp. strictement croissante*) si :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$

$$(\textit{resp.} \forall (x, y) \in D^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)).$$

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *décroissante* (*resp. strictement décroissante*) si :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$

$$(\textit{resp.} \forall (x, y) \in D^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)).$$

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *monotone* (*resp. strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (*resp.* strictement croissante ou strictement décroissante). Une fonction *constante* est une fonction croissante et décroissante.

Attention aux confusions avec les suites!

- Si pour tout $x \in D$ tel que $x + 1 \in D$, $f(x + 1) \geqslant f(x)$, on ne peut en général rien déduire sur la croissance de f.
- Si pour tout $x \in D$ tel que $x + 1 \in D$, $f(x + 1) \leqslant f(x)$, on ne peut en général rien déduire sur la décroissance de f.

Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$ vérifie $f(x + 1) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ et pourtant elle n'est clairement pas croissante.

Proposition ANA.7.3 | Les fonctions monotones ne forment pas un sous-espace vectoriel des fonctions

Soit $D \subset \mathbf{R}$. Alors les ensembles de fonctions monotones (ou croissantes, décroissantes) ne sont pas des espaces vectoriels.

Preuve Pour les fonctions croissantes : il suffit de considérer $x \in D \longmapsto x$. Elle est croissante, mais son opposé est décroissante. De-même pour les fonctions décroissantes en considérant $x \in D \longmapsto -x$. Ces deux ensembles ne sont pas stables par opposé, donc ne sont *a fortiori* pas des espaces vectoriels.
Pour les fonctions monotones, constatons, sur $D = \mathbf{R}^+$, que $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto -x$ sont des fonctions monotones, mais $f + g$ n'est pas monotone sur $\mathbf{R}^+$. Cet en-

semble n'est pas stable par addition, donc *a fortiori* n'est pas un espace vectoriel.

Définition ANA.7.7 | Borne

Une fonction $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *majorée* (*resp. minorée, bornée*) si l'ensemble $f(\mathrm{D})$ est majoré (*resp.* minoré, borné). Autrement dit s'il existe $\mathrm{M} \in \mathbf{R}$ (*resp.* $m \in \mathbf{R}$, $(m, \mathrm{M}) \in \mathbf{R}^2$) tel que :

$$\begin{array}{ll} & \forall x \in \mathrm{D}, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M} \\ (\textit{resp.} & \forall x \in \mathrm{D}, \ m \leqslant f(x), \\ & \forall x \in \mathrm{D}, \ m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}) \end{array}$$

Proposition ANA.7.4 | Structure d'espace vectoriel des fonctions bornées

L'ensemble des fonctions bornées forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de D dans **R**.

Preuve

2. LIMITES ET CONTINUITÉ

Cadre

Dans cette section, I désignera toujours un intervalle de R non vide et non réduit à un point.

Définition ANA.7.8 | Adhérence d'un ensemble

Soit I est un intervalle, on dit qu'un réel $x \in \mathbf{R}$ est *adhérent à* I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathrm{I} \neq \emptyset,$$

alors on appelle *adhérence de* I l'ensemble des réels adhérents à I. On le note en général $\bar{\mathrm{I}}$.

Ce sont donc des points « très proches » de I, mais pas forcément dedans.

Exemple 3 — 2 est adhérent à $[1, 2[$, alors que $\frac{5}{2}$ ne l'est pas.

Remarque 2.1 — Si I est un intervalle, alors $\bar{\mathrm{I}}$ est l'intervalle obtenu en adjoignant à I sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\overline{\mathbf{R}}$:

$$\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \cup \{\inf \mathrm{I}, \sup \mathrm{I}\}.$$

Ainsi, on généralise la notation $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

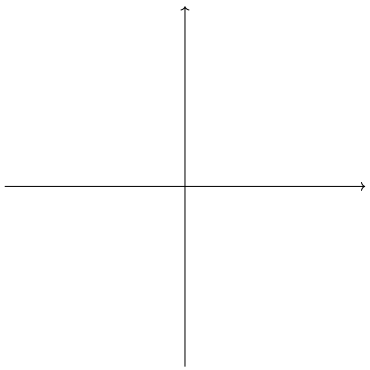
2.1. Limite d'une fonction en un point

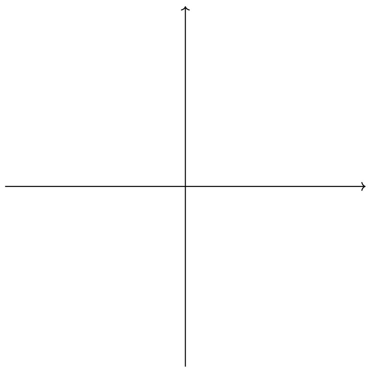
Définition ANA.7.9 | Limite en un point adhérent

Soient $a \in \overline{\mathrm{I}}$, $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ et une application f définie sur I ou sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. On note :

- $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} \ell$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-a| < \eta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$
- $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} +(-)\infty$ si :
$$\forall \mathrm{A} \in \mathbf{R}, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-a| < \eta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(x) > (<)\mathrm{A}.$$
- $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow +(-)\infty} \ell$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{B}_\varepsilon \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > (<)\mathrm{B}_\mathrm{A} \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
- $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow +(-)\infty} +(-)\infty$ si :
$$\forall \mathrm{A} \in \mathbf{R}, \exists \mathrm{B}_\varepsilon \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > (<)\mathrm{B}_\mathrm{A} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > (<)\mathrm{A}.$$

Notez bien que a n'est pas nécessairement dans l'ensemble de définition de f, il est soit dedans, soit au pire très proche (dans $\overline{\mathrm{I}}$). Illustrons deux des définitions sur un dessin.





Remarque 2.2 — Où intervient $a \in \overline{\mathrm{I}}$? Si c'est le cas, l'ensemble $\{x \in \mathrm{I}, \quad |x-a| < \eta\}$ est non vide pour tout $\eta > 0$. Bien entendu c'est déjà le cas si $a \in \mathrm{I} \subset \overline{\mathrm{I}}$, mais ça l'est aussi plus généralement pour n'importe quel point de l'adhérence.

Proposition ANA.7.5 | Unicité de la limite

Soient $a \in \overline{\mathrm{I}}$, $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ et une application f définie sur I ou sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Preuve Traitons le cas d'une limite finie par exemple. Supposons que $f \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} \ell$ et $f \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$.
Alors pour $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$, la définition de la limite donne : $f(x) \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[\cap \left]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon\right[$ pour x assez proche de a. Comme ces deux intervalles sont disjoints, c'est absurde et $\ell = \ell'$.

Définition ANA.7.10 | Limite d'une fonction

Soient $a \in \overline{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tels que $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} \ell$. On dit que ℓ est la *limite* de f en a, ce que l'on note :
$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \qquad \text{ou, plus simplement,} \qquad \ell = \lim_a f.$$

Remarque 2.3 — Une fonction peut très bien ne pas avoir de limite (par exemple la fonction sin en $+\infty$). Si la proposition précédente assure l'unicité de la limite, on a toutefois un problème d'existence. On n'écrira donc jamais $\lim_a f$ avant d'en avoir prouvé l'existence.

Attention

Parfois on trouve dans la littérature les mêmes définitions qu'au-dessus mais avec « $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$ » au lieu de « $x \in \mathrm{I}$ » (on parlera de *limite épointée*). Les différences entre ces deux notions sont minimes, mais sources de pièges. Par exemple, pour les limites épointées, la Proposition ANA.7.6 ci-dessous est fausse.

Proposition ANA.7.6 |

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle, et $a \in \mathbf{R}$.
Si f est **définie en** a (*i.e.* $a \in \mathrm{I}$) et possède une limite en a, alors : $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Preuve Faisons (par exemple) la preuve dans le cas où $\ell \underset{\text{(défi.)}}{=} \lim_{x \longrightarrow a} f$ est finie.
Notons que la limite ℓ est nécessairement finie. En effet, si l'on suppose que $\lim_a f = +\infty$ par exemple, alors choisissons $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$, alors $f(x) > f(a) + 1$

(par définition de la limite). En faisant $x = a$ on obtient alors une contradiction.
Donc la limite est finie, et toujours par définition de la limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-a| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Donc en faisant $x = a$: on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(a) - \ell| < \varepsilon.$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 pour avoir le résultat : $\quad \ell = f(a)$.

Proposition ANA.7.7

Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ admet une limite finie en $a \in \bar{\mathrm{I}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Preuve Faisons (par exemple) la preuve dans le cas où $a \in \mathrm{I}$ (en particulier a est fini).
Considérer $\varepsilon = 1$, par exemple, dans la définition de la limite, montre que $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$ au voisinage de a, où $\ell = \lim_a f$.

On peut aussi affaiblir la définition de limite précédente et faire tendre x vers a que d'un côté. C'est ce que nous voyons dès à présent.

Limite à droite ou à gauche. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite <u>et</u> à gauche.

Définition ANA.7.11 | Limite à droite/gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbf{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On pose $\mathrm{I}_+ = \mathrm{I} \cap]a, +\infty[$, et on suppose que $\mathrm{I}_+ \neq \emptyset$.
On dit que f *admet* ℓ *pour limite à droite en* a si la restriction de f à I_+ admet ℓ pour limite en a. On note alors $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$. On définit de même la notion de *limite à gauche en* a.

Proposition ANA.7.8

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbf{R}$. Alors :

$$f \text{ amdet une limite en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f & \text{admet deux limites à droite et gauche,} \\ & \text{qui sont de plus égales, en } a \end{cases}.$$

Remarque 2.4 — Dans l'écriture avec des quantificateurs, on remplace $|x-a| < \eta$ par $a - \eta < x < a$ pour la limite à gauche, et $a < x < a + \eta$ pour la notion de limite à droite.

Exemple 4 — Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ admet une limite à droite et à gauche en 0, égale à $+\infty$. Donc admet une limite en zéro qui vaut $+\infty$.
Ce n'est pas le cas de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui admet seulement une limite à droite et à gauche.

Exemple 5 — ***Partie entière*** Rappelons la définition de la partie entière et étudions la continuité de la fonction.

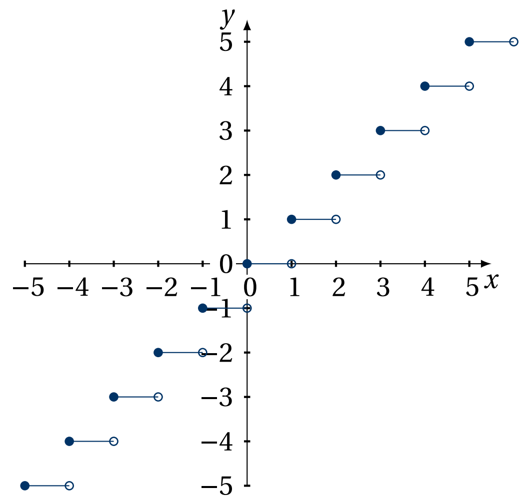


FIG. ANA.7.1. : Graphe de la partie entière

Reformulation séquentielle. On sopuhaite reformuler ici la définition de la limite avec des suites.

Théorème ANA.7.1 | Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $a \in \overline{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow a} \ell \in \overline{\mathbf{R}} \iff \boxed{\forall} (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathrm{I}^{\mathbf{N}},\quad x_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} a, \text{ on a : } f(x_n) \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell.$$

Attention

Le quantificateur $\forall$ est **très** important.

Remarque 2.5 — Nous utiliserons largement ce fait dans l'étude des suites récurrentes du type « $x_{n+1} = f(x_n)$ ».

Preuve Procédons par double implication, dans les cas où $a \in \mathbf{R}$ et $\ell \in \mathbf{R}$ (les autres cas sont laissés en exercice).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f(x) \xrightarrow{x\longrightarrow a} \ell$. Soit (x_n) une suite de points de I convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow{x\longrightarrow a} \ell$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in \mathrm{I}$:

$$|x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Or $x_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} a$, donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$:

$$n \geqslant n_0 \implies |x_n - a| \leqslant \alpha.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$n \geqslant n_0 \implies |f(x_n)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire $f(x_n) \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Prouvons l'implication réciproque par contraposée. Supposons donc que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ lorsque x tend vers a. On en déduit qu'il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0,\quad \exists x \in \mathrm{I},\quad |x-a| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad |f(x)-\ell| > \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut appliquer ce qui précède à $\alpha = \dfrac{1}{n+1}$: il existe ainsi $x_n \in \mathrm{I}$ tel que $|x_n - a| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n)-\ell| > \varepsilon$. Ainsi, (x_n) est une suite de points de I convergeant vers a, et pourtant la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ, puisqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\quad \exists n \in \mathbf{N},\quad n \geqslant n_0 \quad \text{et} \quad |f(x_n)-\ell| > \varepsilon$$

(tout entier $n \geqslant n_0$ convient).

Cet énoncé, comme le précise la méthode suivante, est utile pour montrer qu'une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ n'admet pas de limite en $a \in \overline{\mathrm{I}}$.

Méthode Nier l'existence d'une limite : fonctions d'une variable

Exhiber deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I tendant vers a, mais telles que :

$$((f(u_n))_n \quad \text{et} \quad (f(v_n))_n \quad \text{ne convergent pas vers la même limite.}$$

Exemple 6 — L'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ n'admet pas de limite en 0^+ ?

Propriétés de la limite. Nous rappelons dans ce paragraphe les propriétés (sans démonstration) de la limite à connaître.

Théorème ANA.7.2 | Stabilité des inégalités larges par passage à la limite

Soient I un intervalle, $a \in \overline{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \mathbf{R}$. Soient deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :

- $f(x) \leqslant g(x)$ dans un voisinage de a,
- $f(x) \xrightarrow[]{x \to a} \ell \in \mathbf{R}$,
- $g(x) \xrightarrow[]{x \to a} \ell' \in \mathbf{R}$.

Alors :

$$\ell \leqslant \ell'.$$

Théorème ANA.7.3 | Opérations sur les limites

Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions admettant *resp.* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbf{R}}$ pour limites en $a \in \overline{\mathrm{I}}$. Alors :

1. la fonction $|f|$ admet $|\ell|$ pour limite en a,
2. si $\{\ell, \ell'\} \neq \{-\infty, +\infty\}$, alors la fonction $f+g$ admet $\ell + \ell'$ pour limite en a,
3. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, si $(\lambda, \ell) \neq (0, \pm\infty)$, alors la fonction λf admet $\lambda \ell$ pour limite en a,
4. si $\{|\ell|, |\ell'|\} \neq \{0, +\infty\}$, alors la fonction fg admet $\ell\ell'$ pour limite en a,
5. si $\ell \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet $\dfrac{1}{\ell}$ pour limite en a,
6. si $\ell' \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet $\dfrac{\ell}{\ell'}$ pour limite en a,
7. si $\ell = 0$ et $f > 0$ dans un voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f}$ admet $+\infty$ pour limite en a.

Théorème ANA.7.4 | Compositions de limites

Soient I et J deux intervalles, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux applications, $a \in \overline{\mathrm{I}}$, $b \in \overline{\mathrm{J}}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[]{x \to a} b \\ g(y) \xrightarrow[]{y \to b} \ell \end{array}\right\} \implies g(f(x)) \xrightarrow[]{x \to a} \ell.$$

Théorème ANA.7.5 | Théorème d'encadrement

Soient I un intervalle, $a \in \overline{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \mathbf{R}$. On considère trois fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :

1. $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a,
2. les deux fonctions f et h admettent ℓ pour limite en a.

Alors :

$$g(x) \xrightarrow[]{x \to a} \ell.$$

Exemple 7 — L'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \sin \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ admet-elle une limite en 0^+ ?

Théorème ANA.7.6 | Théorème de minoration

Soient I un intervalle et $a \in \overline{\mathrm{I}}$. On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :

1. $f \leqslant$ au voisinage de a,
2. $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} +\infty$.

Alors : $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} +\infty$.

Théorème ANA.7.7 | Théorème de majoration

Soient I un intervalle et $a \in \overline{\mathrm{I}}$. On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :

1. $f \leqslant g$ au voisinage de a,
2. $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} -\infty$.

Alors : $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} -\infty$.

Théorème ANA.7.8 | Théorème de la limite monotone

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, tel que $a < b$, et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante.

1. Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b.
2. Si f n'est pas majorée, alors : $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow b} +\infty$.

2.2. Continuité

Rappelons les principaux éléments relatifs à la continuité des fonctions.

Définition ANA.7.12 | en un point

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est *continue en a* si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

Définition ANA.7.13 | sur un intervalle

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est *continue sur* I si elle est continue en tout $a \in \mathrm{I}$. Ainsi, f est continue sur I si et seulement si :

$$\forall a \in \mathrm{I}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Définition ANA.7.14 | Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ telle que : f admet une limite finie ℓ en a. On appelle alors *prolongement par continuité de f en a* la fonction $\tilde{f}$ définie sur I en par :

$$\tilde{f}(a) = \ell, \quad \tilde{f} = f \quad \text{sur } \mathrm{I} \setminus \{a\}.$$

La fonction $\tilde{f}$ est souvent encore notée $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, et elle est continue en a. On dit aussi que l'on a effectué un *prolongement par continuité de f en a*.

Exemple 8 — Prolonger par continuité les deux fonctions ci-dessous aux bornes de leur ensemble de définition.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x}, \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arctan x}{x}. \end{array} \right.$

Reformulation séquentielle. La caractérisation séquentielle de la limite nous livre donc directement celle de la continuité.

Proposition ANA.7.9 | Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathrm{I}^{\mathbf{N}},\ x_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} a, \text{ on a : } f(x_n) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} f(a).$$

Méthode — Continuité et permutation de limites

Il faut surtout retenir la caractérisation séquentielle de la manière suivante : si f est continue, et avec les mêmes notations que *supra*,

$$f\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}(\dots)\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(\dots).$$

Propriétés locales des fonctions continues. De-même que les opérations sur les limites livrent celles sur la continuité.

Proposition ANA.7.10 | Opérations sur les fonctions continues en un point

Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues en $a \in \mathrm{I}$. Alors les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbf{R}$) et fg sont encore continues en a. En outre, si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de a et est continue en a.

Théorème ANA.7.9 | Compositions de fonctions continues

Soient I et J deux intervalles, f et g deux fonctions composables :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathrm{J} \arrow[r, "g"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

et $a \in \mathrm{I}$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.

Propriétés globales des fonctions continues. On déduit immédiatement de la définition les versions globales des deux énoncés précédents :

- Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur I. Alors les fonctions $|f|, f+g, \lambda f$ (où $\lambda \in \mathbf{R}$) et fg sont encore continues sur I. En outre, si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- Soient I et J deux intervalles, f et g deux fonctions composables : $\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathrm{J} \arrow[r, "g"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$ Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

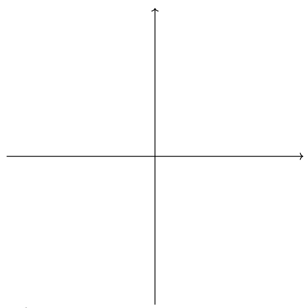
Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires.

> **Théorème ANA.7.10 | Théorème des valeurs intermédiaires**
> Soient I un intervalle, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $a \leqslant b$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application <u>**continue**</u> et c un réel entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :
> il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = c$.

Nous présentons ici une preuve « constructive » du théorème : nous allons construire x_0 comme la limite de deux suites adjacentes.

Preuve *(Approximation de x_0 par dichotomie)* Supposons pour simplifier que f est croissante $f(a) \leqslant f(b)$. On va définir deux suites (a_n) et (b_n) telles que les intervalles $[a_n, b_n]$ soient de plus en plus petits, et on montre qu'elles convergent vers une même limite x_0.
Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis par récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si :} \quad f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant c, \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{si :} \quad f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < c. \end{cases}$$



Alors, on montre par récurrence la propriété $(\mathscr{P}_n)$:

$$a_n, b_n \in [a, b], \quad a = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n, \quad b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b,$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad f(a_n) \leqslant c \leqslant f(b_n).$$

On est à présent capables de conclure.

On se rappelle la Définition ANA.8.1 d'un intervalle vue en début de chapitre, une version alternative du théorème des valeurs intermédiaires consiste à dire que l'image d'un intervalle (un ensemble «sans trou») par une application continue est également un intervalle (également «sans trou»).

Cette dernière preuve nous livre directement un algorithme pour approcher ce type de zéros.

Recherche d'un zéro par dichotomie

```
def dicho(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b avec
    ↪ précision prec
    Retourne faux si aucune racine n'existe
    """
    while b - a > prec:
        c = (a + b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            # changement de signe sur [a,c]
            b = c
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,c]
            a = c
    return (a + b)/2
```

On peut aussi adopter une version récursive.

Recherche d'un zéro par dichotomie, version récursive

```
def dicho_rec(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b avec
    ↪ précision prec
    selon un principe dichotomique
    Retourne faux si aucune racine n'existe
    """
    if f(a)*f(b) > 0:
        return False
    if b - a <= prec:
        return (a + b)/2
    else:
        c = (a + b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            # changement de signe sur [a,c]
            return dichotomie(a, c, prec)
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,c]
            return dichotomie(c, b, prec)
```

Il existe encore d'autres méthodes plus sophistiquées (méthode de Newton, de la sécante, *etc.*...), mais qui ne sont pas à notre programme, nous les aborderons donc uniquement en TP d'Informatique[2]. La démonstration précédente prouve la convergence de ces deux fonctions.

Exemple 9 — *Variations autour de la dichotomie* Adapter les codes précédents pour résoudre une équation de la forme (on admet l'existence d'une unique solution) :

1. $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$,

[2] la méthode de Newton a notamment fait l'objet d'une partie du sujet de Modélisation 2020

2. $f(x) = x$. Une telle solution est donc un *point fixe* de f, voir ci-dessous.

Dans ces deux exemples, on peut aussi très bien utiliser les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes que l'on applique aux fonctions $x \longmapsto f(x) - \alpha$ et $x \longmapsto f(x) - x$.

Exemple 10 — Toute fonction polynomiale réelle de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$. Nous l'avons montré dans le Chapter ALG.2.

Définition ANA.7.15 | Point fixe

On appelle *point fixe* d'une fonction $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$ tout réel $c \in \mathrm{D}$ tel que $f(c) = c$.

Exemple 11 — Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue. Alors, f admet un *point fixe* : il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Le théorème des valeurs intermédiaires est à utiliser lorsque l'on souhaite prouver l'existence d'un réel solution à une équation. Lorsque l'on souhaite montrer l'unicité, on aura recours au théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

Théorème ANA.7.11 | Théorème de la bijection

Soient I un *intervalle* et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction **continue** et **strictement monotone**. Alors :

1. $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.
3. la bijection réciproque $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue et strictement monotone, de même sens de monotonie que f.

Preuve Voir cours de première année.

Dans la première assertion, on peut préciser l'intervalle $f(\mathrm{I})$, selon la monotonie de f et l'intervalle I. Par exemple, si f est décroissante alors :

$$\mathrm{I} =]a, b] \qquad \Longrightarrow \qquad f(\mathrm{I}) = [f(b), \lim_a f[.$$

Attention

La fonction f n'est pas nécessairement globalement[3] bijective, mais elle **réalise une bijection de** I **sur** $f(\mathrm{I})$. Attention à la distinction entre les deux.

Méthode Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite justifier l'existence et l'unicité éventuelle d'une solution $x \in \mathbf{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(\mathrm{I})$.

Notez également que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec $g = f - \mathrm{Id}$ et $\alpha = 0$.

Exemple 12 — *Utilisation du théorème de la bijection dans deux contextes*

1. Soit $t \geqslant 0$. Le polynôme $x \longmapsto x^3 + tx - 1$ admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. **(Existence d'une suite implicite)** Soit $n \geqslant 1$, et $f_n : [0, \infty[\longmapsto x^{n+1} - x^n$. L'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_n \in [1, \infty[$.

[3] c'est-à-dire sur son ensemble de définition tout entier

Image d'un segment par une fonction continue. Le théorème suivant est également fondamental et connu sous le nom de théorème des « bornes atteintes ».

Théorème ANA.7.12 | Bornes atteintes

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Alors :

$$f \text{ est bornée sur } [a,b] \text{ et ses bornes sont atteintes.}$$

Attention

Il n'y a aucune raison pour que les bornes soient atteintes en a et b, donc sur les bords de l'intervalle. Penser à la fonction sinus sur $[0, 2\pi]$ par exemple.

Preuve Admis.

Exemple 13 — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, alors $f \circ \sin$ est bornée.

3. Dérivation

Dans cette partie, I désignera encore et toujours un intervalle de $\mathbf{R}$ *non trivial*, c'est-à-dire non vide et non réduit à un point.

3.1. Généralités et premières propriétés

Définition ANA.7.16 | Dérivabilité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application et $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est *dérivable* en x_0 si l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}\right.$$

admet une limite finie[4] en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0* et on le note $f'(x_0)$, ou encore $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Le nombre $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le *taux d'accroissement de f entre x_0 et x* et s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes. Par définition, c'est la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0.

[4] Comme $x_0 \in \mathrm{I}$ et que I est un intervalle, alors $x_0 \in \overline{\mathrm{I} \setminus \{x_0\}}$ et calculer la limite de ce quotient a bien un sens.

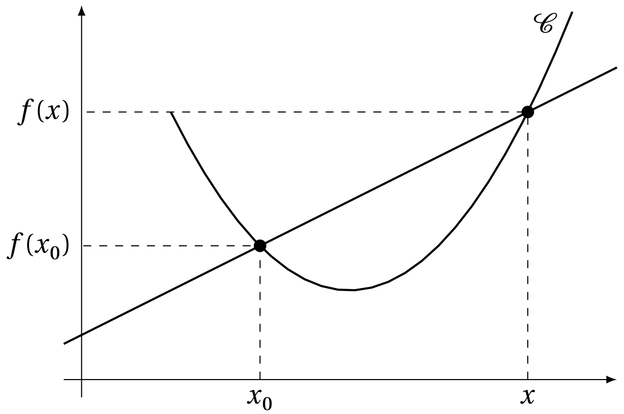


FIG. ANA.7.2. : Nombre dérivé

De même, le cas échéant, $f'_d(x_0)$ (*resp.* $f'_g(x_0)$) est la pente de la demi-tangente à droite (*resp.* à gauche) au graphe de f en x_0.

Définition ANA.7.17 | Dérivabilité à droite ou gauche

On dit que f est *dérivable à droite* (*resp. dérivable à gauche*), si $f_{|I\cap[x_0,+\infty[}$ (*resp.* $f_{|I\cap]-\infty,x_0]}$) est dérivable en x_0. Le nombre dérivé de la restriction s'appelle alors la *dérivée à droite* (*resp. dérivée à gauche*) de f en x_0 et se note $f'_d(x_0)$ (*resp.* $f'_g(x_0)$).

Définition ANA.7.18 | Ensemble $\mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbf{R})$

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en x pour tout $x \in \mathrm{I}$. On définit alors la *fonction dérivée* de f ainsi :

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

On la note f', ou encore $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.

Notation Dérivée d'une expression

Soit une expression $f(x)$ dépendant de $x \in \mathbf{R}$, avec f une fonction dérivable. On notera dans la suite indifféremment :

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ la fonction f' évaluée en x,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\right]$ la dérivée de l'expression $f(x)$ par rapport à x.

En particulier, on évitera dans la mesure du possible d'écrire $f(x)'$.

Définition ANA.7.19 | Ensemble dans $\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbf{R})$

Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I si elle est dérivable sur I et si f' est continue sur I. On note $\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbf{R}) \subset \mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbf{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Théorème ANA.7.13 | Dérivabilité et développement limité à l'ordre un

Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + c(x - x_0) + \mathrm{o}\big(x - x_0\big).$$

On a alors $c = f'(x_0)$. En particulier, si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVABILITÉ. Comme pour les propriétés sur les limites, celles sur la dérivabilité sont rappelées sans démonstration.

Théorème ANA.7.14 | Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbf{R}$ dérivables en $x_0 \in \mathrm{I}$.

- $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- si $g(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

- si $g(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (en supposant que $f(x_0) \neq 0$ si $n \leqslant 0$), alors f^n (puissance $n^{\text{ème}}$) est dérivable en x_0 et :
$(f^n)'(x_0) = nf^{n-1}(x_0)f'(x_0)$.

Corollaire ANA.7.1 | Reformulation linéaire

- Les triplets $\left(\mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R}), +, \times|_{\mathbf{R}\times\mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbf{R})}\right)$, $\left(\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R}), +, \times|_{\mathbf{R}\times\mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbf{R})}\right)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R})$.
- La dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{F}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ est une application linéaire.

Théorème ANA.7.15 | Dérivation d'une composée

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables en $x_0 \in \mathrm{I}$ et $f(x_0) \in \mathrm{J}$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

Par conséquent, si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions dérivables sur I et J. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'.$$

Appliquant ceci à la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ lorsque f est bijective d'inverse f, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire ANA.7.2 | Dérivation d'une bijection réciproque

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ une application bijective et continue et $y_0 \in \mathrm{J}$. Si :
- f est dérivable en $f^{-1}(y_0) \in \mathrm{I}$,
- et $f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0$,

alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}\text{[5]}.$$

En particulier, si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ est une bijection, dérivable sur I, alors si f' ne s'annule pas, la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

L'exemple ci-dessous est à très bien connaître.

Exemple 14 — *Existence d'*arctan *et graphe.*

1. Rappeler le principe de construction de arctan, ainsi que son graphe.

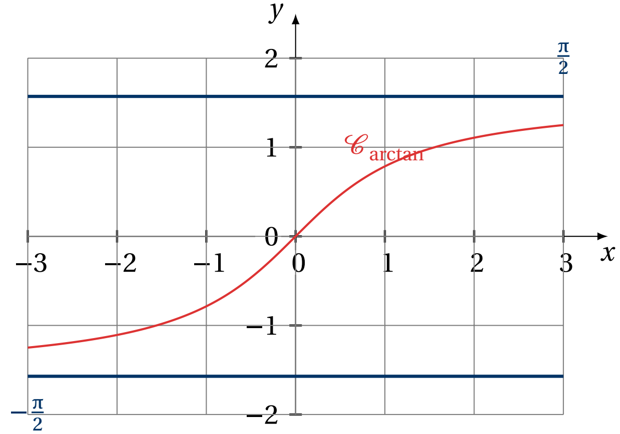


FIG. ANA.7.3. : Graphe de l'arctangente

2.

[5] l'hypothèse est très simple à retenir, puisque c'est l'hypothèse garantissant la non-nullité du dénominateur dans cette formule

3. Calculer $\arctan'$ après avoir justifié l'existence sur un ensemble à préciser.

4. Montrer la formule : $\forall x \in \mathbf{R}^{\star}, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\,\frac{\pi}{2}$.

Cette construction d'un inverse peut être aussi faite sur les fonctions cos, sin en restreignant correctement l'ensemble de définition, les fonctions inverses sont alors notées arccos, arcsin mais ne sont pas au programme de BCPST. Nous les étudierons donc uniquement en TD.

3.2. Dérivées d'ordre supérieur

Définition ANA.7.20 | Classe $\mathscr{D}^n$

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On définit, sous réserve d'existence, les *dérivées successives* de f en posant $f^{(0)} = f$ et pour $n \in \mathbf{N}$:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Définition ANA.7.21 | Classe $\mathscr{C}^n$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I,
- et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

La fonction est dite *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Notation

- L'application $f^{(n)}$ est aussi notée ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. On note encore f'', f''', *etc*, pour $f^{(2)}, f^{(3)}$, *etc*.
- On note $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ (*resp.* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (*resp.* $\mathscr{C}^\infty$) sur I et à valeurs réelles.

Exemple 15 — La fonction sin est $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Résumé — Lien entre les notions de régularités pour les fonctions d'une variable

Proposition ANA.7.11 | Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n/\mathscr{D}^n$

Soient $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $(f, g) \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})^2$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$) et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

- $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$),
- $fg \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$),
- et si g ne s'annule pas, alors : $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R}) \quad$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$).

Corollaire ANA.7.3

Soit $n \geqslant 0$. Les triplets

$$\left(\mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R}), +, \times|_{\mathbf{R}\times\mathscr{D}^n(\mathrm{I},\mathbf{R})}\right), \quad \left(\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R}), +, \times|_{\mathbf{R}\times\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbf{R})}\right)$$

sont des espaces vectoriels.

Théorème ANA.7.16 | Composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n/\mathscr{D}^n$

Soient $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ (*resp.* $\mathscr{D}^n(\mathrm{J}, \mathbf{R})$) et $g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J}, \mathbf{R})$ (*resp.* $\mathscr{D}^n(\mathrm{J}, \mathbf{R})$). Alors : $g \circ f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ (*resp.* $\mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$).

Théorème ANA.7.17 | Réciproque d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n/\mathscr{D}^n$

Soient $n \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ et $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ (*resp.* $\mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$). On suppose que f' ne s'annule pas sur I. La fonction f réalise une bijection de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$, et :

$$f^{-1} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J}, \mathrm{I}), \quad (\textit{resp.}\, \mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R}).$$

3.3. *Extrema* et théorème de ROLLE

Définition ANA.7.22 | Extrema

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ admet en $x_0 \in \mathrm{I}$ un *minimum* (*resp. maximum*) si :

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in \mathrm{I}, & f(x) \geqslant f(x_0) \\ (\textit{resp.} & \forall x \in \mathrm{I}, & f(x) \leqslant f(x_0)). \end{array}$$

On dit que f admet en $x_0 \in \mathrm{I}$ un *minimum local* (*resp. maximum local*) s'il existe

$\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathrm{I} \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, & f(x) \geqslant f(x_0) \\ (\textit{resp.} \quad \forall x \in \mathrm{I} \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, & f(x) \leqslant f(x_0)). \end{array}$$

On dit que f admet en x_0 un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).

Notation

Lorsque f admet un unique minimum (*resp.* maximum) global x_0 sur I, on note généralement

$$x_0 = \operatorname{argmin}_{\mathrm{I}} f, \quad \textit{resp.} \quad x_0 = \operatorname{argmax}_{\mathrm{I}} f.$$

Définition ANA.7.23 | Point critique

On appelle *point critique* d'une fonction dérivable $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ tout réel $x \in \mathrm{I}$ tel que $f'(x) = 0$.

Théorème ANA.7.18 | Condition nécessaire pour qu'un point intérieur soit un extremum local

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application et $c \in \mathrm{I}$. On suppose que :

1. c est à l'intérieur de I, *i.e.* il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant : $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset \mathrm{I}$,
2. f admet en c un extremum local,
3. f est dérivable en c.

Alors

$$c \text{ est un point critique de } f.$$

Preuve Supposons par exemple que f possède un maximum local en c, alors quitte à diminuer ε, nous pouvons supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset \mathrm{I}$ et :

$$\forall x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[, \quad f(x) \leqslant f(c).$$

Ainsi,

$$\forall x \in]c - \varepsilon, c[\quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0, \quad \forall x \in]c, c + \varepsilon[\quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

Comme f est dérivable, les limites à gauche et droite en c du taux d'accroissement sont les mêmes, égales au nombre dérivé. Ici, en passant à la limite dans les inégalités précédentes il devrait donc être positif et négatif à la fois, donc nul.

Attention La condition « c est à l'intérieur de I » est indispensable

Si $f : x \in [2,5] \longrightarrow x^2$, elle admet un minimum en $2, f(2) = 4$, un maximum en $5, f(5) = 25$ et pourtant $2, 5$ ne sont pas des points critiques.

Théorème ANA.7.19 | Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ (où $a < b$) une fonction telle que :

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, la courbe possède une tangente horizontale.

Attention

Il n'y a pas unicité d'un tel c. Prendre par exemple la fonction sin sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Remarque 3.1 — Dans le théorème de Rolle,

- f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle (considérer $x \longrightarrow \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$).
- La continuité aux bornes est nécessaire (considérer $x \longrightarrow x - \lfloor x \rfloor$ sur $[0, 1]$).
- La dérivabilité est nécessaire : considérer $x \longrightarrow |x|$ sur $[-1, 1]$.

Preuve Si f est constante sur $[a, b]$, alors le résultat est évident. Sinon, l'application f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un minimum et un maximum distincts sur cet intervalle. Au moins un de ces *extrema* est différent de $f(a) = f(b)$ et correspond donc à un point intérieur à $[a, b]$, c'est-à-dire à un point de $]a, b[$. Le Théorème ANA.7.18 conclut.

Ce théorème peut être très utile pour prouver l'existence de zéros d'une fonction.

Exemple 16 — *Itération de Rolle et entrelacement des points d'annulation* Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable.

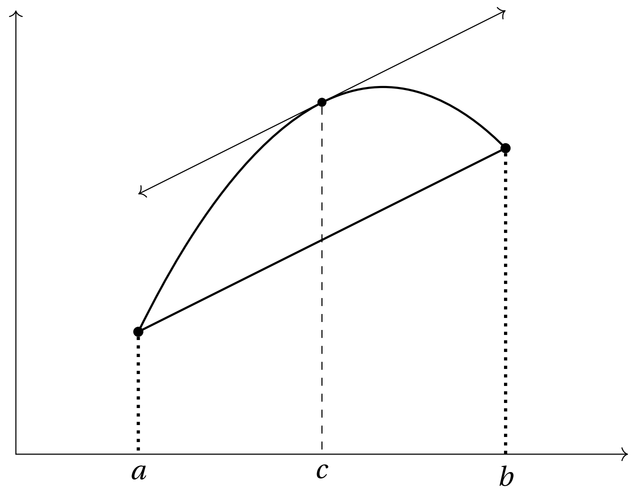
1. Si f s'annule $n+1$ fois, alors f' s'annule au moins n fois.
2. En appliquant plusieurs fois ce résultat, déduire que si f est n fois dérivable et s'annule $n+1$ fois, alors $f^{(n)}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f, s'annule au moins une fois.

Théorème ANA.7.20 | Égalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ (où $a < b$) une fonction telle que :
1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, la pente de la tangente vaut celle de la sécante entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Preuve

Exemple 17 — Montrons à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0,x]$ pour tout $x>0$) que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

4. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Il est nécessaire de revoir les relations de comparaison au programme de BCPST (équivalent et « petit o ») **avant** d'aborder ce paragraphe.

Exemple 18 — ***Manipulations de petit o***

- $x^2 = \mathrm{o}(x^4)$, MAIS : $x^4 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$,
- $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, MAIS : $\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
- $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^4)$. $2^n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(3^n)$, $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exemple 19 — ***Manipulations d'équivalents*** La symbole équivalent est à manipuler avec d'extrêmes précautions : retenez que les seules opérations compatibles sont la multiplication, le quotient et les puissances d'équivalents

- $n \underset{n\to\infty}{\sim} n+1$,
- et pourtant $\mathrm{e}^n \underset{n\to\infty}{\not\sim} \mathrm{e}^{n+1}$.
- En revanche, on peut montrer l'équivalent suivant : $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$. On consultera l'Exemple 24 ci-après.

Nous rappelons ici uniquement les résultats théoriques classiques qui fondent les développements limités, ainsi que la liste des développements à connaître (ou au moins à savoir retrouver très rapidement).

4.1. Généralités

Définition ANA.7.24 | Définition d'un développement limité

Soient un intervalle I, un réel $x_0 \in \bar{\mathrm{I}} \cap \mathbf{R}$, un entier $n \in \mathbf{N}$ et une application $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right). \quad \text{(DL)}$$

Le polynôme

$$\mathrm{R}_n(\mathrm{X}) \underset{\textbf{(défi.)}}{=} a_0 + a_1(\mathrm{X}-x_0) + a_2(\mathrm{X}-x_0)^2 + ... + a_n(\mathrm{X}-x_0)^n$$

est appelé *partie régulière* (ou *principale,entière*), du développement limité.

Notation

Nous noterons $\mathrm{DL}_n(x_0)$ pour « développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 ».

Remarque 4.1 — Admettre un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ signifie donc que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{(f-\mathrm{R}_n(f))(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

On rappelle qu'un terme noté $\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right)$ est un terme qui s'écrit sous la $\varepsilon(x)(x-x_0)^n$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x\longrightarrow x_0} 0$, et c'est une fonction définie au moins au voisinage de x_0. De plus, on a la règle de calcul suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right)}{x-x_0} = \mathrm{o}\left((x-x_0)^{n-1}\right)}.$$

Ainsi, quand on divise un développement limité, il ne faut pas oublier de diviser les petit o. En cas de doute, mieux vaut toujours se ramener au brouillon à la notation $\varepsilon(x)(x-x_0)^n$ avant de faire des manipulations.

Puisque Eq. (DL) n'est finalement qu'une limite déguisée, et que l'on peut faire des changements de variable dans les limites, nous pouvons donc aussi en faire dans les développements limités.

Méthode Translation x_0 dans un développement limité

Si $x_0 \neq 0$, alors la recherche d'un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ pour une fonction f se fera en se ramenant au voisinage de 0 par le changement de variable « $h = x - x_0$ ». Plus précisément,

1. considérer $g : h \longmapsto f(x_0+h)$,
2. faire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g : on obtient une expression du type $g(h) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{R}_n(h) + \mathrm{o}(h^n)$ (avec R_n fonction polynomiale de degré n définie au voisinage de zéro),
3. un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f est alors : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{R}_n(x-x_0) + \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big)$.

Propriétés des développements limités. Les développements limités satisfont des propriétés très similaires aux polynômes, la plus notable est l'identification coefficient par coefficient appelée plus sobrement *unicité du développement limité* dans la suite.

Proposition ANA.7.12 | Premières propriétés

Soient $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(x_0)$. Alors :

- la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(x_0)$ est unique,
- **(Troncation)** f admet un $\mathrm{DL}_p(x_0)$ pour tout $p \leqslant n$.
- Si $x_0 = 0$ et f est paire (*resp.* impaire), alors la partie principale du $\mathrm{DL}_n(0)$ est un polynôme pair (*resp.* impair).
- Soient g une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et la partie régulière est obtenue par combinaison linéaire des parties régulières des $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f et g.

Preuve Montrons la propriété de troncation.

Proposition ANA.7.13 | Continuité, dérivabilité et développement limité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

- f est continue en x_0 si et seulement si elle admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$: $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + \mathrm{o}(1)$. On a alors $a = f(x_0)$.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$: $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + b(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0)$. On a alors $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Attention

Cet énoncé ne se généralise **pas** pour des valeurs supérieures de n.

Exemple 20 — *Contre-exemple* Par exemple, pour $n \geqslant 2$, l'application

$$f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Pourtant, f' n'est pas continue en 0, donc f n'est même pas deux fois dérivable.

Proposition ANA.7.14 | Développement limité et prolongement

Soient $x_0 \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$[6],

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a + b(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0),$$

alors la fonction f se prolonge par continuité en x_0, en posant $f(x_0) = a$. De plus, la fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0 de dérivée égale à b.

Preuve

Méthode Prolongement

Pour montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité et/ou dérivable en un point x_0, il suffit de faire un développement limité d'ordre 0/1 au voisinage de ce point.

[6] il n'y a rien d'anormal au fait qu'une fonction *a priori* non définie en un point admette un développement limité en ce point. Car, rappelons-le, un développement limité est un résultat sur une limite, la variable **tend vers** x_0 mais en restant dans l'ensemble de définition.

Exemple 21 — Étudier l'existence d'un prolongement continu en zéro pour $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$, étudier la dérivabilité du prolongement.

Proposition ANA.7.15 | Développement limité et équivalent

Soit f une fonction admettant un développement limité écrit sous la forme suivante :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} (x - x_0)^p \left(a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right)\right),$$

avec $\boxed{a_0 \neq 0}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Alors : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a_0(x - x_0)^p$.

Preuve En mettant en facteur le premier terme, on obtient puisque $a_0 \neq 0$:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0(x - x_0)^p \times \left(1 + \frac{a_1}{a_0}(x - x_0) + \frac{a_2}{a_0}((x - x_0)^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0}((x - x_0)^n + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right)\right).$$

Il reste à faire tendre x vers x_0 et à constater que la parenthèse converge vers 1. De plus, une autre écriture donne, en supposant $a_1 \neq 0$:

$$f(x) - a_0(x - x_0)^p \underset{x \to x_0}{=} a_1(x - x_1)^{p+1}\left(1 + \frac{a_2}{a_1}(x - x_0) + \frac{a_3}{a_1}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_1}(x - x_0)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x - x_0)^{n-1}\right)\right).$$

La parenthèse est positive pour x assez proche de x_0 (puisqu'elle tend vers 1), donc le signe de $x \longmapsto f(x) - a_0(x-x_0)^p$ au voisinage de zéro est donné par celui de $x \longmapsto a_1(x-x_1)^{p+1}$. Si $a_1 = 0$ on factorise simplement par le premier coefficient non nul.

Méthode Recherche d'équivalent/Signe local d'une fonction

On lit :

1. un équivalent de fonction au voisinage de x_0 en regardant le **premier terme non nul** du $\mathrm{DL}_n(x_0)$ pour un certain entier n assez grand (de sorte que le développement limité ne soit pas nul).
2. le signe de f au voisinage de x_0 grâce à celui de $a_0(x-x_0)^p$. Cela dépend donc de la parité de p notamment.

Nous allons voir à présent comment obtenir concrètement l'expression d'un développement limité. La formule de TAYLOR-YOUNG ci-dessous nous propose une hypothèse (caractère $\mathscr{C}^n$ fois dérivable) pour avoir l'existence d'un développement limité à l'ordre n, en plus les coefficients du développement sont donnés par les dérivées successives de la fonction. Bien entendu, nous n'allons pas nous amuser à calculer ces dérivées successives à chaque fois. Nous allons plutôt calculer les développements des fonctions usuelles, puis effectuer des opérations (somme, produit, primitivation, *etc.*...) pour obtenir celui qui nous intéresse.

4.2. Développement géométrique

La formule de sommation de termes géométriques nous permet aisément de déduire un premier développement limité.

Théorème ANA.7.21 | Développement limité géométrique

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n), \qquad \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Preuve D'après la formule sur les sommes de termes géométriques, nous avons pour tout $x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \iff \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Mais $\frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$, on déduit alors la formule.

On en déduit aisément, par compositions des limites, les développements suivants :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

4.3. Développements obtenus par la formule de TAYLOR-YOUNG

Pour obtenir notamment celui de l'exponentielle, nous allons nous servir de la formule de TAYLOR-YOUNG.

Théorème ANA.7.22 | Formule de TAYLOR-YOUNG

Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$[7], où I est un intervalle tel que $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$:

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big),$$

$$\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big).$$

[7] Ce n'est pas la meilleure hypothèse, mais celle du programme. On pourrait la supposer $\mathscr{D}^n$ sur I si $n \neq 0$ et continue sinon.

Attention

Il existe des fonctions admettant un développement limité à l'ordre n mais qui ne sont pas $\mathscr{C}^n$ (on peut regarder à nouveau l'Exemple 20) précédent. La formule de Taylor-Young donne une **condition nécessaire** uniquement pour l'existence d'un développement limité.

Preuve Récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, en admettant provisoirement le Lemme ANA.7.1 (de primitivation des développements limités) présenté plus bas.

- Pour $n = 0$: la formule correspond à la définition de la continuité de f en x_0.
- Supposons la formule vérifiée à l'ordre n. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f' est de classe $\mathscr{C}^n$, et donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right).$$

Le résultat de primitivation terme à terme (Lemme ANA.7.1) fournit alors :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Il reste alors à effectuer le changement de variable $\ell = k+1$ dans la somme, cela nous donne la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit les développements limités suivants au voisinage de 0 :

Proposition ANA.7.16 | Développements limités provenant de Taylor-Young

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}), \\
\sin x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}), \\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{0\leqslant q<k} (\alpha - q)\right) \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n),
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

Preuve Constatons, par exemple, le tout dernier.

Exemple 22 — On en déduit par exemple :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2), \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2).
\end{aligned}$$

Exemple 23 — Déterminer un développement limité à l'ordre $x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ au voisinage de zéro à l'ordre 2.

4.4. Développements obtenus par primitivation

Lemme ANA.7.1 | Primitivation des $o(\cdots)$

Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $n \in \mathbf{N}$. Si

$$f'(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big),$$

alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \mathrm{o}\big((x-x_0)^{n+1}\big),$$

ou de manière équivalente[8]

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{o}\left(\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,\mathrm{d}t\right).$$

[8] Étant donné que la constante $\frac{1}{n+1}$ qui apparaît en calculant l'intégrale de droite peut être omise dans le petit o.

Preuve Soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}$. Notons

$$\mathrm{I}_x \quad (\mathit{resp.}\overline{\mathrm{I}_x}) = \begin{cases}]x_0, x[& (\mathit{resp.}[x_0, x]) \quad \text{si } x_0 < x, \\ ]x, x_0[& (\mathit{resp.}[x, x_0]) \quad \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\overline{\mathrm{I}_x}$ et dérivable sur I_x, donc par l'égalité des accroissements finis, on sait qu'il existe $c_x \in \mathrm{I}_x$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x).$$

Comme $c_x \in \mathrm{I}_x$, alors $0 < |c_x - x_0| \leqslant |x - x_0|$. On en déduit :

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|x-x_0|^n}|f'(c_x)| \leqslant \left|\frac{f'(c_x)}{(c_x - x_0)^n}\right|.$$

Or par hypothèse $\left|\frac{f'(t)}{(t-x_0)^n}\right| \xrightarrow{t\to x_0} 0$, et $c_x \xrightarrow{x\to x_0} x_0$ (car $c_x \in \mathrm{I}_x$), d'où par composition de limites :

$$\left|\frac{f'(c_x)}{(c_x - x_0)^n}\right| \xrightarrow{x\to x_0} 0.$$

Par le théorème de convergence par encadrement, il vient donc $\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}\right| \xrightarrow{x\to x_0} 0$, d'où le résultat.

Théorème ANA.7.23 | Primitivation de développement limité

Soient I un intervalle contenant x_0 et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de la forme :

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big) \\ &\underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big). \end{aligned}$$

Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(x_0)$ dont la partie régulière est obtenue en primitivant celle de f' et en ajoutant $f(x_0)$:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+\mathrm{o}\big((x-x_0)^{n+1}\big)\\ &\underset{x\to x_0}{=} \boxed{f(x_0)}^{9}+a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\\ &+ \mathrm{o}\big((x-x_0)^{n+1}\big). \end{aligned}$$

Preuve Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la fonction g définie par : $g(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ définie pour x assez proche de x_0.

Le théorème précédent permet d'obtenir de nouveaux développements limités. Pour tout $n\in\mathbf{N}$ (le cas échéant) :

Proposition ANA.7.17 | Développements limités obtenus par primitivation

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\mathrm{o}(x^n),\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n).\\ \arctan x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\mathrm{o}(x^{2n+2}),\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+2}). \end{aligned}$$

Preuve Il suffit de primitiver les développements limités de $x\longmapsto\frac{1}{1+x}$ et $x\longmapsto\frac{1}{1+x^2}$ au voisinage de zéro.

Exemple 24 — Montrer que $\ln(n+1)\underset{n\to\infty}{\sim}\ln(n)$.

[9] Il y a donc une constante qui apparaît que l'on pourrait appeler « constante de primitivation »

Exemple 25 — En utilisant les développements limités précédents, faire l'étude locale de $f(x)=\dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$ au voisinage de 0.

4.5. Développements obtenus par produits

Théorème ANA.7.24 | Produit de développements limités.
Si deux fonction f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières F et G respectivement, alors fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit FG.

Preuve Multiplier et tronquer le développement limité obtenu.

Exemple 26 — Déterminons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+x}.\cos x$.

Remarque 4.2 — Ordre d'un produit de développements limités

- Les termes d'ordre strictement supérieur à n n'ont pas de signification particulière et sont « absorbés » par le $o(x^n)$. On ne doit surtout pas les garder... dans le cas contraire, l'identité fournie ne sera pas un développement limité.
- Il est important d'observer que si l'on effectue le produit de deux développements limités dont les premiers coefficients sont nuls, alors on gagne des ordres dans le développement limité produit ! Ceci sert pour prévoir les ordres nécessaires dans chacun des facteurs lorsque l'on veut un certain ordre pour le produit.

Exemple 27 — Donner le développement limité d'ordre maximal[10] de $\left(x^2-2x^3+o(x^3)\right)\left(5x^3-x^4+o(x^4)\right)$ au voisinage de zéro.

Exemple 28 — Déterminer un développement limité des expressions suivantes :

[10] Compte-tenu des informations que l'on vous donne.

1. $x \longmapsto (\cos x - 1)(\sin x - x)$ à l'ordre sept en zéro. *Le premier terme de* $\cos -1$ *est d'ordre deux, le premier de* $x \longmapsto \sin(x) - x$ *est d'ordre trois. Donc il va falloir pousser le développement limité de* $\cos -1$ *à l'ordre 4 (solution de* $3 + p = 7$ *avec* $p \in \mathbf{N}$*) et il va falloir pousser le développement limité de* $x \longmapsto \sin(x) - x$ *à l'ordre 3 (solution de* $4 + p = 7$ *avec* $p \in \mathbf{N}$*. Ceci étant dit, passons aux calculs.*

$$\begin{aligned}(\cos x - 1)(\sin x - x) &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)\right)\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^5)\right) \\ &= \frac{x^5}{6} - x^7\left(\frac{1}{2.5!} + \frac{1}{4!3!}\right) + \mathrm{o}(x^7).\end{aligned}$$

2. $\sin^6$ à l'ordre 8,

Résumé

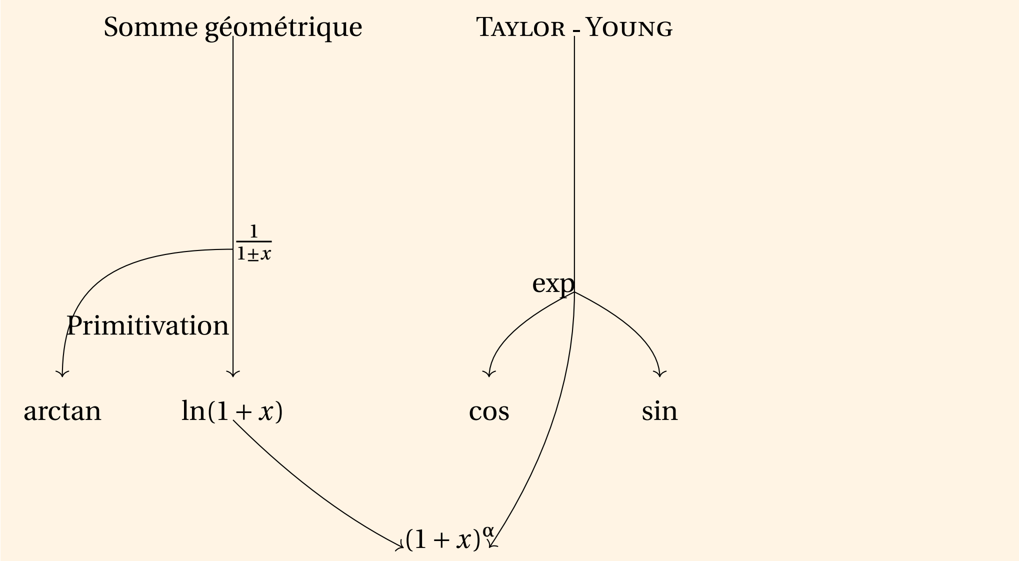


Fig. ANA.7.4. : Carte mentale des développements limités

4.6. Composition de développements limités

Par exemple, supposons connu un $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction f est connu

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Peut-on écrire

$$f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + \mathrm{o}(x^n) \quad ?$$

La réponse est **oui** — par composition de limites (puisque $\mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}((-x)^n)$). Nous avons déjà utilisé cet argument. Voyons quelques exemples.

Exemple 29 — On note $f : x \longmapsto \ln(\cos x)$ pour x dans son domaine de définition.

1. Déterminer le domaine de définition de f et justifier qu'elle admet un développement limité à l'ordre quatre au voisinage de zéro.

2. Déterminer ce développement limité.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du chapitre** ⋆ ⋆ ⋆

5. EXERCICES

Exercice ANA.7.1 | **Vrai ou Faux ?**

1. L'inverse d'une fonction bornée strictement positive est borné.
2. Une fonction quotient de fonctions décroissantes est croissante.
3. Une fonction continue bornée atteint ses bornes.
4. La fonction $x \longmapsto x\,|x|$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} h(x)$, alors $xf(x) \sim 0(x+\sqrt{x})h(x)$.
6. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$.

5.1. Continuité

Exercice ANA.7.2 | Étudier la définition et la continuité éventuelle de $f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right)$.

Solution (exercice ANA.7.2)

La fonction est continue sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.
Soit $k \in 2\mathbf{Z}$ un entier pair. Alors $\lim_{x\to k,>} f(x) = \lim_{x\to k,>}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, même chose à gauche :
$\lim_{x\to k,<} f(x) = -\lim_{x\to k,<}\left(x-(k-1)-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, bref f est continue également aux entiers pairs.
Soit $k \in 2\mathbf{Z}+1$, $\lim_{x\to k,>} f(x) = -\lim_{x\to k,>}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to k,<} f(x) = \lim_{x\to k,<}\left(x-(k-1)-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, elle l'est aussi aux entiers impairs.
Donc : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R} \text{ tout entier}}$.

Exercice ANA.7.3 | Soient f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$(x) = \lfloor x\rfloor \sin(\pi x) \qquad g(x) = \lfloor x\rfloor \sin(x).$$

Étudier leur continuité sur $\mathbf{R}$.

Solution (exercice ANA.7.3)

Les fonctions f et g sont trivialement continues sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.
Étudions la continuité aux entiers relatifs $k \in \mathbf{Z}$. On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow k^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^+}\big(k\times\sin(k\pi)\big) = k\times 0 = 0$. De-même, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow k^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^-}\big((k-1)\times\sin(k\pi)\big) = (k-1)(-1)^{k-1} = 0$.
En revanche, pour g, nous obtiendrons de la même façon :
$\lim\limits_{x\longrightarrow k^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^+}\big(k\times\sin(k)\big) = k\sin k$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow k^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^+}\big((k-1)\times\sin(k)\big) = (k-1)\sin k \neq k\sin k$ dès que $\sin k \neq 0$. En conclusion : $\boxed{f \text{ est continue, } g \text{ ne l'est pas.}}$

Exercice ANA.7.4 | Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe x_1 et x_2 dans $[0;1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Solution (exercice ANA.7.4)

Il s'agit de montrer qu'il existe $x_2 \in [0,1]$ tel que

$$f\left(x_2+\frac{1}{2}\right) = f(x_2).$$

Pour cela, introduisons la fonction $g \left| \begin{array}{ccc} [0,1/2] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ x & \longmapsto & f(x+1/2)-f(x). \end{array}\right.$ Elle est continue en tant que différence de telles fonctions, et de plus $g(1/2) = f(1) - f(1/2)$, $g(0) = f(1/2) - f(0) = -g(1)$. Donc g change de signe sur $[0,1/2]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_2 \in [0,1/2]$ tel que $g(1/2) = 0$, *i.e.* $f\left(x_2+\frac{1}{2}\right) = f(x_2)$. En posant $x_1 = x_2 + \frac{1}{2}$, on a donc montré :

$$\exists x_1, x_2 \in [0,1], \boxed{f(x_1) = f(x_2), \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{2}}.$$

Exercice ANA.7.5 | **Agro—Véto** Soit $t \geqslant 0$, pour tout x, on pose $\mathrm{P}_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Montrer que P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. **2.1)** Montrer que $u(\mathbf{R}^+) \subset]0,1]$.
   2.2) Démontrer que u est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$.

2.3) Calculer $\lim_{t\longrightarrow\infty} u(t)$. *Indication : Utiliser l'expression de* $\mathrm{P}_t(u(t))$.

2.4) Montrer que u est bijective de $\mathbf{R}^+$ vers $]0,1]$, de réciproque :

$$v : \begin{cases}]0;1] & \to \mathbf{R}^+, \\ y & \longmapsto \frac{1-y^3}{y}. \end{cases}.$$

2.5) Représenter graphiquement cette fonction à l'aide de Python sur $]0,1]$. En déduire le tracé de la représentation graphique de u.

2.6) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbf{R}^+$.

2.7) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbf{R}^+$, puis déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t et $u(t)$.

Solution (exercice ANA.7.5)

1. La fonctionP_t est strictement croissante puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{P}_t'(x) = 3x^2 + t \geqslant 0$ (et est nulle uniquement lorsque $x = t = 0$). Elle est de plus continue, car polynomiale. Donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $[-\infty,\infty] \ni 0$. Donc $\boxed{\mathrm{P}_t \text{ admet une unique racine réelle } u(t).}$

2. **2.1)** IL s'agit de montrer que $u(t) \in]0,1]$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, donc d'affiner le théorème de la bijection précédent. La fonction P_t est toujours continue et $\mathrm{P}_t(0) = -1 < 0, \mathrm{P}_t(1) = t \geqslant 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $u(t) \in]0,1]$. Donc $\boxed{u(\mathbf{R}^+) \subset]0,1].}$

2.2) Soient $t < s$, montrons que $u(t) \leqslant u(s)$. Pour cela, calculons $\mathrm{P}_t(u(s))$ (ou $\mathrm{P}_s(u(t))$) et cherchons son signe.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_t(u(s)) &= u(s)^3 + tu(s) - 1 \\ &< u(s)^3 + su(s) - 1 \quad t \leqslant s \\ &= \mathrm{P}_s(u(s)) = \mathrm{P}_t(u(t)). \end{aligned}$$

Or P_t est strictement croissante, donc $u(s) < u(t)$. Donc $\boxed{u \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R}^+.}$

2.3) On sait que $\lim_{t\longrightarrow\infty} u(t)$ existe d'après le théorème de convergence monotone puisque u est décroissante minorée par zéro, et notons $\ell = \lim_{t\longrightarrow\infty} u(t) \in [0,1]$. Supposons donc que $\ell \in]0,1]$. Alors comme

$$tu(t)^3 + tu(t) = 1,$$

on voit que $\lim_{t\longrightarrow\infty} \left(tu(t)^3 + tu(t)\right) = \infty$ par règles usuelles sur les limites alors que le membre de droite converge vers 1 — contradiction. Donc $\boxed{\lim_{t\longrightarrow\infty} u(t) = 0.}$

2.4) On ne peut se contenter du théorème de la bijection, puisqu'on ne sait pas si u est continue. Soit donc $y \in]0,1]$, résolvons en $t \in \mathbf{R}^+$,

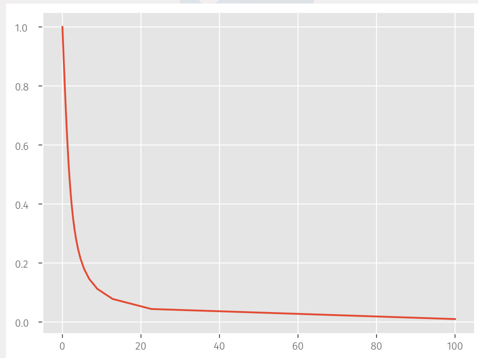
$$u(t) = y \iff \mathrm{P}_t(y) = 0 \iff y^3 + ty = 1 \iff t = \frac{1-y^3}{y}.$$

Donc u est bijective de $\mathbf{R}^+$ vers $]0,1]$, de réciproque :

$$\boxed{v : \begin{cases}]0;1] & \to \mathbf{R}^+, \\ y & \longmapsto \frac{1-y^3}{y}. \end{cases}}.$$

2.5) Représentons graphiquement cette fonction à l'aide de Python sur $]0,1]$, pour avoir le tracé de u on effectue un symétrie d'axe $y = x$ en inversant les variables dans `plt.plot`

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(0.01, 1, 10*3)
Y = [(1-x**3)/x for x in X]
plt.plot(Y, X)
```



2.6) Puisque v est continue par opérations élémentaires, la fonction $\boxed{u \text{ est alors continue sur } \mathbf{R}^+.}$

2.7) Nous avons

$$u'(t) = (v^{-1})'(t) = \frac{1}{v' \circ u(t)},$$

pour tout t tel que $v' \circ u(t) \neq 0$. Or $v'(y) = \frac{-3y^3-(1-y^3)}{y^2} = \frac{-(2y^3+1)}{y^2}$ pour tout $y \in]0,1]$. Donc $v' \circ u(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ puisque $u(t) \geqslant 0$. Et

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \frac{-u(t)^2}{(2u(t)^3+1)}}.$$

5.2. Dérivabilité

Exercice ANA.7.6 | Étude complète de fonction Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad g(x) = e^x - xe^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g et tracer son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}^+$. On note α cette solution.
4. Écrire un programme `ValeurApprocheeAlpha` qui calcule une valeur approchée de α à $\varepsilon = 10^{-3}$ près.
5. Soit A la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\quad \forall x \in [0,+\infty[, \quad A(x) = \frac{4x}{e^x+1}$.
   - **5.1)** Etudier la dérivabilité de A, et écrire A′ en fonction de g.
   - **5.2)** En déduire les variations de A sur $\mathbf{R}^+$.

Solution (exercice ANA.7.6)

Notons $\mathscr{D}_g = [0,\infty[$.

1. Nous avons pour tout $x \in \mathscr{D}_g$.
$$g(x) = e^x\left(1 - x + e^{-x}\right),$$
mais $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - x + e^{-x}\right) = -\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty.}$

2. Pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \leqslant 0$. Donc g est décroissante et on a la tableau ci-après.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

3. On ne peut pas la résoudre, donc appliquons le théorème de la bijection. La fonction g est strictement décroissante, continue et $g(\mathscr{D}_g) =]-\infty, 2] \ni 0$, donc g réalise une bijection de $\mathscr{D}_g$ sur $g(\mathscr{D}_g)$, donc $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbf{R}^+}$. On note α cette unique solution.
4. En tapant dans la console la valeur de g en 2 on trouve que $g(2) \leqslant 0$.

```python
import math as ma

def g(x):
    return ma.exp(x)-x*ma.exp(x)+1

def ValeurApprocheeAlpha(prec):
    """
    Retourne une valeur approchée de alpha à précision prec
    Retourne faux si aucune racine n'existe
    """
    a = 0
    b = 2
    if g(a)*g(b) > 0:
        return False
    while b - a > prec:
        c = (a + b)/2
```

```
        if g(a)*g(c) <= 0:
            # changement de signe sur [a,c]
            b = c
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,c]
            a = c
    return (a + b)/2
```

Alors `ValeurApprocheeAlpha(10**(-3))` retourne 1.27880859375.

5. Soit A la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad A(x) = \frac{4x}{e^x+1}$.

5.1) Etudier la dérivabilité de A, et écrire A′ en fonction de g.

5.2) En déduire les variations de A sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice ANA.7.7 | Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. On note $f_a : x \longmapsto \frac{1}{x-a}$. Montrer que f_a est n fois dérivable sur un ensemble à préciser, et calculer sa dérivée n-ième.

2. Calculer, après avoir justifié leur existence, les dérivées d'ordre n de la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, pour tout x dans un ensemble à préciser.

Solution (exercice ANA.7.7)

1. Soit $a \in \mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{a\}, \quad \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \left((x-a)^{-1}\right)^{(n)} = \left((-1)(x-a)^{-2}\right)^{(n-1)} = \ldots = \left((-1)^n n!(x-a)^{-1-n}\right)^{(n-1)}.$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{a\}, \quad \boxed{\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}}.$$

2. Nous avons $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}\setminus\{1,2,3\}$. La fonction g est un quotient de fonctions dérivables n fois, donc g l'est également. Cherchons A, B, C tels que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad g(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Pour déterminer les constantes, réduisons au même dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} &= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+(6A+3B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.\end{aligned}$$

On identifie coefficient par coefficient le numérateur, on obtient :

$$\begin{cases} A+B+C &= 1 \\ -5A-4B-3C &= 0 \\ 6A+3B+2C &= 1 \end{cases} \iff A = 1, B = -5, C = 5.$$

Donc

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

On peut ensuite conclure :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad \boxed{g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}}.$$

Exercice ANA.7.8 | **Formule de Leibniz**

1. Soient $n \in \mathbf{N}$ et f, g deux fonctions n fois dérivables sur un certain intervalle. Montrer la *formule de Leibniz* :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. (Polynômes de LAGUERRE) Soit $n \in \mathbf{N}$, on note

$$\mathrm{P}_n : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{n!}(x^n \mathrm{e}^{-x})^{(n)}.$$

Montrer que P_n est une fonction polynomiale, préciser son degré et coefficient dominant.

Solution (exercice ANA.7.8)

1. Faisons une récurrence sur n. Pour $n = 0$, nous avons $(fg)^{(0)} = fg$ donc la formule est vérifiée. Supposons-là vraie au rang n et montrons-là au rang $n+1$. Comme pour la formule du binôme c'est la formule de PASCAL sur les coefficients binomiaux qui sera un intermédiaire technique important.

$$\begin{aligned}
&(fg)^{(n+1)}\\
&= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \textit{dérivée d'un produit}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\\
&= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \quad \textit{formule de Pascal}\\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} \mathrm{Q}^{(0)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)} \mathrm{Q}^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

D'où la formule par principe de récurrence.

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}.$$

2. Nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{n!}(x^n \mathrm{e}^{-x})^{(n)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{(n-k)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}(-1)^{n-k}\mathrm{e}^{-x}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{P}_n \text{ est un polynôme de degré } n}$, et son coefficient dominant vaut :

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{n!}}.$$

Exercice ANA.7.9 | En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \longrightarrow \infty}\left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$$

Solution (exercice ANA.7.9)

Bien entendu, il s'agit d'une forme indéterminée, il nous faut donc procéder autrement.

Notons $f : t > 0 \longrightarrow t\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$. Soit $x > 0$. Alors f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_x).$$

Or $f'(t) = e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t}\right)$ pour tout $t>0$. Puisque $x < c_x < x+1$, on a

$$1-\frac{1}{x} < 1-\frac{1}{c_x} < 1-\frac{1}{x+1}$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(1-\frac{1}{c_x}\right) = 1$ par théorème d'encadrement. Et donc

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f'(c_x) = 1.$$

On déduit alors

$$\boxed{\lim_{x\longrightarrow\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1}.$$

Exercice ANA.7.10 | **Théorème de la limite de la dérivée** Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$ et que f' admet une limite finie quand $x\longrightarrow a$, alors :

$$f \text{ est dérivable en } a, \quad \text{et} \quad f'(a) = \lim_{x\longrightarrow a} f'(x).$$

Solution (exercice ANA.7.10)

Les hypothèses nous invitent clairement à appliquer le théorème des accroissements finis entre x et a pour tout $x \in [a,b]$. Il existe $c_x \in]a,x[$, tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x),$$

puisque f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$. Mais comme f' admet une limite finie quand $x\longrightarrow a$ et que $c_x \xrightarrow[]{x\longrightarrow a} a$ (puisque $c_x \in]a,x[$), il vient par composition des limites :

$$\lim_{x\longrightarrow a} f'(c_x) = \lim_{x\longrightarrow a} f'(x).$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} f'(x).$$

Il vient que $\boxed{f \text{ est dérivable en } a, \text{ et } f'(a) = \lim_{x\longrightarrow a} f'(x).}$

Exercice ANA.7.11 | Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}^{+*},\mathbf{R})$. On suppose que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et que la fonction $x \mapsto x^2 f''(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}^{+*}$.

1. **(Égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2)** Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$ et $a \in]0,1[$, il existe $\xi \in]ax,x[$ tel que :

$$f(ax) = f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2}x^2 f''(\xi).$$

Indication : On pourra considérer la fonction $\varphi : t \longmapsto f(t) - f(x) - (x-t)f'(x) + \frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{A}$ *avec* $\mathrm{A} \in \boldsymbol{R}$ *à choisir correctement.*

2. En déduire que $\lim_{x\to 0} xf'(x) = 0$.

Solution (exercice ANA.7.11)

1. On cherche à appliquer le théorème de Rolle. On choisit une constante A telle que

$$f(ax) = f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2}x^2\mathrm{A},$$

i.e.

$$\mathrm{A} = \left(f(ax) - f(x) + (1-a)xf'(x)\right)\frac{2}{(1-a)^2x^2}.$$

Avec ce choix, on a $\varphi(x) = 0 = \varphi(ax)$. Et φ est continue sur $[ax,x]$, dérivable sur $]ax,x[$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $\zeta \in]ax,x[$ tel que

$$\varphi'(\zeta) = 0.$$

Or, $\varphi'(t) = f'(t) - f'(x) + (x-t)\mathrm{A}$. Donc φ' s'annule encore en x et ax, et est continue sur $[ax,x]$, dérivable sur $]ax,x[$, donc en réappliquant le théorème de Rolle, on a l'existence d'un $\xi \in]ax,x[$ tel que

$$\varphi''(\xi) = 0 = f''(\xi) - \mathrm{A}.$$

Donc $A = f''(\xi)$, et donc en utilisant l'égalité définissant A, on déduit :

$$A = f''(\xi) = \big(f(ax) - f(x) + (1-a)xf'(x)\big)\frac{2}{(1-a)^2x^2}$$

qui équivaut à

$$\boxed{f(ax) = f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2}x^2 f''(\xi).}$$

2. Supposons que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. En faisant tendre x vers 0 dans la première question, on obtient

$$\lim_{x\to 0} xf'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-a}{2}x^2 f''(\xi) \leqslant \frac{1-a}{2}\sup_{y\in\mathbf{R}^{+*}}\left|y^2 f''(y)\right|.$$

En faisant $a \to 1$, on obtient la nullité de la limite. Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0.}$

5.3. Fonctions usuelles

Exercice ANA.7.12 | Fonctions trigonométriques inverses

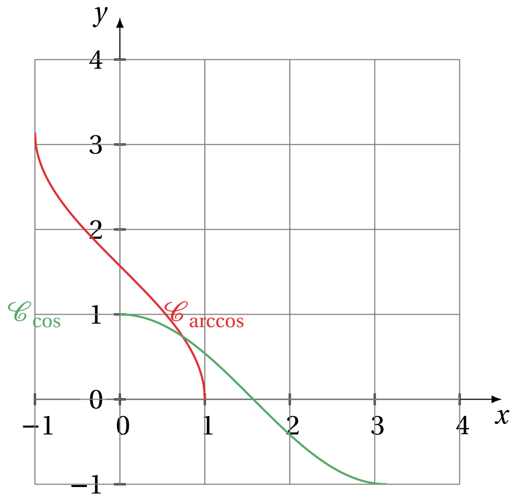
1. Montrer que la fonction $\cos\big|_{[0,\pi]}$ est bijective. On notera arccos sa bijection réciproque.
2. Calculer $\arccos'$ après avoir justifié l'existence sur un ensemble à préciser.
3. Faire la même étude avec $\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, on note arcsin la réciproque de la fonction précédente, et calculer $\arcsin'$ après avoir justifié l'existence sur un ensemble à préciser.

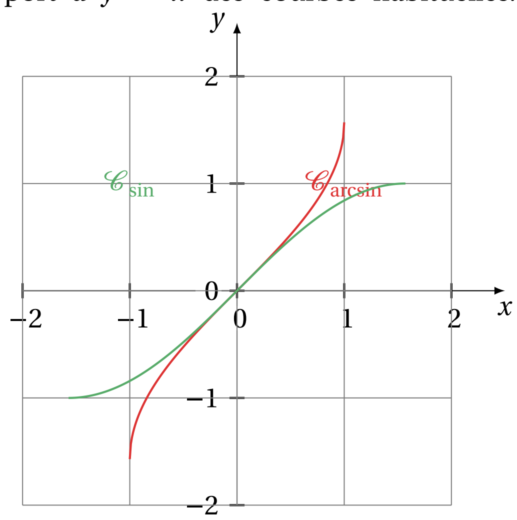
Solution (exercice ANA.7.12)

Nous traitons les deux fonctions d'un coup. Les fonctions cos, sin sont continues, et

- $\cos\big|_{[0,\pi]}$ est strictement décroissante,
- $\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ est strictement croissante.

Donc d'après le théorème de la bijection, elles réalisent une bijection de $[0,\pi]$ pour $\cos\big|_{[0,\pi]}$, $[-\pi/2,\pi/2]$ pour $\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, vers $[-1,1]$. Nous obtenons les courbes en considérant les symétriques par rapport à $y = x$ des courbes habituelles.





On note alors

$$\boxed{\arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}, \quad \arcsin = \left(\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}}.$$

On s'intéresse à présent aux dérivées. Pour tout $y \in [0,\pi]$ tel que $-\sin(\arccos(y)) \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\arccos'(y) &= \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} \\
&= -\frac{1}{|\sin(\arccos(y))|} \quad \arccos(y) \in [0,\pi] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(y))}} \\
&= -\frac{1}{1-y^2}.
\end{aligned}$$

Et d'après les calculs précédents $-\sin(\arccos(y)) \neq 0$ si et seulement si $y \neq -1, 1$. En faisant de-même avec arcsin, on conclut :

$$\boxed{\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{1-y^2}, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$$

Exercice ANA.7.13 | Fonctions hyperboliques

1. Faire l'étude complète des fonctions ch et sh définies ci-dessous :

$$\text{ch} : x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh} : x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. Montrer que sh est bijective, et déterminer une expression de $\text{sh}^{-1} = \text{argsh}$.

Solution (exercice ANA.7.13)

Elles sont $\boxed{\text{définies sur } \mathbf{R}}$ en tant que somme de telles fonctions. De plus, elles sont dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\text{sh}'\, x = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x,$$

d'où $\boxed{\text{sh}' = \text{ch}}$, on obtient de-même $\boxed{\text{ch}' = \text{sh}.}$

Mais ch $\geqslant 0$ puisque l'exponentielle est positive. Par ailleurs, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\text{sh}(x) \geqslant 0 \iff e^x \geqslant e^{-x} \iff e^{2x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 0.$$

Donc sh est positive sur $\mathbf{R}^+$, négative sur $\mathbf{R}^-$. On déduit alors les variations suivantes en utilisant les dérivées calculées avant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$		$+$	
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Les limites proviennent de règles usuelles d'opérations sur les limites.

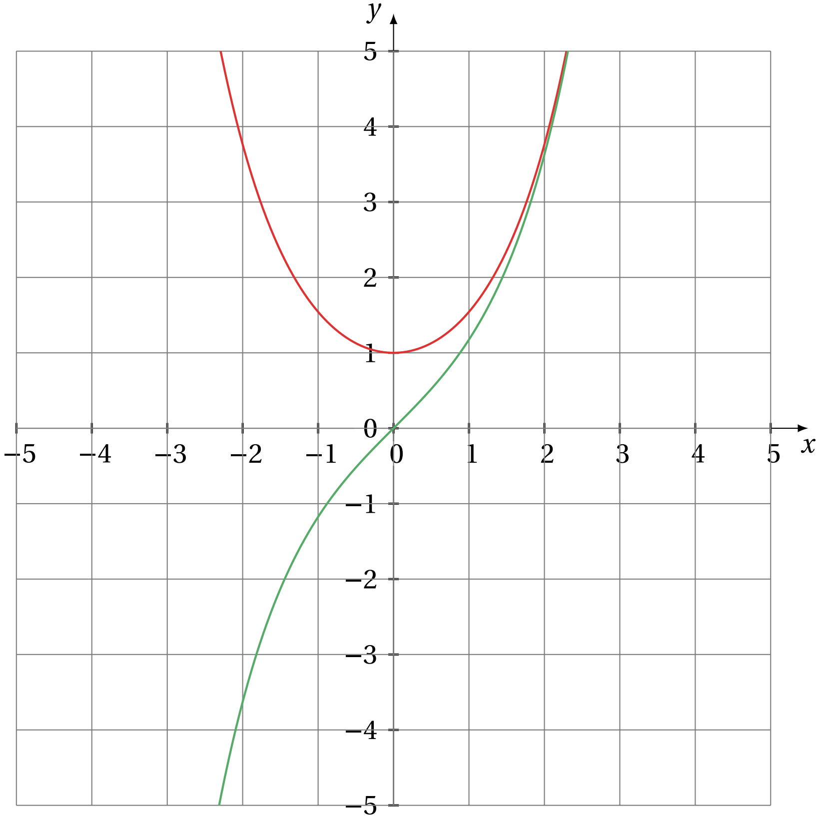


FIG. ANA.7.5. : Graphe de ch, sh

5.4. Développements limités

Exercice ANA.7.14 | **Opération nettoyage** «Nettoyer» le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dots \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$,
2. $\dots \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + x\ln x + o(x^2\ln x) + x^2 + o(x^2)$,
3. $\dots \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$.

Exercice ANA.7.15 | Calculer les développements limités des fonctions suivantes au voisinage de zéro :

1. $x \longmapsto \sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3,
2. $x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2} - e^{\cos x}$ à l'ordre 5.

Solution (exercice ANA.7.15)

On a $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et d'autre part $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$. Comme $\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on peut composer les développements pour obtenir
$\sqrt{1+\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.
Le cosinus étant positif au voisinage de zéro, la seconde question a bien un sens et la racine cubique a pour définition associée la forme exponentielle.
Calculons :
$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$, Donc après calculs :
$\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2} - e^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} -\frac{172}{100} + \frac{39}{100}x^2 + \frac{1679}{400}x^4 + o(x^5)$

Exercice ANA.7.16 | **Étude d'un prolongement** On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x(2-\cos x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, on notera encore f ce prolongement.
3. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de f.
4. Faire l'étude locale en zéro de la fonction.

Solution (exercice ANA.7.16)

1. Puisque $\cos x \neq 2$ pour tout x, il vient que $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbf{R}^\star.}$

2. On peut raisonner ici avec des équivalents :

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad 2-\cos x \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 1,$$

donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$. Donc f est prolongeable par continuité en zéro, et on pose $\boxed{f(0) = \frac{1}{2}.}$

3. $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x\left(2-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)}$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$
DL de $\frac{1}{1+X}$ avec $X = \frac{x^2}{2}+o(x^3)$ qui tend vers zéro
$$\underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{1-\frac{2x^2}{3}+o(x^3).}$$

Puisque la fonction f est paire, il est parfaitement logique nous n'ayons que des termes pairs.

4. Ainsi, f ainsi prolongée comme en seconde question est dérivable en zéro, et $f'(0) = 0$. Elle admet pour tangente $y = 0$ (horizontale), et la courbe est localement en-dessous de cette tangente.

5.5. Méthode numérique

Exercice ANA.7.17 | Approximation informatique d'un argmin **— Modélisation 2021**

On considère une fonction $f : \mathrm{I} = [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, avec $a < b$ deux réels, telle que : il existe $x_0 \in [a,b]$ vérifiant :

- f est strictement décroissante sur $[a, x_0]$,
- f est strictement croissante sur $[x_0, b]$.

Ainsi, f admet un minimum global sur I en x_0. On souhaite trouver un algorithme convergeant vers $x_0 = \mathrm{argmin}_{\mathrm{I}} f$.

1. Dessiner l'allure de f.

2. L'idée est de construire une suite d'intervalles $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbf{N}$ qui vont approcher de plus en plus x_0, on stoppe l'algorithme une fois une certaine précision $\varepsilon > 0$ atteinte.

- On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Supposons que a_k, b_k sont bien définis pour un entier $k \in \mathbf{N}$. On découpe l'intervalle $[a_k, b_k]$ en trois morceaux de taille identique, *i.e.* on pose

$$a_k < x_g = a_k + \frac{b_k - a_k}{3} < x_d = b_k - \frac{b_k - a_k}{3} < b_k.$$

— Si $f(x^g) < f\left(x^d\right)$, alors x_0 est «à gauche» de x_d[11], on pose alors $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x^d$.

— Si $f(x^g) > f\left(x^d\right)$, alors x_0 est «à gauche» de x_g, on pose alors $g_{k+1} = x^g, d_{k+1} = d_k$.

— Si $f(x^g) = f\left(x^d\right)$, alors on pose $g_{k+1} = x^g, d_{k+1} = x^d$.

On recommence ce procédé tant que $d-g > \varepsilon$ et on retourne à la la fin la meilleure des valeurs parmi $f(g), f(d), f((g+d)/2)$.

2.1) Écrire une fonction d'en-tête `argmin3(f, x, y, z)` qui renvoie parmi les trois valeurs `x`, `y` et `z`, celle en laquelle `f` est minimale.

2.2) Compléter le script suivant implémentant cet algorithme.

Algorithme d'approximation d'un minimum

```python
def minimum(f, A, B, eps):
    g = A
    d = B
    while d - g > eps:
        # calcul de xg xd
```

[11] Raisonner par l'absurde, s'il était à droite de x_d alors x_g, x_d se situeraient dans l'ensemble où f est strictement décroissante, donc on aurait $f(x^g) > f\left(x^d\right)$ car $x_g < x_d$ — contradiction.

```python
        xg = g + (d-g)/3
        xd = d - (d-g)/3
        if f(xg) < f(xd):
            d = xd
        elif f(xg) > f(xd):
            g = _________________
        else:
            # on est sûr que x 0 est entre g et d
            g = _________________
            d = _________________
    return argmin3(f, g, d, (g+d)/2)
```

3. On considère la fonction $f : x \in [0,1] \longmapsto x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. Montrer que la fonction f vérifie bien les conditions de l'énoncé et lui appliquer l'algorithme. Quelle valeur approchée s'attendait-on à trouver ? Est-ce cohérent ?

Solution (exercice ANA.7.17) ....

1. Par exemple, une parabole.

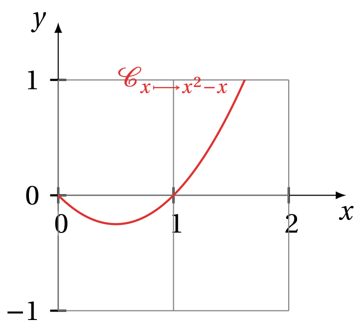


FIG. ANA.7.6. : $a = 0, b = 1, x_0 = \frac{1}{2}$

Algorithme d'approximation d'un minimum

2.

```python
def argmin3(f, x, y, z):
    mini = x
    if f(y) < f(mini):
        mini = y
    if f(z) < f(mini):
        mini = z
    return mini

def minimum(f, A, B, eps):
    g = A
    d = B
    while d - g > eps:
        # calcul de xg xd
        xg = g + (d-g)/3
        xd = d - (d-g)/3
        if f(xg) < f(xd):
            d = xd
        elif f(xg) > f(xd):
            g = xg
        else:
            # on est sûr que x 0 est entre g et d
            g = xg
            d = xd
    return argmin3(f, g, d, (g+d)/2)
```

3. Faisons un test sur la fonction proposée.

```python
def f(x):
    return x**2-1/2*x+1
argmini = minimum(f, 0, 1, 10**(-3))
```

Alors argmini vaut 0.2500324034230415. Ce qui est tout à fait cohérent, puisque le minimum est atteint en $-\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

....

5.6. Du côté de l'Algèbre

Exercice ANA.7.18 | **Fonctions à variations bornées** Soit $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$. On considère

$$\Delta = \{f - g,\ f, g \text{ croissantes sur D}\}.$$

On l'appelle l'*ensemble des fonctions à variations bornées.* Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathrm{D}}$.

Solution (exercice ANA.7.18)

- Nous avons $\Delta \subset \mathbf{R}^{\mathrm{D}}$.
- De plus, comme $0 = 0 - 0$ et que la fonction nulle est croissante, il vient que $0_{\mathbf{R}^{\mathrm{D}}}$ est dans Δ.
- Soient donc $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, et $\varphi_1 = f_1 - g_1, \varphi_2 = f_2 - g_2$ deux fonctions de Δ, où les f_i, g_i sont croissantes pour $i \in [\![1, 2]\!]$.

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = \lambda(f_1 - g_1) + \mu(f_2 - g_2).$$

  Plusieurs cas se présentent.
- **1.** Si $\lambda, \mu \geqslant 0$. Alors $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = (\lambda f_1 + \mu f_2) - (\lambda g_1 + \mu g_2)$. Et cette écriture fait bien apparaître une différence de fonctions croissantes.
  2. Si $\lambda \leqslant 0, \mu \geqslant 0$. Alors $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = (\lambda f_1 + \mu f_2) - (\lambda g_1 + \mu g_2) = ((-\lambda)g_1 + \mu f_2) - ((-\lambda)f_1 + \mu g_2)$. Alors comme $-\lambda \geqslant 0$, cette écriture fait encore bien apparaître une différence de fonctions croissantes.
  3. Si $\lambda \geqslant 0, \mu \leqslant 0$, on fait la même analyse avec l'écriture $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = (\lambda f_1 + (-\mu)g_2) - (\lambda g_1 + (-\mu)f_2)$.
  4. Si $\lambda \leqslant 0, \mu \leqslant 0$. Alors $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = ((-\lambda)g_1 + (-\mu)g_2) - ((-\lambda)f_1 + (-\mu)f_2)$.

  En conclusion, $\boxed{\Delta \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^{\mathrm{D}}.}$