Chapitre ANA.8.

Fonctions de plusieurs variables

Résumé & Plan

Dans ce chapitre nous allons allons étudier les fonctions de n variables avec $n \in \mathbf{N}^*$.[1] Plus précisément, nous allons voir une notion de continuité, dérivabilité directionnelle, et de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 0$. Il existe aussi une notion de dérivée (classique, non partielle) appelée *différentiabilité* mais qui n'est pas au programme de BCPST.

[1] Officiellement, seules les fonctions de deux variables sont au programme, mais les sujets de concours sortent bien souvent de ce cadre. Par ailleurs, la plupart des énoncés ne présentent aucune difficulté à être énoncés pour des fonctions à plus de deux variables.

Le mathématicien et philosophe Leibniz (1646-1716) fut le premier à démontrer la formule pour la dérivation d'un produit. De ce fait, cette formule porte aussi parfois le nom de règle de Leibniz.

— Le saviez-vous ?

Cadre

Nous considèrerons dans ce chapitre des fonctions de n variables, *i.e.* des applications $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, ou plus généralement $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathrm{P} \subset \mathbf{R}^n$ si elle est seulement définie sur un sous-ensemble P de $\mathbf{R}^n$.

Définition ANA.8.1 | Pavé & Pavé ouvert

On appelle *pavé* de $\mathbf{R}^n$ tout ensemble de la forme

$$\mathrm{I}_1 \times \cdots \times \mathrm{I}_n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_1 \in \mathrm{I}_1, \dots, x_n \in \mathrm{I}_n\},$$

où $\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_n$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$. Soit $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. On appellera *voisinage ouvert de* $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ tout ensemble de la forme

$$]x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1[\times \dots]x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n[, \qquad \text{avec } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0.$$

Pour $n = 1$ un voisinage ouvert d'un point est un intervalle ouvert centré en ce point. Pour $n = 2$ c'est un rectangle ouvert de centre de gravité le point considéré.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Premiers exemples

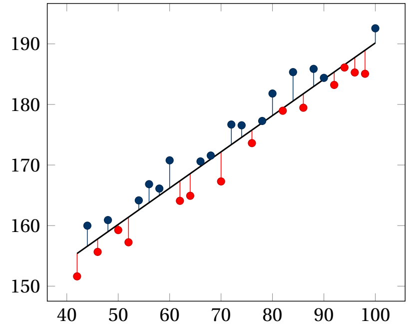
Citons quelques contextes où interviennent naturellement les fonctions de plusieurs variables.

- L'aire d'un rectangle de côtés x, y est $\mathrm{S}(x, y) = xy$. C'est donc une fonction $\mathrm{S} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$ de deux variables. On peut se poser la question suivante : peut-on trouver un minimum pour S ? un minimum sous une contrainte de périmètre ? *i.e.* $2(x + y) = p$ avec $p \in \mathbf{R}^{+\star}$.
- **(En mécanique)** Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^2$, alors le travail d'une force $\vec{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le long d'un déplacement entre A et B est une fonction de quatre variables :
$$\mathrm{F}(a, b, x, y) = ax + by.$$
Deux variables de position et deux variables de force.
- **(En géométrie)** Considérons le plan affine $\mathscr{P}$: $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $\mathrm{B} = (x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B}) \in \mathbf{R}^3$. En première année, la distance d'un point B au plan M a été définie comme :
$$\mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathscr{P}) = \inf_{\mathrm{M} \in \mathscr{P}} \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) = \inf_{\mathrm{M} \in \mathscr{P}} \sqrt{(x_\mathrm{M} - x_\mathrm{B})^2 + (y_\mathrm{M} - y_\mathrm{B})^2 + (z_\mathrm{M} - z_\mathrm{B})^2}.$$
Il s'agit donc ici de minimiser la fonction
$$\mathrm{F} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P} \subset \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \sqrt{(x - x_\mathrm{B})^2 + (y - y_\mathrm{B})^2 + (z - z_\mathrm{B})^2} \end{array} \right.$$
sur l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathscr{P}$.
- **(En statistiques : droite de régression)**

Si $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $n \geqslant 1$ est un nuage de n points et que l'on se pose la question de l'existence d'une droite passant au plus près de ces points (au sens des « moindres carrés »), cela revient à minimiser cette fonctionnelle de deux variables :

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2,$$

où l'éventuel minimum trouvé $(a^\star, b^\star)$ correspondra au couple coefficient directeur/ordonnée à l'origine de la droite dite des *moindres carrés.* Représentons cette quantité F sur un dessin.



La quantité $F(a, b)$ correspond donc à la somme des longueurs algébriques des traits verticaux bleus et rouges (positive si bleu, négative si rouge). Minimiser F revient donc à minimiser chacune de ces longueurs, et donc *in fine* approcher au plus près le nuage de points considéré.

1.2. Vocabulaire

Si $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de deux variables, alors on appellera « restrictions partielles » les applications définies pour tout $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$ par :

$$x \longmapsto f(x, y_0), \quad y \longmapsto f(x_0, y).$$

On « fixe » donc une variable et on fait varier l'autre, si une fonction a deux variables, alors les restrictions partielles en auront qu'une. Plus généralement, si une fonction a n variables, alors les restrictions partielles en auront une. Passons à la définition.

Définition ANA.8.2 | Restriction partielle

Soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ ou plus généralement $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $P \subset \mathbf{R}^n$. Alors les applications, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$x \in \mathbf{R} \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, \boxed{x}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

sont appelées les applications *restrictions partielles* associées à f, ce sont des fonctions réelles d'une variable réelle.[2]

Exemple 1 — Les applications partielles de $f : (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto 3x_1^3 + e^{x_2}$ au point $a = (2, 7)$ sont $f_1 : t \longmapsto 3t^3 + e^7, \quad f_2 : t \longmapsto 24 + e^t$.

Rappelons que le graphe d'une fonction d'une variable $f : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ a été défini dans le Chapter ANA.7 comme étant

$$\{(x, f(x)),\ x \in I\}.$$

On généralise sans difficulté cette définition aux fonctions de **deux** variables uniquement.

Définition ANA.8.3 | Graphe & Ligne de niveau

Soit $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $P \subset \mathbf{R}^2$ une fonction de deux variables. On appelle *graphe de* f (ou *surface représentative de* f) l'ensemble

$$\mathscr{S}_f = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in P\}.$$

Une *ligne de niveau* $k \in \mathbf{R}$ fixé, est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathscr{L}_k(f) = \{(x, y) \in P,\ f(x, y) = k\}.$$ [3]

Ainsi, dans le cas d'une fonction de deux variables, le graphe n'est donc ni plus ni moins qu'une surface dans l'espace, alors que les lignes de niveaux sont des courbes dans le plan. Voyons quelques exemples de lignes de niveaux.

Exemple 2 — Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$. Déterminer $\mathscr{L}_k(f)$ pour tout $k \in \mathbf{R}$, en distinguant le cas $k = 0$.

[2]Pour les fonctions d'une variable nous n'avions pas parlé de restriction partielle, puisque ces dernières coïncideraient avec la fonction de départ.

[3]Une ligne de niveau est donc une courbe tracée sur l'ensemble de définition P

Exemple 3 — ***Cartes IGN*** Le relief est un graphe de fonction de deux variables, et on représente souvent également les lieux de même altitude, qui correspondent donc aux lignes de niveau de $\mathscr{S}_f$. Si l'on faisait de-même pour des cartes de pression, les lignes de niveau représenteraient ce que l'on appelle plus communément les *isobares*.

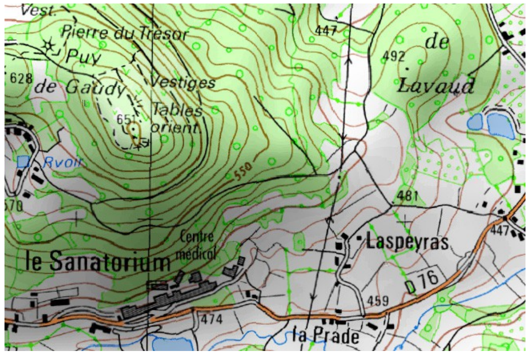


Fig. ANA.8.1. : Carte IGN d'un département Français

Exemple 4 — ***Cartes Météo*** Les courbes des lieux de même pression sur une carte météo, appelées *courbes isobares*, sont les lignes de niveau d'un graphe $\mathscr{S}_f$ de fonction de deux variables, celle qui à un lieu géographique associe la pression en ce lieu.

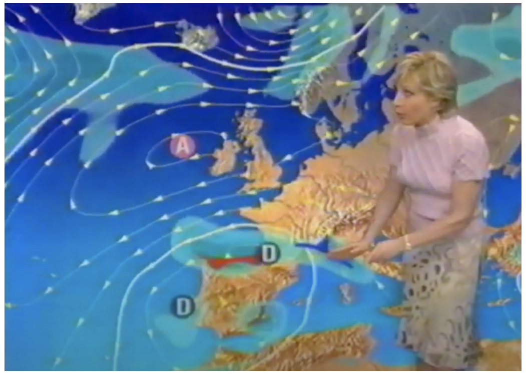


Fig. ANA.8.2. : Une carte météo TF1 (04/12/2003) faisant apparaitre les isobares

2. LIMITE ET CONTINUITÉ

Réfléchissons à comment étendre toutes les notions d'analyse à des fonctions $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$? Reprenons la définition de fonction continue $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ en $a \in \mathrm{I}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-a| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

Que doit-on changer dans cette définition ? Quasiment rien, les quantités $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont bien définies si $x, a \in \mathbf{R}^n$, puisque l'on peut faire la différence de deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$, mais comment donner un sens à

$$|x-a| \quad ? \quad \text{En effet, la valeur absolue d'un vecteur n'existe pas.}$$

Notons $x = (x_1, \dots, x_n), a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Une solution : nous allons remplacer « $|x-a| < \eta$ » dans la définition de la limite par :

$$« \left|x_1 - a_1\right| < \eta, \quad \dots, \quad \left|x_n - a_n\right| < \eta. »$$

2.1. Limite

Cadre

Dans cette section, P désignera toujours un pavé de $\mathbf{R}^n$ non vide et non réduit à un point.

Passons maintenant aux *nouvelles* définitions de limite, pas si nouvelles finalement puisqu'il s'agit simplement de faire la substitution annoncée précédemment, et d'enlever celles qui n'ont aucun sens (vers les infinis notamment). Avant cela, nous avons besoin de la notion d'adhérence.

Définition ANA.8.4 | Adhérence d'un ensemble

Soit P pavé de $\mathbf{R}^n$, on dit qu'un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est *adhérent à* P si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left(]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\right) \cap P \neq \emptyset.$$ [4]

Alors on appelle *adhérence de* P l'ensemble des réels adhérents à P. On le note en général $\overline{P}$.

Remarque 2.1 — Comme dans $\mathbf{R}$, ce sont donc des points «très proches» de P, mais pas forcément dedans.

Exemple 5 — Dessinons $P = [-1, 1] \times [0, 2[$. Alors $(0, 2)$ est adhérent à P, alors que $(0, 3)$ ne l'est pas.

[4] Pour $n = 2$, cet ensemble $]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$ n'est autre qu'un carré de longueur de côté 2ε, et centré en (x_1, x_2)

Définition ANA.8.5 | Limite en un point adhérent

Soient $A = (a_1, \dots, a_n) \in \overline{P}$, où P est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ et une application f définie sur P ou sur $P \setminus \{A\}$. On note :

- $f(X) \xrightarrow{X \longrightarrow A} \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall X = (x_1, \dots, x_n) \in P, \quad |x_1 - a_1| < \eta_\varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \eta_\varepsilon \implies |f(X) - \ell| < \varepsilon,$$

- $f(X) \xrightarrow{X \longrightarrow A} +(-)\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta_A > 0, \forall X = (x_1, \dots, x_n) \in P, \quad |x_1 - a_1| < \eta_\varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \eta_\varepsilon \implies f(X) > (<) A.$$

Attention

L'ensemble $\mathbf{R}^n$ pour $n \geqslant 2$ ne possède pas d'«infini» *a priori*. Les notions de limites en ces points n'existent donc pas.

Remarque 2.2 — Où intervient $A = (a_1, \dots, a_n) \in \overline{P}$? Si c'est le cas, l'ensemble

$$\left\{X = (x_1, \dots, x_n) \in P, \quad |x_1 - a_1| < \eta, \dots, |x_n - a_n| < \eta\right\} \neq \emptyset \text{ pour tout } \eta > 0.$$

Bien entendu c'est déjà le cas si $A \in P \subset \overline{P}$, mais ça l'est aussi plus généralement pour n'importe quel point de l'adhérence.

Cette notion de limite possède le même type de propriétés que pour la limite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; unicité, opérations, inégalités, ... nous ne les détaillerons pas à nouveau ici.

Proposition ANA.8.1 |

Soit $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$, où P est un pavé de $\mathbf{R}^n$ et $A \in \mathbf{R}^n$. Si f est **définie en** A (*i.e.* $A \in P$) et possède une limite en A, alors :

$$\lim_{X \longrightarrow A} f(X) = f(A).$$

Preuve Identique au cas des fonctions d'une variable.

Nier l'existence d'une limite. Dans le cas des fonctions d'une variable, on utilisait très souvent la caractérisation séquentielle : on exhibe deux suites convergeant vers la même chose, mais dont les suites images par f tendent vers des limites différentes. Traditionnellement, pour les fonctions de plusieurs variables, on nie directement la définition de la limite, comme précisé dans la méthode qui suit.

Méthode — Nier l'existence d'une limite pour les fonctions de plusieurs variables

Si $f : P \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ et $A \in P$. Alors si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en A, pour toute fonction $\varphi : Q \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow P$ (avec $A \in \overline{Q}$) telle que $\lim_B \varphi = A$ pour $B \in \overline{Q}$, on a :

$$\lim_{X \longrightarrow B} f \circ \varphi(X) = \ell.$$

Ainsi, si l'on trouve deux telles fonctions $\varphi_1 : Q_1 \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow P$ (associée à un point $B_1 \in \overline{Q_1}$) et $\varphi_2 : Q_2 \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow P$ (associée à un point $B_2 \in \overline{Q_2}$), vérifiant :

$$\lim_{X \longrightarrow B_1} f \circ \varphi_1(X) \neq \lim_{X \longrightarrow B_2} f \circ \varphi_2(X),$$

la fonction n'admet donc pas de limite en A. On dit que l'on a trouvé des « chemins le long desquels la fonction ne converge par vers la même limite ».

En résumé, la limite doit être la même peu importe le « chemin emprunté » pour tendre vers A.

Exemple 6 — Considérons les deux fonctions ci-dessous :

1. Soit f_1 la fonction de deux variables définie par : $f_1 : \left| \begin{array}{ccl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$ La fonction f_1 n'admet pas de limite en $(0,0)$.

2. Soit f_2 la fonction de deux variables définie par : $f_2 : \left| \begin{array}{ccl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$ La fonction f_2 vérifie $\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0$.

2.2. Continuité

Nous avons maintenant une notion de limite, on peut donc regarder l'ensemble des fonctions continues que l'on définit dès à présent.

Définition ANA.8.6 | Continuité

Soit $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ où P est un pavé de $\mathbf{R}^n$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{P}$. On dit que f est *continue en* A si :

$$f(\mathrm{A}) = \lim_{\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{A}} f(\mathrm{X})$$

On dit que f est *continue sur* P si elle l'est en tout point de P.

Attention

Disons-le de suite, la continuité des restrictions partielles de f n'entraîne pas la continuité de f !

Exemple 7 — On reprend les fonctions f_1, f_2 de l'Exemple 6. Étudier la continuité de f_1, f_2 sur $\mathbf{R}^2$, ainsi que celle de leurs restrictions partielles.

Attention

De manière générale, la continuité entraine celle des restrictions partielles mais la réciproque est fausse.

Exemple 8 — ***Autres applications continues usuelles***

1. Les projections $p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ définies pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ sont continues.
2. Les applications polynomiales sont continues.

3. DÉRIVABILITÉ

Nous avons considéré dans le Chapter ANA.7 des fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. Ici nous allons définir le nombre dérivé sur des ensembles dits ouverts $\mathscr{O}$ de $\mathbf{R}^n$, *i.e.* en des points qui ne sont pas situés sur le *bord* de l'ensemble, afin d'éviter de parler de limite à droite/gauche (qui n'existe pas dans $\mathbf{R}^n$).

Définition ANA.8.7 | Ensemble ouvert

Soit $\mathscr{O} \subset \mathbf{R}^n$. On dit que $\mathscr{O}$ est un *ouvert de* $\mathbf{R}^n$ si pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{O}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_1 - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\subset \mathscr{O}.$$ [5]

Exemple 9 — Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts ?

- $(n = 1)$ $]1,2[, [2,9[,]1,+\infty[,]1,2[\cup]2,10[$?

- $(n = 2)$ $[-1,1] \times [0,1]$?

[5] Pour $n = 2$, cela signifie qu'il existe un carré ouvert assez petit inclus dans $\mathscr{O}$ autour de x.

3.1. Dérivées directionnelles

Pour les fonctions de plusieurs variables, nous allons définir la dérivation, selon une direction $\mathrm{V} \in \mathbf{R}^n$ au point $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^n$, lorsque les fonctions sont définies sur un ensemble ouvert. Autrement dit, nous allons observer comment $f(\mathrm{X})$ varie, lorsque X se déplace sur la droite passant par A et dirigée par V. Cela revient à considérer le taux d'accroissement de la fonction d'une variable réelle $t \longrightarrow f(\mathrm{A} + t\mathrm{V})$ lorsque t tend vers zéro.

Définition ANA.8.8 | Dérivée directionnelle

Soit $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$, où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert[6] de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{A} \in \mathscr{O}$ et V un vecteur de $\mathbf{R}^n$. On dit que f *est dérivable en* A *dans la direction* V si :

$$t \longmapsto \frac{f(\mathrm{A} + t\mathrm{V}) - f(\mathrm{A})}{t}$$

admet une limite finie en zéro. Dans ce cas, on note $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{V}}(\mathrm{A})$ la valeur de la limite.

Remarque 3.1 — Interprétation La derivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{V}}(\mathrm{A})$ peut être interprétée comme le taux d'accroissement infinitesimal de f au point A dans la direction V.

Attention

Le fait que f soit dérivable partiellement, même dans toutes les directions $\mathrm{V} \in \mathbf{R}^n$, **n'entraîne pas** la continuité de f au point considéré.

Exemple 10 — ***Contre-exemple*** Considérons la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$. Alors g admet une dérivée dans toutes les directions en $(0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$.

[6] Ainsi, sous cette hypothèse, pour t assez petit, la quantité $\mathrm{A} + t\mathrm{V}$ est dans $\mathscr{O}$ donc $f(\mathrm{A} + t\mathrm{V})$ est bien définie.

- **(Dérivées en $(0,0)$ dans toutes les directions)** soit $V=(v_1,v_2)\in\mathbf{R}^2$, et $t\in\mathbf{R}^\star$.

  Si $v_1\neq 0$ alors :

$$\frac{g(0+tv_1,0+tv_2)-g(0,0)}{t}=\frac{1}{t}\frac{t^2v_2^2}{tv_1}\xrightarrow[]{t\longrightarrow 0}\frac{v_2^2}{v_1}.$$

  Si $v_1=0$:

$$\frac{g(0+tv_1,0+tv_2)-g(0,0)}{t}=\frac{1}{t}tv_2\xrightarrow[]{t\longrightarrow 0}v_2.$$

  Dans les deux cas f est dérivable en $(0,0)$ dans la direction (v_1,v_2).

- Pourtant, cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, $g(x,0)=x\xrightarrow[]{x\longrightarrow 0}0$, et pour $x\neq 0$, $g(x^2,x)=1\xrightarrow[]{x\longrightarrow 0}1\neq 0$.

CAS PARTICULIER : LES DÉRIVÉES PARTIELLES. Lorsque les directions V sont les vecteurs de la base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}=(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on appelle généralement ces objets les *dérivées partielles* de f.

Définition ANA.8.9 | Dérivée partielle

Soit $f:\mathscr{O}\longrightarrow\mathbf{R}$, où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, et $A=(a_1,\dots,a_n)\in\mathscr{O}$, $i\in\{1,\dots,n\}$. On dit que f *possède une dérivée partielle dans la direction i* si f possède une dérivée directionnelle selon $V=e_i$, *i.e.* si :

$$t\longmapsto\frac{f(A+te_i)-f(A)}{t}$$

$$\textit{i.e. si}\quad t\longmapsto\frac{f\left(a_1,\dots,a_{i-1},\boxed{a_i+t},a_{i+1},\dots,a_n\right)-f(a_1,\dots,a_n)}{t}$$

admet une limite finie en zéro. Dans ce cas, on note $\partial_i f(A)$ $\left(\text{ou encore } \partial_i f(A), \frac{\partial f}{\partial e_i}(A)\right)$ la valeur de la limite.

Remarque 3.2 — On « fixe » donc toutes les variables sauf une, selon laquelle on calcule le taux d'accroissement et on dérive. C'est donc la dérivée en a_i de la i-ème restriction partielle.

Notation Extension pour la Physique

Nous avons défini ici une notion de dérivation par rapport à l'une des variables, mais parfois, dans certains contextes la fonction f n'est pas explicitement donnée. Par exemple, rappelons la loi fondamentale d'un resistor de résistance R :

$$U=R\cdot I,$$

sous les notations du cours de Physique. Que signifie $\frac{\partial U}{\partial I}$ souvent employée par les physiciens ? La quantité U s'écrit $U=f(R,I)$ avec $f:(x,y)\longmapsto xy$, et

$$\frac{\partial U}{\partial I}\underset{\textbf{(défi.)}}{=}\frac{\partial f}{\partial y}(R,I)=((x,y)\longmapsto x)(R,I)=R.$$

Notation Cas $n=2$ — les plus importantes

Notons $A=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$ et $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$. On rappelle que la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est (e_1,e_2) où $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. On peut donc dériver suivant deux directions de la base canonique, et on note avec les mêmes notations que dans la définition :

$$\partial_1 f(A)=\frac{\partial f}{\partial x}(A)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t},\qquad\text{(derx)}$$

$$\partial_2 f(A)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t}.\qquad\text{(dery)}$$

L'existence de ces limites implique la continuité des restrictions partielles $a_1\longmapsto f(a_1,a_2)$ pour tout $a_2\in\mathbf{R}$, et $a_2\longmapsto f(a_1,a_2)$ pour tout $a_1\in\mathbf{R}$. Les quantités (derx) et (dery) sont simplement les taux d'accroissement de ces deux fonctions aux points a_1 et a_2.

Attention Cas $n=2$ — attention aux notations !

Soit $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$. Il faut bien comprendre, que :

- **(dérivée partielle évaluée en ...)**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(u,v), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(s,t), \quad \dots$$

Parfois on peut préférer — et je la préfère![7] — la notation $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ qui ne fait pas intervenir le nom éventuel donné à chaque variable.

est différent de :

- **(dériver une expression par rapport à ...)**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,x^2)\right) \quad \left(\text{ou } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x,x^2)\right) \text{ si une seule variable est présente}\right)$$

signifie en revanche que l'on dérive **l'expression** par rapport à x : attention donc à l'emplacement des parenthèses.

Les constats précédents seront importants pour bien comprendre les formules de dérivation d'une composée qui vont suivre.

Les dérivées partielles & directionnelles héritent des mêmes propriétés de dérivabilité que pour les sommes, produits, quotients, composées déjà connues. Nous les citons ici sans démonstration.

Proposition ANA.8.2 | Propriétés des dérivées partielles et directionnelles

Soient $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$, où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{O}$, $V \in \mathbf{R}^n$ une direction.

- **(Produit et inverse)** Si f, g possèdent en A une dérivée directionnelle dans la direction V, alors $f \times g$ aussi et :

$$\frac{\partial(f\times g)}{\partial V}(A) = \frac{\partial f}{\partial V}(A)g(A) + f(A)\frac{\partial g}{\partial V}(A).$$

En conséquence, si $f(A) \neq 0$, on a :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial V}(A) = -\frac{1}{f(A)^2}\frac{\partial f}{\partial V}(A).$$

- **(Composition à gauche par une fonction d'une variable)** Si f possède en A une dérivée directionnelle dans la direction V, et $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en $f(A)$, alors $\varphi \circ f$ possède une dérivée directionnelle dans la direction V et :

$$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial V}(A) = \frac{\partial f}{\partial V}(A)\varphi'(f(A)).$$

Remarque 3.3 — En particulier, la proposition est vérifiée pour les dérivées partielles.

Preuve Même preuve que pour les fonctions d'une variable.

Exemple 11 — Soit $f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto xy$. Déterminer si elles existent les dérivées partielles de f, **en utilisant la définition**.

[7] Mais je ne l'utiliserai quasiment pas, car les sujets de concours ne l'utilisent pas

Exemple 12 — Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes, et déterminer si elles existent leurs dérivées partielles.

1. $g : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto 1 + xy + y^2$,

2. $h : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$,

3. $i : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \longmapsto \ln(x + 2z) + \sqrt{1 + y^2}$.

De-même que l'on peut dériver partiellement une expression de plusieurs variables, on peut se poser la question de l'existence et du calcul d'une primitive partielle selon l'une des variables. Voyons quelques exemples classiques.

Exemple 13 — ***Primitivation partielle première***

1. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array} \right.$$

3.2. Gradient

La notion de gradient définie ci-dessous généralise la quantité $f'(a)$ lorsque $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$, où f est dérivable en a.

Définition ANA.8.10 | Gradient

Soit $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, et f une fonction admettant des dérivées partielles dans toutes les directions en un point $A \in \mathscr{O}$. On appelle *gradient de f en* $A \in \mathscr{O}$ le vecteur de $\mathbf{R}^n$:

$$\operatorname{grad} f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}.$$

Notation

On le note généralement $\operatorname{grad} f(A)$ ou encore $\nabla_A f$.

Remarque 3.4 — Interprétation La d directionnelle $\frac{\partial f}{\partial V}(A)$ peut être interprétée comme le taux d'accroissement infinitesimal de f au point A dans la direction V.

Définition ANA.8.11 | Point critique

On appelle *point critique* d'une fonction admettant des dérivées partielles dans toutes les directions $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathscr{O}$ un ensemble ouvert, tout élément $C \in \mathscr{O}$ tel que $\operatorname{grad} f(C) = 0$.

Remarque 3.5 — Cas $n = 2$ Avec les notations de la définition, si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, un point C est un point critique si et seulement si :

$$\begin{cases} \partial_1 f(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C) = 0, \\ \partial_2 f(C) = \frac{\partial f}{\partial y}(C) = 0. \end{cases}$$

Exemple 14 — On note $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{1+x^2+y^2}. \end{array} \right.$ Montrer que f admet un gradient en tout point de $\mathbf{R}^2$, puis calculer $\operatorname{grad} f$ en tout point $A = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, ainsi que ses points critiques.

Exemple 15 — On note $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{array} \right.$ Montrer que f admet un gradient en tout point de $\mathbf{R}^n$, puis calculer $\operatorname{grad} g$ en tout point $x \in \mathbf{R}^n$, ainsi que ses points critiques.

3.3. Fonctions $\mathscr{C}^1$

Définition ANA.8.12 | Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. On dit que f est de *classe* $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathscr{O}$.

Notation —

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$.

Exemple 16 — Les fonctions g, h définies dans l'Exemple 12 sont-elles $\mathscr{C}^1$?

Exemple 17 —

- Les projections $p_i \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & x_i \end{array} \right.$ définies pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.
- Les applications polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Proposition ANA.8.3 | Propriétés des fonctions $\mathscr{C}^1$

Soient $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$, où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$. Alors :

- $f + g$ et $f \times g$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^1$,
- si g ne s'annule pas, le quotient $\frac{f}{g}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.
- **(Composition à gauche par une fonction d'une variable)** Si $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est également de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\varphi \circ f$ est également de classe $\mathscr{C}^1$.

Preuve Utiliser les résultats sur les fonctions d'une variable aux restrictions partielles.

Enfin, la formule de TAYLOR-YOUNG reste valable pour des fonctions de n variables de classe $\mathscr{C}^1$. Nous l'énonçons à l'ordre un. Rappelons-là déjà pour les fonctions d'une variable : si I est un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

Le seul terme qui va changer pour les fonctions de plusieurs variables est le terme d'ordre 1 : nous allons remplacer $f'(a)(x-a)$ par son analogue dans $\mathbf{R}^n$:

$$f'(a)(x-a) \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathrm{grad}\, f(\mathrm{A}) | \mathrm{X} - \mathrm{A} \rangle,$$

où $\langle . | . \rangle$ est défini ci-après.

Notation — Produit scalaire, petit $\mathrm{o}()$

Dans la suite, pour deux vecteurs $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathrm{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on notera :

$$\langle \mathrm{X} | \mathrm{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$ [8]

Théorème ANA.8.1 | TAYLOR-YOUNG à l'ordre un [H.P]

Soient $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{A} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{O}$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Alors :

$$f(\mathrm{X}) \underset{\mathrm{X} \to \mathrm{A}}{=} f(\mathrm{A}) + \langle \mathrm{grad}\, f(\mathrm{A}) | \mathrm{X} - \mathrm{A} \rangle + \mathrm{o}(\mathrm{X} - \mathrm{A}).$$

[8] Ce produit scalaire sera étudié plus en détail dans un prochain chapitre

où $o(X-A)$ est une quantité réelle telle que :

$$o(X-A) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|\right) \times \varepsilon(X-A)^{9},$$

pour une certaine fonction $\varepsilon : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que : $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Preuve Admis.

Remarque 3.6 — De manière équivalente, par changement de variable « $H = X - A$ » dans la limite, le résultat peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(A+H) = f(A) + \langle \operatorname{grad} f(A) | H \rangle + o(H),$$

où $o(H) = \left(\sum_{i=1}^{n} |H_i|\right) \varepsilon(H)$ pour une certaine fonction $\varepsilon : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que : $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Corollaire ANA.8.1 | Taylor-Young à l'ordre un (pour deux variables)

Soient $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in \mathscr{O}$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. Alors :

$$f(X) \underset{X \to A}{=} f(A) + \langle \operatorname{grad} f(A) | X - A \rangle + o(X-A),$$

$$f(x_1, x_2) \underset{(x,y)\to(a_1,a_2)}{=} f(a_1, a_2) + \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cdot (x - a_1) + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \cdot (y - a_2) + o(X-A).$$

Ou, de manière équivalente,

$$f(a_1 + h, a_2 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(a_1, a_2) + \frac{\partial f(A)}{\partial x_1} h + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} k + o\big((h,k)\big).$$

Preuve Conséquence directe du théorème général.

[9] Pour $n = 1$, on retrouve la classique définition du petit o(.) (une fonction tend vers zéro si et seulement si sa valeur absolue tend vers zéro)

Corollaire ANA.8.2 | Une fonction $\mathscr{C}^1$ admet des dérivées directionnelles

Soient $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in \mathscr{O}$, $V \in \mathbf{R}^n$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. Alors f admet une dérivée directionnelle dans la direction V, donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial V}(A) = \langle \operatorname{grad} f(A) | V \rangle.$$

Remarque 3.7 — Interprétation géométrique du gradient Parmi les directions V de norme un, on peut montrer que la direction qui maximise $|\langle \operatorname{grad} f(A) | V \rangle|$ est un vecteur V colinéaire à $\operatorname{grad} f(A)$. On résume cela en « le gradient donne la direction dans laquelle f varie le plus vite autour du point A ».

Exemple 18 — Soit $f : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \longmapsto 1 + xy^2 + x^2 z$ et $a = (2, 1, 0)$. Écrire la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 1 en a.

Exemple 19 — ***Application à l'approximation*** On reprend la fonction $g : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^3+y^3}$. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1,02^3+2,07^3}$ sans calculatrice.

Exemple 20 — ***Incertitudes de mesures*** Supposons qu'une quantité dépende de manière $\mathscr{C}^1$ de plusieurs paramètres notés $x_1, \dots, x_n$ avec la relation

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

où f est une fonction $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ supposée de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons que des relevés des x_i peuvent être entachés d'une erreur $\delta x_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Alors, on notant $\delta f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1+\delta x_1, \dots, x_n+\delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ l'erreur correspondante sur f :

$$\delta f(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \delta x_i f(x_1, \dots, x_n),$$

ou encore en valeur absolue, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\delta f(x_1, \dots, x_n)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\delta x_i\right| \left|f(x_1, \dots, x_n)\right|.$$

Cette formule permet donc de contrôler l'erreur maximale sur f commise en fonction des erreurs qui entachent chacune des mesures.

Remarque 3.8 — Interprétation géométrique de la formule de la Taylor-Young pour $n = 2$ La formule de Taylor-Young, comme pour les fonctions d'une variable[10], possède une interprétation géométrique. En effet, avec les mêmes notations que dans la formule, notons $\mathrm{T_A}(f)$ le plan ci-après :

$$\mathrm{T_A}(f) : \quad z = f(\mathrm{A}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})(y-a_2).$$

C'est un plan de $\mathbf{R}^3$, dont un vecteur normal est donné par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A}), 1\right)$$ [11]

On l'appelle le *plan tangent à $\mathscr{S}_f$ — surface représentative de f — en* A. La formule de Taylor-Young nous dit qu'au voisinage de $\mathrm{A} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, le surface représentative $\mathscr{S}_f$ de f est alors « très proche » du plan tangent $\mathrm{T_A}(f)$.

On termine par un corollaire classique, qui se démontre comme pour les fonctions d'une variable : dès qu'une fonction admet un développement limité au voisinage d'un point, alors la fonction est continue en ce point. Ici, l'existence d'un tel développement est garantie par la formule de Taylor–Young qui requiert une hypothèse $\mathscr{C}^1$ dans ce cours.

[10] où l'on sait qu'une courbe s'approche localement par sa tangente

Corollaire ANA.8.3 | Toute fonction $\mathscr{C}^1$ est continue

Soient $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors elle est continue.

Preuve Il suffit de faire tendre X vers A dans la formule de Taylor-Young : en effet, $\langle \operatorname{grad} f(A) | X - A \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}(x_i - a_i) \xrightarrow{X \to A} 0$. On obtient $f(X) \xrightarrow{X \to A} f(A)$ puisque $o(X - A) \xrightarrow{X \to A} 0$ par définition d'un « petit o ».

Résumé Lien entre les notions de régularités pour les fonctions de plusieurs variables

3.3.1. Dérivation de composées

Théorème ANA.8.2 | Règle de la chaîne (1)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{O}, \mathbf{R})$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $x_1, \dots, x_n : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ n fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R})$[12], telles que $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathcal{O}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ avec I intervalle réel. Alors $g \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \partial_i f(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$[13]

Preuve Admis.

Corollaire ANA.8.4 | Règle de la chaîne (1) – Cas $n = 2$

Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{O}, \mathbf{R})$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $x, y : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R})$, telles que $(x(t), y(t)) \in \mathcal{O}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ avec I intervalle réel. Alors $g \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x(t), y(t)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Preuve Appliquer la formule précédente dans le cas $n = 2$.

Exemple 21 — Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t^2, \sqrt{t})\right)$ pour tout $t > 0$.

[12] Encore une fois, les formules ci-dessous ne requièrent aucunement l'hypothèse $\mathscr{C}^1$ en vérité, mais nous les énonçons ainsi conformément au programme

[13] Remarquons que pour $n = 1$, on retrouve la formule de dérivation d'une composée pour les fonctions d'une variable.

Théorème ANA.8.3 | Règle de la chaîne (2) – Cas $n = 2$

Soient $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ deux ouverts de $\mathbf{R}^2$, et $x : \mathscr{O}_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, $y : \mathscr{O}_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f : \mathscr{O}_2 \longrightarrow \mathbf{R}$, trois applications $\mathscr{C}^1$ telles que : $\quad \forall (u,v) \in \mathscr{O}_1, \quad (x(u,v), y(u,v)) \in \mathscr{O}_2$.

Alors $g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_1 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(x(u,v), y(u,v)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)),$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)).$$

Preuve Nous admettons cette deuxième formule.

Exemple 22 — *Cas du changement polaire* Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que $f^{\mathbf{pol}} : (r,\theta) \in \mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi[\longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\frac{\partial}{\partial r}(f^{\mathbf{pol}}(r,\theta))$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(f^{\mathbf{pol}}(r,\theta))$ en fonction des dérivées partielles de f, pour tous $(r,\theta) \in \mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi[$.

3.4. Fonctions $\mathscr{C}^2$

On se restreint dans cette partie aux fonctions de deux variables ($n = 2$) pour simplifier, même si l'ensemble des résultats peuvent être étendus aux fonctions de n variables.

Définition ANA.8.13 | Dérivées d'ordre supérieure

Soit $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$.

1. Supposons que f admette une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathscr{O}$, et soit $A \in \mathscr{O}$.
   - si $\frac{\partial f}{\partial x}$ possède une dérivée partielle au point A par rapport à sa première variable, on pose :
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(A),$$
   - si $\frac{\partial f}{\partial x}$ possède une dérivée partielle par rapport à y en A, on pose :
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(A) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(A).$$
2. On définit de la même manière $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(A)$.

Définition ANA.8.14 | Classe $\mathscr{C}^2$, cas $n = 2$

Soit $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ où $\mathscr{O}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. On dit que f est de *classe* $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$ si toutes ses dérivées partielles secondes sont définies et continues sur $\mathscr{O}$.

Notation

On note $\mathscr{C}^2(\mathscr{O}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$.

Pour finir, un théorème qui sera lui aussi admis (la démonstration est difficile) : on peut permuter l'ordre des dérivées dans les dérivées croisées dès que la fonction est $\mathscr{C}^2$.

Théorème ANA.8.4 | Scwharz

Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbf{R})$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}.$$

Preuve Admis.

Exemple 23 — Vérifier le résultat du théorème de Scwharz sur la fonction $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^3 - y^3 x + \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ après avoir précisé son ensemble de définition.

Exemple 24 — *Cas du changement polaire* Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, montrer que $f^{\mathbf{pol}}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(f^{\mathbf{pol}}(r, \theta))$ en fonction des dérivées partielles secondes de f, pour tous $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi[$. <u>*Indication :*</u> *On pourra se servir des dérivées partielles d'ordre un, qui ont déjà été calculées.*

Exemple 25 — *Primitivation partielle seconde*

1. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

3.5. *Extrema*

Pour terminer, nous revenons à l'une des motivations initiales : l'optimisation de fonctions de plusieurs variables, *i.e.* la recherche de minimums et de maximums.

Définition ANA.8.15 | *Extrema*

- **(Global)** On dit qu'une fonction $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ admet en $\mathrm{A} \in \mathrm{P}$ un *minimum* (*resp. maximum*) si :

$$\begin{array}{lll} & \forall \mathrm{X} \in \mathrm{P}, & f(\mathrm{X}) \geqslant f(\mathrm{A}) \\ (\textit{resp.} & \forall \mathrm{X} \in \mathrm{P}, & f(\mathrm{X}) \leqslant f(\mathrm{A})), \end{array}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{array}{lll} & \forall \mathrm{H} \in \mathbf{R}^n, \mathrm{A}+\mathrm{H} \in \mathrm{P} & f(\mathrm{A}+\mathrm{H}) \geqslant f(\mathrm{A}) \\ (\textit{resp.} & \forall \mathrm{H} \in \mathbf{R}^n, \mathrm{A}+\mathrm{H} \in \mathrm{P}, & f(\mathrm{A}+\mathrm{H}) \leqslant f(\mathrm{A})), \end{array}$$ [14]

- **(Local)** On dit que f admet en $\mathrm{A} = (a_0, \dots a_n) \in \mathrm{P}$ un *minimum local* (*resp. maximum local*) si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage ouvert de A.[15] On dit que f admet en A un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en A un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).

Pour les fonctions dérivables d'une variable, on sait qu'en tout extremum (même local) situé dans l'intérieur du domaine de définition, la dérivée première est nulle (on avait parlé de point critique). Voici l'analogue pour les fonctions de plusieurs variables.

Théorème ANA.8.5 | Condition nécessaire pour être un extremum local

Soient $f : \mathscr{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application, $\mathscr{O}$ un ouvert, et $\mathrm{C} \in \mathscr{O}$. On suppose que :

1. f admet en C un extremum local,
2. f admet des dérivées partielles dans toutes les directions en C.

Alors :

C est un point critique de f.

Preuve Utiliser le résultat déjà montré pour les fonctions d'une variable à chaque dérivée partielle de f.

Attention

Il s'agit d'une condition **nécessaire.** En effet, si nous considérons la fonction $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow x^2 - y^2$. Les points critiques $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 2x &= 0, \\ 2y &= 0, \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

Et $(0, 0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum local (et *a fortiori* global), en effet : pour tout $\varepsilon > 0$,

[14] Il est souvent plus visuel d'utiliser la forme en « A + H » que celle « en X » car on préfère faire tendre des variables vers 0 que vers A.

[15] la seule différence entre les deux définitions portent donc sur l'ensemble où l'inégalité est vraie. Dans le second, uniquement sur un petit domaine autour du point.

- $f(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}) - f(0,0) = \varepsilon^2 - \varepsilon = \varepsilon(\varepsilon - 1)$ est du signe de $-\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro,
- $f(\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) - f(0,0) = \varepsilon - \varepsilon^2 = \varepsilon(1-\varepsilon)$ est du signe de $+\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro.

Ceci prouve que $(0,0)$ n'est pas un *extrema* local.

On peut le constater sur un dessin.

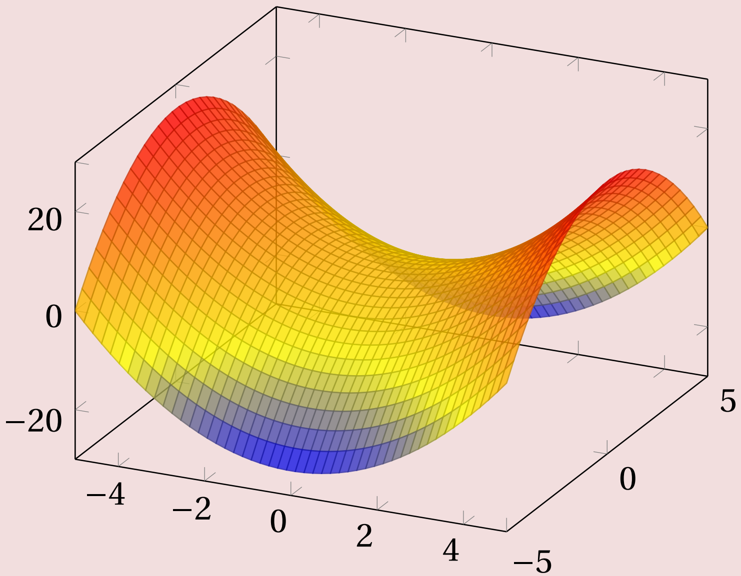


FIG. ANA.8.3. : Exemple de *point selle* en $(0,0)$: ni maximuml, ni minimum en ce point

Preuve Appliquer la preuve du Chapter ANA.7 pour chacune des dérivées partielles.

Remarque 3.9 — Il existe des méthodes pour déterminer la nature d'un point critique mais qui ne sont pas à notre programme. Tout exercice sur le sujet sera donc guidé et consistera en la vérification de la Définition ANA.8.15.

Exemple 26 —

1. Déterminer les points critiques de la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^3 - 3x + y^2$.

2. Déterminer les points critiques de la fonction $g : (x,y) \longmapsto x^2 - 4x + y^3 - 3y$.

Exemple 27 — *Retour sur la régression linéaire* On considère $(x_i, y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $n \geqslant 1$ est un nuage de n points de $\mathbf{R}^2$. On rappelle que dans le problème de recherche de droite des moindres carrés, on souhaite minimiser la quantité définie ci-après. Déterminer l'unique point critique $(a^\star, b^\star)$ de la fonction $\mathrm{F} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad \mathrm{F}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

On rappelle les définitions des quantités statistiques usuelles suivantes :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \; \mathbf{V}_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \sigma_x^2, \quad \mathbf{C}_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}.$$

On montrera que :

$$\boxed{a^\star = \frac{\mathbf{C}_{x,y}}{\sigma_x^2}, \qquad b^\star = \overline{y} - a^\star\overline{x}.}$$

Remarque 3.10 — Nous referons appel à ce résultat dans le Chapter ALEA.17, et nous montrerons que $(a^\star, b^\star)$ est un minimum global de F.

$\star\star\star$ **Fin du chapitre** $\star\star\star$

4. EXERCICES

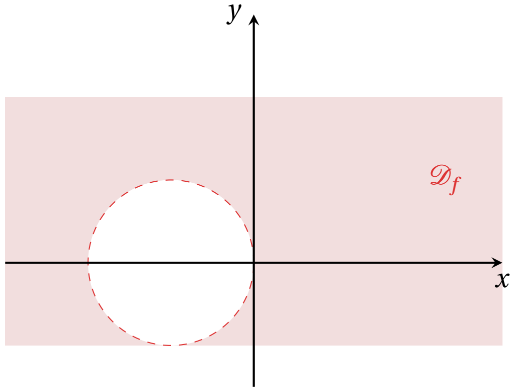
4.1. Généralités

Exercice ANA.8.1 | Soit f la fonction définie par $f(x,y)=\ln(2x+x^2+y^2)$, pour tout (x,y) dans un ensemble à préciser dans la suite.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, et le représenter graphiquement.
2. Montrer que les lignes de niveau de f sont des cercles dont on donnera le centre et le rayon.

Solution (exercice ANA.8.1)

1. La fonction f est définie pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ tel que
$$2x+x^2+y^2>0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2+y^2>1,$$
en mettant le premier polynôme sous forme canonique. Donc l'ensemble de définition de f est
$$\boxed{\mathscr{D}_f=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ (x+1)^2+y^2>1\right\}}.$$
L'ensemble $(x+1)^2+y^2>1$ est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 1, donc $\mathscr{D}_f$ est la partie extérieure strictement à ce cercle (en rouge sur le dessin)



2. Soit $k\in\mathbf{R}$, alors
$$\begin{aligned}\ln(2x+x^2+y^2)&=k,\\ 2x+x^2+y^2&=\mathrm{e}^k,\\ (x+1)^2+y^2&=\mathrm{e}^k+1.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la ligne de niveau } k \text{ est le cercle de centre } (-1,0) \text{ et de rayon } \sqrt{\mathrm{e}^k-1}.}$

Exercice ANA.8.2 | **Analyse d'une surface représentative** Des espèces d'insectes ont été inventoriées dans plusieurs milieux sur une colline calcaire, selon une échelle de dynamique végétale ν depuis la pelouse sèche (valeur 1) jusqu'au sous-bois (valeur 6) et la hauteur h en cm de la végétation herbacée (entre 5 et 40 cm). Le nombre NB d'espèces d'insectes est modélisé par la fonction
$$f(\nu,h)=-0.466\nu^2+2.960\nu-0.00655h^2+0.34625h+1.08725,$$
de la variable $(\nu,h)\in\mathbf{R}^2$. On peut visualiser sa surface représentative.

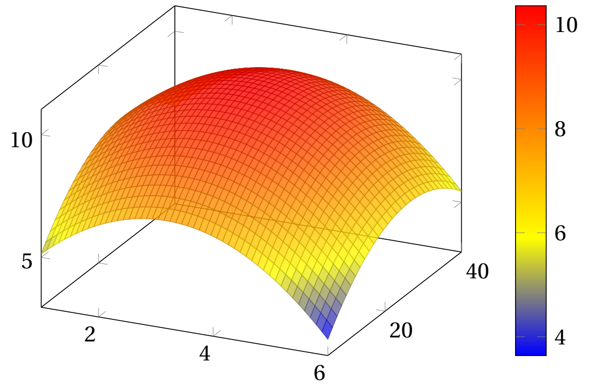


Fig. ANA.8.4. : Graphe de f

1. Légender la figure.

2. Quelle est la valeur du milieu où l'on attend la plus grande richesse en espèce d'insectes ? Quel est le NB maximal associé ?
3. En un point quelconque $M(v, h), (v, h) \in \mathbf{R}^2$, quelle est la direction $V \in \mathbf{R}^2$ dans laquelle la fonction f « varie le plus vite » ? (*i.e.* celle où $\left|\frac{\partial f}{\partial V}\right|$ est maximale) Quelle est la valeur $\Delta(v, h)$ de cette variation maximale ?

Solution (exercice ANA.8.2)

1. L'axe des abscisses correspond donc à l'indice du milieu (entre 0 et 6), celui des ordonnées à la hauteur de végétation herbacée (entre 20 et 40), et NB se lit sur la cote.
2. L'indice maximal du milieu correspond à NB maximal semble être $\boxed{v = 3, \mathrm{NB}_{max} \approx 12}$. Quelle est la valeur du milieu où l'on attend la plus grande richesse en espèce d'insectes ? Quel est le NB maximal associé ?
3. Soit $M(v, h), (v, h) \in \mathbf{R}^2$. D'après le cours, on sait que la direction cherchée est donnée par le gradient au point M. Or,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(M) = -0.932v + 2.960, \qquad \frac{\partial f}{\partial h}(M) = -0.0131h + 0.34625.$$

Donc au point M, f varie le plus vite dans la direction $\boxed{V = (-0.932v + 2.960, -0.0131h + 0.34625).}$
La valeur de la variation maximale est alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial V}(M)\right|.$$

D'après le cours nous savons que cette variation maximale est

$$\left\|\operatorname{grad} f(M)\right\| = \boxed{(-0.932v + 2.960)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2}.$$

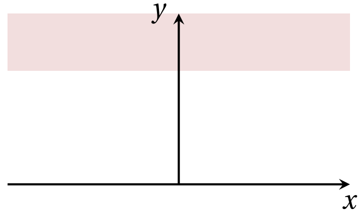
4.2. Dérivation & Primitivation

Exercice ANA.8.3 | **Dérivabilité partielle** Pour chacune des fonctions ci-dessous $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, déterminer le domaine de définition et le représenter, puis calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

1. $f : (x, y) \longmapsto \ln(2-y) + e^x \sin(y) - \sqrt{x^2+1}$,
2. $f : (x, y) \longmapsto \frac{\ln(1-x)\ln(y-2)}{\sqrt{2x+y-1}}$,
3. $f : (x, y) \longmapsto \cos(x)\cos(y)\cos(y-x)$,
4. $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{2-x^2-y^2+2x-2y} + \ln\left(x^2 y\right)$,
5. $f : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right)$.

Solution (exercice ANA.8.3)

1. $\boxed{\mathscr{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y > 2\right\}}$. C'est donc le demi-plan supérieur à la droite $y =$



2. Calculons à présent les dérivées partielles : $\forall (x, y) \in \mathscr{D}_f$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \boxed{\sin(y) - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}},}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \boxed{-\frac{1}{2-y} + e^x.}$$

2. $\boxed{\mathscr{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x < 1, y > 2, y > 1-2x\right\}}$. Calculons à présent les dérivées par-

tielles : $\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boxed{\ln(y-2)\frac{-\frac{1}{1-x}\sqrt{2x+y-1} - \ln(1-x)\frac{2}{2\sqrt{2x+y-1}}}{2x+y-1}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boxed{\ln(1-x)\frac{\frac{1}{y-2}\sqrt{2x+y-1} - \ln(y-2)\frac{1}{2\sqrt{2x+y-1}}}{2x+y-1}}.$$

3. ...

Exercice ANA.8.4 | Primitivation partielle

1. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sin y \mathrm{e}^{x \sin y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (x\mathrm{e}^{x\sin y} + y)\cos y. \end{cases}$$

2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\ln(x^2+1), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2f(x,y) + 2(x^2+1)\ln(x^2+1) - 2x^2 + y^2. \end{cases}$$

Solution (exercice ANA.8.4)

Notons à chaque fois (S) le système de dérivées partielles.

1. Nous aurons besoin dans la suite de déterminer une primitive de $y \longmapsto y\cos y$. Faisons donc une intégration par parties. Pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \int_0^y t\cos(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_0^y \sin(t)\,\mathrm{d}t + [t\ \sin t]_0^y \\ &= \cos y - 1 + y\sin y, \end{aligned}$$

puisque les fonctions $t \longmapsto t, t \longmapsto \sin t$ sont $\mathscr{C}^1$. Soit maintenant $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\text{(S)} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sin y \mathrm{e}^{x \sin y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (x\mathrm{e}^{x\sin y} + y)\cos y. \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} f(x,y) &= \mathrm{e}^{x\sin y} + \mathrm{K}(y), \\ f(x,y) &= \mathrm{e}^{x\sin y} + \cos y - 1 + y\sin y + \mathrm{L}(x) \end{cases}, \quad \mathrm{K}, \mathrm{L} \text{ dérivables.}$$

En égalisant les deux lignes, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \mathrm{K}(y) - \cos y + 1 - y\sin y = \mathrm{L}(x).$$

Or, une fonction de x ne peut être égale à une fonction de y que si les deux fonctions sont constantes. En effet, si f, g désignent deux fonctions d'une variable telles que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x) = g(y)$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(0)$ (faire $y = 0$), et pour tout $y \in \mathbf{R}$, $f(0) = g(y)$ (faire $x = 0$). Donc f, g sont constantes et nécessairement valent la même constante car $f(0) = g(0)$. Utilisant ceci, nous déduisons l'existence de $\mathrm{M} \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \mathrm{K}(y) = \mathrm{M} + \cos y - 1 + y\sin y, \quad \mathrm{L}(x) = \mathrm{M}.$$

Et donc

$$\begin{cases} f(x,y) &= \mathrm{e}^{x\sin y} + \mathrm{M} + \cos y - 1 + y\sin y, \\ f(x,y) &= \mathrm{e}^{x\sin y} + \mathrm{M} + \cos y - 1 + y\sin y. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\left\{(x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{x\sin y} + \mathrm{M} + \cos y - 1 + y\sin y,\ \mathrm{M} \in \mathbf{R}\right\}}.$$

2. Commençons par déterminer une primitive de $x \longmapsto 2x\ln(x^2+1)$. Faisons donc une intégration par parties. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^x (2t)\ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t &= -2\int_0^x \frac{t^2}{2}\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + 2\left[\frac{t^2}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^x\\ &= -2\int_0^x \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + x^2\ln(x^2+1)\\ &= -2\int_0^x \frac{t(t^2+1)-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + x^2\ln(x^2+1)\\ &= -2\left[\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^x + x^2\ln(x^2+1)\\ &= \ln(x^2+1)-x^2+x^2\ln(x^2+1),\end{aligned}$$

puisque les fonctions $t \longmapsto \frac{t^2}{2}, t \longmapsto \ln(t^2+1)$ sont $\mathscr{C}^1$. Soit maintenant $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}) \iff & \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x^2+1),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2f(x,y)+2(x^2+1)\ln(x^2+1)-2x^2+y^2 \end{cases}\\ \iff & \begin{cases} f(x,y) = \ln(x^2+1)-x^2+x^2\ln(x^2+1)+\mathrm{K}(y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2f(x,y)+2(x^2+1)\ln(x^2+1)-2x^2+y^2 \end{cases} \quad \text{K dérivable}\\ \iff & \begin{cases} f(x,y) = \ln(x^2+1)-x^2+x^2\ln(x^2+1)+\mathrm{K}(y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2f(x,y)+2(x^2+1)\ln(x^2+1)-2x^2+y^2 \end{cases} \quad \text{K dérivable.}\end{aligned}$$

En injectant la ligne 1 dans la ligne 2, on trouve

$$\begin{aligned}&\mathrm{K}'(y) = -2(\ln(x^2+1)-x^2+x^2\ln(x^2+1)+\mathrm{K}(y))+2(x^2+1)\ln(x^2+1)-2x^2+y^2\\ \iff\ & \mathrm{K}'(y) = -2\mathrm{K}(y)+y^2.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, donc $\mathrm{K}(y) = \mathrm{L}e^{-2y}+\widehat{\mathrm{K}}(y)$, où $\widehat{\mathrm{K}}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche cette solution particulière par variation de la constante, on trouve $\widehat{\mathrm{K}}(y) = -\frac{1}{2}(y-1)y+\frac{1}{4}$. Donc

$$\mathrm{K}(y) = \mathrm{L}e^{-2y}-\frac{1}{2}(y-1)y+\frac{1}{4},$$

on peut enfin conclure sur l'ensemble des solutions de (S) :

$$\boxed{\left\{(x,y)\longmapsto \ln(x^2+1)-x^2+x^2\ln(x^2+1)+\mathrm{L}e^{-2y}-\frac{1}{2}(y-1)y+\frac{1}{4},\ \mathrm{L}\in\mathbf{R}\right\}}.$$

4.3. Règle de la chaîne et équation aux dérivées partielles

Exercice ANA.8.5 | Soit V une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction Φ définie par

$$\forall t>0,\quad \Phi(t) = \mathrm{V}(t^2+1, e^t+\ln t-1),$$

après avoir justifié la dérivabilité.

Solution (exercice ANA.8.5)

La fonction V est de classe $\mathscr{C}^1$ et $t \longmapsto t^2+1, t \longmapsto e^t+\ln t-1$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$. La règle de la chaîne nous dit alors que Φ est dérivable. De plus, pour tout $t>0$,

$$\boxed{\Phi'(t) = 2t\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}(t^2+1, e^t+\ln t-1)+\left(e^t+\frac{1}{t}\right)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}(t^2+1, e^t+\ln t-1)}.$$

Exercice ANA.8.6 | **EDP et changement affine** On cherche à déterminer l'ensemble E des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \quad (\mathrm{E})$$

1. On pose $u = x+y$ et $v = x-y$. Exprimer x et y comme fonctions de u et v. Ces deux fonctions seront notées $(u,v)\in\mathbf{R}^2 \longmapsto x(u,v)$ et $(u,v)\in\mathbf{R}^2\longmapsto y(u,v)$ dans la suite.
2. On pose $g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ pour tout $(u,v)\in\mathbf{R}^2$. Exprimer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g.

3. Donner une condition sur la fonction g qui équivaut à (E). Déterminer les fonctions g qui satisfont cette condition.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution (exercice ANA.8.6)

1. On pose $\begin{cases} u &= x+y, \\ v &= x-y, \end{cases}$ il s'agit d'un système linéaire que l'on résout très facilement :

$$u+v = 2x, \quad u-v = 2y,$$

On déduit alors : $\boxed{x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.}$

2. On pose $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. De manière équivalente, nous avons :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad f(x,y) = g(x+y, x-y).$$

Alors, d'après la formule de la chaîne nous avons pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x,y),}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x,y).}$$

3. Alors f est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x,y),$$

ceci est encore équivalent à

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0.$$

Cette équation est un problème de primitivation partielle classique : g est alors une fonction de u, il existe une fonction K de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad g(u,v) = \mathrm{K}(u).$$

4. On peut ensuite conclure sur les solutions en f :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = g(x+y, x-y) = \mathrm{K}(x+y)}.$$

Exercice ANA.8.7 | EDP et changement polaire Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation les équations aux dérivées partielles dans l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$:

1. $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$.
2. $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+y^2$, sur $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0), y > 0\right\}$.

Indication : On considèrera la fonction $g : (r,\theta) \in [0,2\pi[\times \boldsymbol{R}^{+} \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Solution (exercice ANA.8.7)

D'après la règle de la chaîne, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$, et

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

1. Nous avons

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

coordonnées polaires bijectives, on remplace $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{+} \times [0,2\pi], \quad (r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - (r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

calculs précédents

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{+} \times [0,2\pi], \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$$

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}^{+} \times [0,2\pi], \quad g(r,\theta) = \mathrm{K}(r), \quad \text{K dérivable},$$

$x = r\cos\theta, y = \sin\theta$ donne $x^2+y^2 = r^2$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, (x,y) \neq (0,0), \quad \boxed{f(x,y) = \mathrm{K}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}, \quad \text{K dérivable.}$$

2. Nous avons

$$\forall (x,y)\in \mathbf{R}^2,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+y^2$$

$$\forall (r,\theta)\in \mathbf{R}^+\times[0,2\pi],\quad r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=r^2$$

calculs précédents sur l'ensemble des couples non nuls, donc $r\neq 0$

on résout

$$\forall (r,\theta)\in \mathbf{R}^+\times[0,2\pi],\quad r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r^2$$

$$\forall (r,\theta)\in \mathbf{R}^{+\star}\times[0,2\pi],\quad \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r$$

$$\forall (r,\theta)\in \mathbf{R}^{+\star}\times[0,2\pi],\quad g(r,\theta)=\frac{r^2}{2}+\mathrm{K}(\theta),\quad \mathrm{K}\text{ dérivable,}$$

$$\forall (x,y)\in \mathbf{R}^2,(x,y)\neq(0,0),y>0,\quad \boxed{f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}+\mathrm{K}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)},\quad \mathrm{K}\text{ dérivable.}$$

Pour revenir aux coordonnées x,y, nous avons utilisé $x=r\cos\theta, y=\sin\theta$ qui donne $x^2+y^2=r^2, \tan\theta=\frac{y}{x}$ et puisque $y>0$, $\theta\in]-\pi/2,\pi/2[$, on peut donc passer à l'arctan pour obtenir $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Exercice ANA.8.8 | Relation fondamentale de l'analyse pour les fonctions de deux variables Soit $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. On note $g:t\in[0,1]\longmapsto f(tx_1,tx_2)$ pour tous $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.

1. Justifier que g est dérivable et que : $\quad g(1)=g(0)+\displaystyle\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t.$

2. En déduire que :

$$f(x_1,x_2)=f(0,0)+x_1\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(tx_1,tx_2)\,\mathrm{d}t+x_2\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(tx_1,tx_2)\,\mathrm{d}t.$$

Solution (exercice ANA.8.8)

1. Puisque $t\longmapsto tx_i$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ pour $i\in[\![1\,,2]\!]$, et que f est de classe $\mathscr{C}^1$, g est également de classe $\mathscr{C}^1$ d'après la règle de la chaîne (version I). Donc g' est continue et

$$\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t=[g]_0^1=g(1)-g(0).$$

Donc : $\boxed{g(1)=g(0)+\displaystyle\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t.}$

2. Par ailleurs, d'après la règle de la chaîne,

$$g'(t)=x_1\frac{\partial f}{\partial x}(tx_1,tx_2)+x_2\frac{\partial f}{\partial x}(tx_1,tx_2),$$

pour tout $t\in[0,1]$, $g(0)=f(0,0), g(1)=f(x_1,x_2)$. En combinant les deux questions, on déduit :

$$\boxed{f(x_1,x_2)=f(0,0)+x_1\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}f(tx_1,tx_2)\,\mathrm{d}t+x_2\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}f(tx_1,tx_2)\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice ANA.8.9 | Une équation aux dérivées partielles de transport/diffusion – Extrait ENS 2020 Dans cette partie, on fixe $m\in\mathbf{R}$, et on s'intéresse aux fonctions u de $[0,1]\times\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, et solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=m\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\qquad (1)$$

avec conditions de bord $\quad\forall t\geq 0,\quad u(0,t)=u(1,t)=0\quad$ (2). On cherche les solutions u non identiquement nulles (*i.e.* non identiquement nulles) qui peuvent se décomposer en un produit de deux fonctions d'une seule variable, *i.e.* les solutions dites à *variables séparables*.

Soient donc $f:[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ et $g:\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que la fonction $u:[0,1]\times\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}$ définie par $u(x,t)=f(x)g(t)$ ne s'annule pas et est solution de (1) et (2).

1. Vérifier que les fonctions f et g ne s'annulent pas non plus.
2. Montrer qu'il existe un réel λ tel que la fonction g vérifie l'équation différentielle : $\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad g'(t) = \lambda g(t)$, puis résoudre cette équation différentielle.
3. Montrer que pour cette même valeur de λ, la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{2}f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x),$$

avec condition de bord $f(0) = f(1) = 0$.
4. On suppose dans cette question que $\lambda > -\frac{m^2}{2}$.
   4.1) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = a\mathrm{e}^{r_+x} + b\mathrm{e}^{r_-x}, \text{ avec } r_+, r_- \in \mathbf{R} \text{ à préciser.}$$

   4.2) Montrer que a et b sont nécessairement nuls, et obtenir une contradiction.
5. En procédant comme dans la question précédente, obtenir une contradiction si l'on suppose $\lambda = -\frac{m^2}{2}$.
6. On suppose dans cette question que $\lambda < -\frac{m^2}{2}$.
   6.1) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = (a\cos(\pi\ell x) + b\sin(\pi\ell x))\mathrm{e}^{-mx}, \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{1}{\pi}\sqrt{-2\lambda - m^2}.$$

   6.2) Montrer que l'on a nécessairement $a = 0, b \neq 0$, et $\ell \in \mathbf{N}^\star$.
7. Déterminer tous les couples (f, g) de fonctions $\mathscr{C}^2$ tels que la fonction $u : (x,t) \longmapsto u(x,t) = f(x)g(t)$ ne s'annule pas, et soit solution de (1) et (2).

Solution (exercice ANA.8.9)

1. Si l'une des fonctions f et g est identiquement nulle, alors la fonction u est identiquement nulle. Par contraposée, comme u est supposée non identiquement nulle, chacune des deux fonctions $\boxed{f \text{ et } g \text{ est non identiquement nulle}}$.
2. Comme les fonctions f et g sont supposées de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction u admet des dérivées partielles du premier et du second ordre sur le pavé $[0,1] \times \mathbf{R}_+$, et on a :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}_+, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x)g'(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f'(x)g(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f''(x)g(t).$$

L'équation aux dérivées partielles (1) s'écrit alors :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}_+, \quad f(x)g'(t) = mf'(x)g(t) + \frac{1}{2}f''(x)g(t) \quad (1').$$

Comme la fonction f est non identiquement nulle, il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $f(x_0) \neq 0$. Divisons membre à membre par $f(x_0)$ dans l'identité ci-dessus :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad g'(t) = \frac{1}{f(x_0)}\left(mf'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\right)g(t).$$

Il suffit de poser $\boxed{\lambda = \frac{1}{f(x_0)}\left(mf'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\right)}$, et g vérifie alors $g'(t) = \lambda g(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$. On sait résoudre cette équation différentielle du premier ordre homogène à coefficients constants :

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad g(t) = g(0)\mathrm{e}^{\lambda t}.}$$

3. On injecte ce dernier résultat dans l'équation (1′) :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x)g(0)\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} = (mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x))g(0)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Si le réel $g(0)$ était nul, la fonction g serait identiquement nulle, ce qui serait en contradiction avec le résultat de la question 1. Ainsi, le réel $g(0)$ n'est pas nul. On peut donc diviser membre à membre par $g(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{2}f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x).}$$

De plus, on a

$$f(0) = \frac{u(0,0)}{g(0)} = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{u(1,0)}{g(0)} = 0.$$

4. **4.1)** La fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique associée

$$\frac{1}{2}r^2 + mr - \lambda = 0.$$

Le discriminant du polynôme du second degré associé vaut

$$\Delta = m^2 + 2\lambda.$$

Dans cette question, l'énoncé suppose $\Delta > 0$. L'équation caractéristique admet donc deux racines réelles distinctes

$$\boxed{r_+ = -m + \sqrt{m^2+2\lambda} \quad \text{et } r_- = -m - \sqrt{m^2+2\lambda}.}$$

Par conséquent, il existe un unique couple (a, b) de réels vérifiant :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f(x) = a\mathrm{e}^{r_+ x} + b\mathrm{e}^{r_- x}.}$$

4.2) Les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ fournissent le système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \mathrm{e}^{r_+} a + \mathrm{e}^{r_-} b = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b. Le déterminant de ce système vaut

$$e^{r_-} - \mathrm{e}^{r_+} \neq 0$$

puisque les réels r_+ et r_- sont distincts et la fonction exponentielle injective sur $\mathbf{R}$. Ce système linéaire admet donc une unique solution, qui est la solution triviale $(a, b) = (0, 0)$. Ainsi,

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est identiquement nulle, ce qui contredit le résultat de la question 1}}$.

5. Dans cette question, l'énoncé suppose que l'on a $\Delta = 0$ (voir notation précédente). L'équation caractéristique admet donc une unique racine réelle $r = -m$. Par conséquent, il existe un unique couple (a, b) de réels vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{rx}.$$

Les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ fournissent le système :

$$\begin{cases} b = 0 \\ (a+b)\mathrm{e}^r = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à $a = b = 0$. Ainsi,

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est identiquement nulle, ce qui contredit là encore le résultat de la question 1}}$.

6. Dans cette question, l'énoncé suppose que l'on a $\Delta < 0$.

6.1) L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes non réelles conjuguées

$$r_+ = -m + \mathrm{i}\sqrt{-m^2-2\lambda} \quad \text{et } r_- = -m - \mathrm{i}\sqrt{-m^2-2\lambda}.$$

Par conséquent, il existe un unique couple (a, b) de réels vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \left(a\cos(\sqrt{-m^2-2\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-m^2-2\lambda}x)\right)\mathrm{e}^{-mx}.$$

c'est-à-dire, avec le réel ℓ introduit par l'énoncé,

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \left(a\cos(\pi\ell x) + b\sin(\pi\ell x)\right)\mathrm{e}^{-mx}.}$$

6.2) La condition aux limites $f(0) = 0$ montre que l'on a $\boxed{a=0}$. Comme la fonction f n'est pas identiquement nulle (question 1), on a nécessairement $\boxed{b \neq 0}$. La condition initiale $f(1) = 0$ montre, puisque b et l'exponentielle de s'annulent pas :

$$\sin(\pi\ell) = 0$$

donc ℓ est un entier relatif, non nul puisque f est non identiquement nulle. Sa définition par $\ell = \frac{1}{\pi}\sqrt{\dots}$ montre que l'entier ℓ est positif. Ainsi, on a $\boxed{\ell \in \mathbf{N}^*}$.

7. On a effectué une *analyse* : *s'il existe* une fonction $u : (x,t) \longmapsto f(x)g(t)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1] \times \mathbf{R}_+$ non identiquement nulle vérifiant (1) et (2), *alors* nécessairement, en notant x_0 un élément de $[0,1]$ vérifiant $f(x_0) \neq 0$ et $\lambda = \frac{1}{f(x_0)}\left(mf'(x_0)g(t) + \frac{1}{2}f''(x_0)\right)$, on a :

- $-2\lambda - m^2 > 0$
- le réel $\ell = \frac{1}{\pi}\sqrt{-2\lambda - m^2}$ est un entier naturel non nul
- il existe $b \in \mathbf{R}^*$ tel que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = b\sin(\pi\ell x)e^{-mx}.$$

- il existe un réel c tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad g(t) = c\,\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

En d'autres termes, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions u de $[0,1]\times\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, s'écrivant sous la forme $u:(x,t)\longmapsto f(x)g(t)$ où $f:[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ et $g:\mathbf{R}_+\longrightarrow\mathbf{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) et vérifiant les conditions aux limites (2), on vient de démontrer l'inclusion :

$$\mathscr{S}\subset\left\{\begin{array}{rcl} u:\ [0,1]\times\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{C}\sin(\pi\ell x)\exp\left(-mx-\frac{m^2+\pi^2\ell^2}{2}t\right),\end{array}\ (\ell,\mathrm{C})\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{R}_*\right\}$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la *synthèse*, c'est-à-dire examiner l'autre inclusion. On fixe un entier naturel non nul ℓ et un réel non nul C. On pose :

$$f\left|\begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \sin(\pi\ell x)e^{-mx},\end{array}\right.\qquad g\left|\begin{array}{rcl}\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & \mathrm{C}\exp\left(-\frac{m^2+\pi^2\ell^2}{2}t\right)\end{array}\right.$$

et

$$\begin{array}{rcl} u:\ [0,1]\times\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ (x,t) & \longmapsto & f(x)g(t)=\mathrm{C}\sin(\pi\ell x)\exp\left(-mx-\frac{m^2+\pi^2\ell^2}{2}t\right).\end{array}$$

La fonction u ainsi définie est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur le pavé $[0,1]\times\mathbf{R}_+$. Elle vérifie clairement les conditions aux limites (2). Posons $\lambda=-\frac{m^2+\pi^2\ell^2}{2}<-\frac{m^2}{2}$.
La fonction g est bien solution de l'équation différentielle :

$$\forall t\in\mathbf{R}_+,\quad g'(t)=\lambda g(t)$$

et d'après le résultat de la question 4, la fonction f est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants *(on peut aussi dériver deux fois la fonction f qui est connue explicitement ici)* :

$$\forall x\in[0,1],\quad \frac{1}{2}f''(x)+mf'(x)=\lambda f(x).$$

En multipliant cette dernière équation membre à membre par $g(t)$, on obtient l'équation $(1')$:

$$\forall(x,t)\in[0,1]\times\mathbf{R}_+,\quad f(x)g'(t)=mf'(x)g(t)+\frac{1}{2}f''(x)g(t)\qquad(1')$$

D'après ce que l'on a écrit au début de la réponse à la question 2, cette dernière identité implique le fait que la fonction u est solution de l'équation aux dérivées partielles (1). L'autre inclusion est donc établie. Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{rcl} u:\ [0,1]\times\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{C}\sin(\pi\ell x)\exp\left(-mx-\frac{m^2+\pi^2\ell^2}{2}t\right),\end{array}\ (\ell,\mathrm{C})\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{R}_*\right\}}$$

4.4. En Physique

Exercice ANA.8.10 | Gaz parfaits La loi des gaz parfaits peut prendre la forme $\mathrm{PV}=n\mathrm{RT}$ où n est le nombre de molécules de gaz présentes dans un volume V, à la température T, P étant la pression R une constante. Montrer que

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\times\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{P}}\times\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}}=-1.$$

Solution (exercice ANA.8.10)

Nous avons $\mathrm{PV}=\mathrm{R}n\mathrm{T}$, donc V, T, P sont des fonctions de T, P, V et les dérivées partielles existent bien. Et de plus,

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}=\frac{\mathrm{R}n}{\mathrm{P}},\ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{P}}=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}n},\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}}=-\frac{\mathrm{R}n\mathrm{T}}{\mathrm{V}^2},$$

donc en faisant le produit :

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\times\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{P}}\times\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}}=-1.}$$

Exercice ANA.8.11 | Dans un fluide quelconque on définit le coefficient de dilatation isobare α et le coefficient de compressibilité isotherme χ par :

$$\alpha=\frac{1}{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\right),\quad \chi=-\frac{1}{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}\right),$$

avec les notations du cours de Physique. Montrer que :

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = -\frac{\partial \alpha}{\partial P}.$$

Solution (exercice ANA.8.11)

Supposant que le volume dépende de manière $\mathscr{C}^2$ de T, P *i.e.* la température et la pression, on peut appliquer le théorème de SCHWARZ. Ainsi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T\,\partial P} = \frac{\partial^2 V}{\partial P\,\partial T},$$

donc

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial T\,\partial P} = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial P\,\partial T} = \frac{\partial \alpha}{\partial P}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial \chi}{\partial T} = -\frac{\partial \alpha}{\partial P}.}$$

4.5. Optimisation

Exercice ANA.8.12 | Calculs de points critiques Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques.

1. $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x + y)e^{-x^2-y^2}$,
2. $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$,
3. $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$,

Solution (exercice ANA.8.12)

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{-x^2-y^2} + (-2x)(x+y)e^{-x^2-y^2} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{-x^2-y^2} + (-2y)(x+y)e^{-x^2-y^2} &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}(1-2x(x+y))e^{-x^2-y^2} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}(1-2y(x+y)) &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1-2x(x+y) &= 0 \\ 1-2y(x+y) &= 0 \end{cases}. \quad (\star)$$

En faisant la différence des deux lignes, on obtient :

$$2(y-x)(x+y) = 0.$$

Donc
- soit $y = x$, dans ce cas
$$1-4x^2 = 0 = (1-2x)(1+2x) \implies x = \pm\frac{1}{2}.$$
D'où les deux points critiques $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
- soit $y \neq x$, et $y = -x$, ceci est incompatible avec le système $(\star)$;

On a donc *in fine* deux points critiques : $\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).}$

2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^y + ye^x &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xe^y + e^x &= 0 \end{cases}. \quad (\star)$$

Faisons ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - xL_1$, on déduit en regardant L_2 :

$$(1-xy)e^x = 0.$$

Donc $xy = 1$. Donc $x \neq 0, y \neq 0$, et $y = \frac{1}{x}$. En injectant cette relation dans $(\star)$, on déduit

$$xe^{\frac{1}{x}} + e^x = 0.$$

Notons $g : x \in \mathbf{R}^{+\star} \longmapsto x e^{\frac{1}{x}} + e^x$. La fonction g ne peut s'annuler sur $\mathbf{R}^{+\star}$, car somme de deux fonctions strictement positives sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Par ailleurs,

$$g'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^x.$$

Si $x \in \mathbf{R}^{-\star}$, alors $g'(x) > 0$ puisque $1 - \frac{1}{x} > 0$. Donc g est continue strictement croissante sur $\mathbf{R}^{-\star}$, $\lim_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = 1$ par opérations usuelles sur les limites. Donc g ne peut s'annuler qu'une seule fois sur $\mathbf{R}^{-\star}$, car elle réalise une bijection de $\mathbf{R}^{-\star}$ vers $]-\infty, 1[$ d'après le théorème de la bijection. Mais $g(-1) = 0$, donc $\boxed{(-1,-1) \text{ est l'unique point critique.}}$

3. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x^3 - 8(x-y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y^3 + 8(x-y) &= 0 \end{cases}. \quad (\star)$$

En sommant les deux lignes du système, on trouve

$$x^3 + y^3 = 0 i.e. x^3 = -y^3. \quad (\star)$$

Si $x = 0$, alors le système de points critiques donne $y = 0$, donc $(0,0)$ est point critique. Sinon $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = -1$ d'après $(\star)$, mais $t \longmapsto t^3$ est bijective donc $\frac{y}{x} = -1$ et $y = -x$. Remplaçant ceci dans le système définissant les points critiques, on trouve :

$$4x^3 - 8.2x = 0, \quad -4x^3 + 8.2x = 0,$$

soit $x^2 - 4 = 0$ et $x = \pm 2$. Donc $(2,-2)$, $(-2,2)$ sont des points critiques. En conclusion, les points critiques sont :

$$\boxed{(2,-2), \quad (-2,2)}.$$

Exercice ANA.8.13 | Étudier les *extrema* locaux et globaux de :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3.$$

Solution (exercice ANA.8.13)

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Alors (x,y) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 &= 0, \\ 2y &= 0, \end{cases} \iff y = 0,\ x(2-3x) = 0.$$

On déduit alors les points critiques : $\boxed{(0,0), (2/3,0).}$

- **(Étude de $(0,0)$)** On étudie le signe de $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 - x^3$ pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Si $|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$, alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + y^2$ donc pour (x,y) assez proche de $(0,0)$, $f(x,y) - f(0,0) \geqslant 0$, donc $\boxed{(0,0) \text{ est un minimum local.}}$ En revanche, il n'est pas global, puisque : $f(2,0) = -4 \leqslant f(0,0) = 0$.
- **(Étude de $(2/3,0)$)** On étudie le signe de $f(x,y) - f(2/3,0)$ pour (x,y) assez proche de $(2/3,0)$ ou encore de $f(2/3+h,k) - f(2/3,0)$ pour (h,k) assez petit.

$$\begin{aligned} f(2/3+h,k) - f(2/3,0) &= \left(\frac{2}{3}+h\right)^2 + k^2 - \left(\frac{2}{3}+h\right)^3 - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} \\ &= \frac{4h}{3} + h^2 + k^2 - \left(\frac{8}{27} + 3\frac{4}{9}h + 3\frac{2}{3}h^2 + h^3\right) + \frac{8}{27} \\ &= h^2 + k^2 - 2h^2 - h^3 \\ &= -h^2 + k^2 - h^3. \end{aligned}$$

Donc $f(2/3+h,0) - f(2/3,0)$ est négatif pour (h,k) assez petit, et $f(2/3+0,k) - f(2/3,0) \geqslant 0$. Donc $\boxed{(2/3,0) \text{ n'est pas un extremum local.}}$

Exercice ANA.8.14 | Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - x^2 + y^2. \end{array} \right.$

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Montrer que f possède exactement trois points critiques.
3. **3.1)** Calculer $f(0,0)$ et étudier le signe de $f(x,0)$ et $f(0,x)$ pour x assez proche de zéro.

3.2) Que peut-on en conclure ?

4. **4.1)** Calculer $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, puis $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h,k\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ pour tout $(h,k)\in\mathbf{R}^2$.

4.2) Que peut-on en déduire ?

Solution (exercice ANA.8.14)

1. La fonction f est une fonction polynomiale donc est de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3+2y}.$$

2. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, alors $\operatorname{grad} f(x,y)=0$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\left(2x^2-1\right)=0\\ 2y\left(2y^2+1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y=0\end{cases}$$

La fonction f admet trois points critiques : $\boxed{(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}$.

3. **3.1)** $f(0,0)=0$ et pour tout x de $\mathbf{R}$, nous avons $f(x,0)=x^2\left(x^2-1\right)$ donc pour $x\in]-1;0[\cup]0;1[$, $f(x,0)<0$. Enfin, $f(0,x)=x^4+x^2>0$ pour tout $x\in\mathbf{R}^\star$.

3.2) D'après la question précédente, $f(x,y)-f(0,0)$ n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,0)$, ainsi $\boxed{f \text{ n'admet d'extremum en } (0,0).}$

4. **4.1)** $\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}}$, ensuite fixons $(h,k)\in\mathbf{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h,k\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\\
&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h\right)^4+k^4-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h\right)^2+k^2+\frac{1}{4} && \text{\textit{binôme de Newton}}\\
&=\frac{1}{4}+\frac{4h}{2\sqrt{2}}+\frac{6h^2}{2}+\frac{4h^3}{\sqrt{2}}+h^4-\frac{1}{2}-\frac{2h}{\sqrt{2}}-h^2+k^2+\frac{1}{4} && \text{\textit{simplifications}}\\
&=k^4+\frac{4h^3}{\sqrt{2}}+2h^2+k^2 && \text{\textit{factorisation par } } h^2\\
&=\boxed{h^2(h+\sqrt{2})^2+k^4+k^2}.
\end{aligned}$$

4.2) Ainsi, pour tout $(h,k)\in\mathbf{R}^2$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h,k\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\geqslant 0$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).}$