

# Chapitre ANA.9.

## Dynamique : Équations différentielles & Suites numériques

### Résumé & Plan

Nous repassons en revue dans ce chapitre les principaux éléments de la théorie des équations différentielles et des suites numériques vue en première année, et généralisons à un contexte plus général. Ces objets mathématiques traduisent la notion de «dynamique» dans un contexte continu d'une part, et discret d'autre part, *i.e.* traduisent une évolution temporelle d'un système (en des temps discrets pour des modèles discrets, ou en tout temps pour des modèles continus).

Une dynamique apparaît naturellement dans beaucoup de disciplines ; les lois de la mécanique projetées dans un repère sont des équations différentielles, les lois régissant l'électricité aussi (mailles pour la tension & noeuds pour l'intensité), ou encore les modèles de dynamique des populations (discrets et continus).

<b>1</b>	<b>Dynamique discrète : suites numériques</b>	<b>318</b>
1.1	Généralités .....	318
1.2	Limite d'une suite .....	322
1.3	Théorèmes de convergence par majoration, minoration et encadrement	324
1.4	Suites extraites des termes pairs et impairs .....	325
1.5	Théorèmes de convergence par monotonie .....	326
1.6	Suites remarquables .....	329

<b>2</b>	<b>Dynamique continue : équations différentielles</b>	<b>339</b>
2.1	Généralités .....	339
2.2	Équations différentielles linéaires scalaires .....	342
2.3	Résolution approchée par la méthode d'EULER .....	353
2.4	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants .....	356
<b>3</b>	<b>Modélisation de phénomènes dynamiques</b>	<b>358</b>
3.1	Taux d'évolution et dynamiques linéaires .....	358
3.2	Modélisation de systèmes présentant une dynamique .....	359
3.3	Dynamique des populations .....	361
<b>4</b>	<b>Exercices</b>	<b>366</b>
4.1	Suites numériques .....	366
4.2	Équations différentielles .....	376

*I say, that the power of population is indefinitely greater than the power in the earth to produce subsistence for man. Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio. Subsistence increases only in an arithmetical ratio.*

— **Thomas. R. MALTHUS**<sup>1</sup>

*Parmi toutes les disciplines mathématiques, la théorie des équations différentielles est la plus importante. Elle fournit l'explication de toutes les manifestations élémentaires de la nature où le temps est impliqué*

— **Sophus LIE**

## 1. DYNAMIQUE DISCRÈTE : SUITES NUMÉRIQUES

Nous commençons ce chapitre par des révisions de première année sur les suites numériques.

### Définition ANA.9.1 | À partir d'un certain rang

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $\mathcal{P}_n$  une propriété. On dit qu'elle est *vraie à partir d'un certain rang* s'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

<sup>1</sup>à l'origine du premier modèle continu de dynamique des populations

## 1.1. Généralités

### Définition ANA.9.2

- ▶ On appelle *suite réelle* toute application d'un sous-ensemble  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ , *i.e.* toute famille de réels indexée par un sous-ensemble de  $\mathbf{N}$  notée  $(u_n)_{n \in \mathcal{N}}$ .
- ▶ Si  $\mathcal{N} = [n_0, \infty[ \cap \mathbf{N}$  avec  $n_0 \in \mathbf{N}$ , on dit que  $(u_n)_{n \in \mathcal{N}}$  est *définie à partir d'un certain rang*.
- ▶ Pour tout  $n \in \mathcal{N}$ , on dit que  $u_n$  est le  $n$ -ième *terme* de la suite, ou le terme de *rang*  $n$ .

La plupart du temps,  $\mathcal{N}$  sera égal à  $\mathbf{N}$  ou  $\mathbf{N}^*$ , on rappelle également que  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  désigne l'ensemble des suites réelles.

### Notation Abus de ...



Lorsque l'ensemble  $\mathcal{N}$  importe peu, nous nous autoriserons à noter seulement  $(u_n)$  au lieu de  $(u_n)_{n \in \mathcal{N}}$ . Cela signifiera donc implicitement que l'on considère que  $\mathcal{N}$  est l'ensemble de définition de l'expression  $u_n$ .



### Attention

De même qu'il ne faut pas confondre une fonction  $f$  et l'image  $f(x)$  de  $x$  par  $f$ , on prendra garde de bien distinguer la suite  $(u_n)$  de son terme général d'ordre  $n$  noté lui  $u_n$  sans parenthèse.

### Définition ANA.9.3 | Ensemble de définition et graphe

L'*ensemble de définition* d'une suite, ou ensemble de départ, est l'ensemble des entiers en lesquels elle est définie. Le *graphe* (ou *représentation graphique* de  $(u_n)$ ) d'une suite  $(u_n)$  définie sur une partie  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{N}$  est l'ensemble constitué des couples  $(n, u_n)$ , où  $n$  parcourt  $\mathcal{N}$ .

On rappelle également de manière informelle qu'une suite peut être définie selon un mode *explicite*, *i.e.* son terme général en fonction de  $n$ , ou un mode par *réurrence*, *i.e.*  $u_{n+1}$  en fonction des termes précédents  $\dots, u_{n-1}, u_n$ . C'est ce second mode qui fait que l'étude des suites est indispensable, en plus de l'étude des fonctions.

On peut ainsi représenter une suite par son *graphe*. Voyons comment faire cela avec Python.

### Représentation graphique d'une suite définie explicitement avec Python

Un premier exemple, une suite définie explicitement en fonction de  $n$ . par exemple  $(u_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sqrt{n+1}.$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.plot([(k + 1)**0.5 for k in range(11)], 'bo')
```

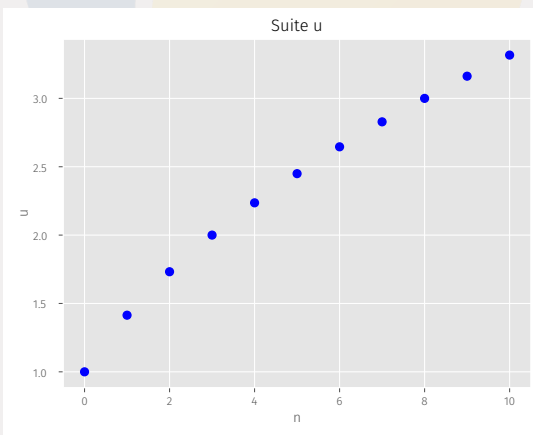
```
#Affichage en bleu et cercles
```

```
plt.title("Suite u")
```

```
plt.xlabel("n")
```

```
plt.ylabel("u")
```

```
plt.show()
```



### Représentation graphique d'une suite définie par récurrence avec Python

Un second exemple, une suite définie par une relation de récurrence. par exemple  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def u(n):
```

```
    u = 1
```

```
    for k in range(n):
```

```
        u = (u + 1)**0.5
```

```
    return u
```

```
# version récursive
```

```
def u_bis(n):
```

```
    if n == 0:
```

```
        return 1
```

```
    else:
```

```
        return (u_bis(n-1) + 1)**0.5
```

```
plt.plot([u(k) for k in range(11)], 'ro')
```

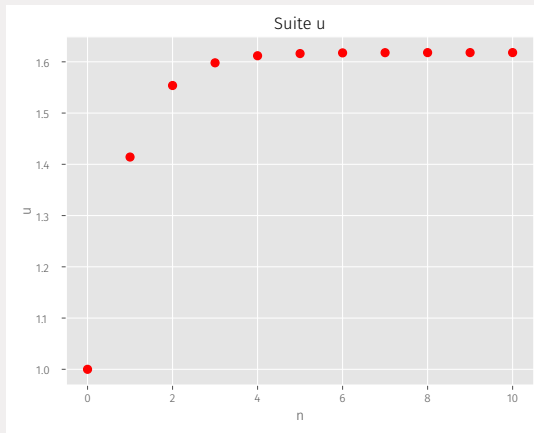
```
#Affichage en bleu et cercles
```

```
plt.title("Suite u")
```

```
plt.xlabel("n")
```

```
plt.ylabel("u")
```

```
plt.show()
```



Dans l'exemple précédent, pour chaque terme on réexécute la fonction `u` pour calculer le  $n$ -ième terme. On peut bien entendu améliorer ceci pour le tracé.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def u(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = (u + 1)**0.5
    return u
```

```
# version récursive
```

```
def liste_u(n):
    L = [1]
    for _ in range(2, n+1):
        dernier = L[-1]
        u = ma.sqrt(dernier+1)
        L.append(u)
    return L
```

Ensuite, on trace la suite comme nous l'avons fait avant, en utilisant cette fois-ci la liste `liste_u(n)`.

### Remarque 1.1 – sur les scripts

- ▶ Dans les exemples précédents, on voit que nous ne sommes pas obligés de mentionner un premier argument dans les commandes `plt.plot`. Par défaut, Python placera en abscisses les entiers positifs. Ainsi, si on veut tracer une suite sur  $\mathbf{N}^*$  (par exemple), on précisera `list(range(1, ...))` en premier argument.
- ▶ Dans les options de `plt.plot`, `'o'` signifie que l'on trace des points non reliés entre eux, `'r'` et `'b'` correspondent aux couleurs.

**Exemple 1** – Proposer quelques commandes à la volée permettant de tracer sur  $\llbracket 0, 10 \rrbracket$  la suite  $(u_n)$  ci-dessous définie par récurrence :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = |u_n| + 1.$$



### Cadre

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous considérons que  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbf{N}$ .

### Définition ANA.9.4 | Bornes et opérations sur les suites

Pour tout  $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ,  $(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on pose :

- ▶  $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ ,
- ▶  $(u_n) \times (v_n) = (u_n \cdot v_n)$ ,
- ▶  $\lambda (u_n) = (\lambda u_n)$ .

La structure d'espace vectoriel des espaces de suites numériques a déjà été établie dans le **Chapter ALG.3** :  $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel.

Puisqu'une suite est une fonction bien particulière, la notion de suite bornée, monotone, etc. a déjà été définie dans le **Chapter ANA.7**. Nous les rappelons ici reformulées dans le cadre des suites.

### Définition ANA.9.5 | Borne

On dit que la suite  $(u_n)$  est *majorée* (resp. *minorée* par  $m \in \mathbf{R}$ ) s'il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq M \quad (\text{resp. } \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m).$$

Elle est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

### Proposition ANA.9.1

Soit  $(u_n)$  une suite. Alors :

$$(u_n) \text{ est bornée} \iff \exists M \in \mathbf{R}^+, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

#### Preuve

$\Rightarrow$  Supposons la suite  $(u_n)$  bornée. Alors il existe  $(m, M) \in \mathbf{R}^+$  tel que :  $\forall n \in \mathbf{N}, \quad m \leq u_n \leq M$ . Alors nous avons immédiatement que :  $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leq \max(m, M)$ .


$\Leftarrow$  Puisque l'égalité  $|u_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $M \in \mathbf{R}^+$  est équivalente à  $-M \leq u_n \leq M$  on en déduit que  $(u_n)$  est bornée.

Comme pour les fonctions, les ensembles de suites majorées, minorées ne sont pas des espaces vectoriels. En revanche, nous avons le résultat suivant.

### Proposition ANA.9.2 | Structure d'espace vectoriel des suites bornées

L'ensemble des suites bornées forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

#### Preuve

Preuve identique aux fonctions. 

### Définition ANA.9.6 | Monotonie

La suite  $(u_n)$  est dite :

- ▶ *croissante* (resp. *strictement croissante*) si :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{resp. } \forall n \geq 0, u_n < u_{n+1}),$$

- ▶ *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \geq u_{n+1} \quad (\text{resp. } \forall n \geq 0, u_n > u_{n+1}),$$


- ▶ *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante **ou** décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante),
- ▶ **constante** si elle est croissante **et** décroissante.




### Méthode Trouver la monotonie d'une suite

1. On étudie le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$  pour tout entier  $n$ .
2. Pour les suites qui ne s'annulent pas, on peut également comparer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ . Cette seconde version est bien adaptée aux produits.

### Exemple 2 –

1. Montrer que  $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par cinq à partir d'un certain rang. Expliciter un tel rang. 

2. Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang est majorée. 

**1.2. Limite d'une suite**

**Définition ANA.9.8 | Convergence**

Soient  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  une suite. On dit que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que la suite est *convergente* et le réel  $\ell$ , appelé *limite* de la suite  $(u_n)$ , est encore noté  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , ou encore  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .

Cela signifie que l'on est « aussi proche que l'on veut » de la limite  $\ell$ , pourvu que  $n$  soit assez grand.

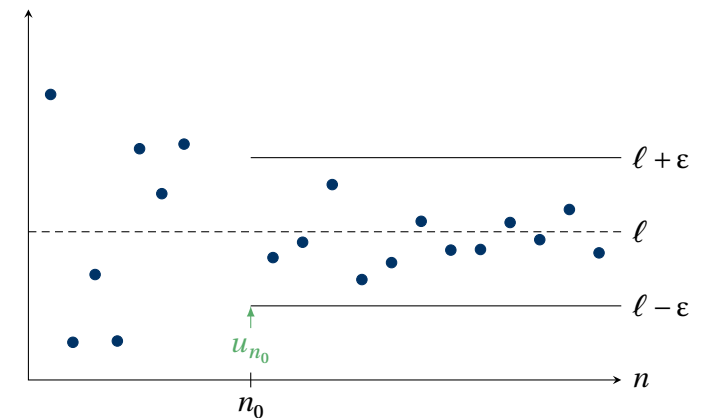


FIG. ANA.9.1. : Convergence d'une suite

**Définition ANA.9.7 | Stationnaire**

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}.$$

**Exemple 3** — La suite  $\left(3 + \left[\frac{4}{2^n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire. Expliciter l'entier  $n_0$  de la définition précédente. 

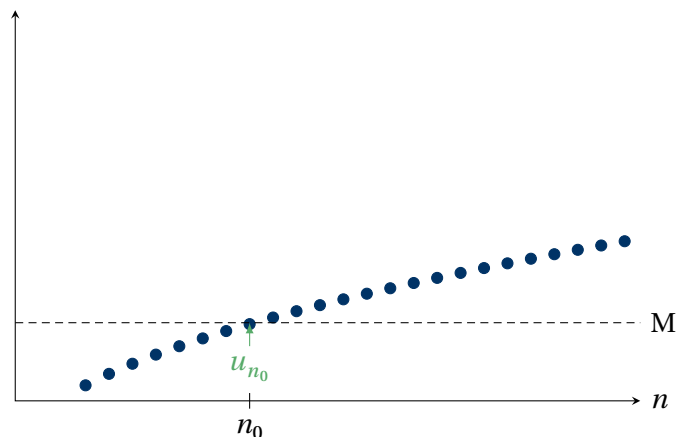


FIG. ANA.9.2. : Divergence d'une suite

### Définition ANA.9.9 | Divergence

On dit qu'une suite  $(u_n)$  *diverge vers*  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ), et on note  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  (resp.  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ ), si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A$$

$$\text{(resp. : } \forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A)$$

Une suite est dite *divergente* si elle n'est pas convergente.

Cela signifie que l'on est «aussi grand que l'on veut», pourvu que  $n$  soit assez grand.

### Définition ANA.9.10 | Nature

Déterminer la nature d'une suite c'est déterminer si elle converge ou diverge.

### ⊗ Attention Diverger ne signifie pas tendre vers $\pm\infty$

Il existe des suites qui ne convergent pas et qui ne divergent pas vers  $\pm\infty$  : ce sont celles n'ayant pas de limite. Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n n^2$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

### Théorème ANA.9.1 | Unicité de la limite

La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

**Preuve** Faisons la preuve dans le cas d'une limite finie. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell'$  et  $\ell < \ell'$ . Posons  $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3} > 0$ . Alors :

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

à partir d'un certain rang  $n_1$  et

$$\ell' - \varepsilon \leq u_n \leq \ell' + \varepsilon$$

à partir d'un certain rang  $n_2$ . Or,  $\varepsilon$  a été choisi de sorte que  $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$ . Pour  $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , on a donc :

$$u_n \leq \ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon \leq u_n$$

ce qui est absurde.

### Théorème ANA.9.2

Toute suite convergente est bornée.

**Preuve** Soient  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  et  $\varepsilon = 1 > 0$ . Alors en appliquant la définition de la convergence de  $(u_n)$ , on a :

$$\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$

à partir d'un certain rang  $n_0$ . Posons alors :

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{n_0-1}|, -(\ell - 1), \ell + 1\}.$$

Pour tout  $n \geq n_0$ , on a :  $u_n \leq \ell + 1 \leq M$  et  $-u_n \leq -(\ell - 1) \leq M$ . Ainsi, pour  $n \geq n_0$ , on a :  $|u_n| \leq M$ . Comme la majoration est immédiate pour  $n < n_0$ , alors on a prouvé :  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

### Théorème ANA.9.3

Soit  $(u_n)$  une suite.

1. Si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell > 0$ , alors :  $u_n > 0$  **à partir d'un certain rang.**
2. Plus généralement, si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$  et  $\ell' < \ell < \ell''$ , alors, on a  $\ell' < u_n < \ell''$  à

partir d'un certain rang.

### ⊗ Attention

La réciproque de **1**) est fautive : considérer par exemple la suite  $(1/n)_{n \geq 1}$  : elle est strictement positive, et pourtant elle converge vers zéro.

**Preuve** Soit  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n > 0$ . Posons  $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ . Alors  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$  à partir d'un certain rang. Comme  $\ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ , alors les termes  $u_n$  sont bien strictement positifs à partir d'un certain rang. Pour le cas général, appliquer le cas particulier à la suite  $(u_n - \ell')$ , qui converge vers  $\ell - \ell' > 0$  et à la suite  $(\ell'' - u_n)$ , qui converge vers  $\ell'' - \ell > 0$ . On en déduit bien que  $u_n - \ell' > 0$  et  $\ell'' - u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

### ⊗ Attention

Notez bien que l'encadrement de  $\ell$  nécessite des inégalités strictes. L'idée étant que si les inégalités sont larges on peut converger en «se tassant» sur la limite  $\ell'$  (mais en restant en-dessous par exemple). En revanche, si c'est strict, on peut choisir  $\varepsilon$  assez petit dans la définition de sorte que la suite pour  $n$  assez grand se retrouve strictement au-dessus de  $\ell'$ .

### Théorème ANA.9.4 | Passage à la limite dans les inégalités larges

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que :

- $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang,
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in \mathbf{R}$ ,
- $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell' \in \mathbf{R}$ .

Alors :  $\ell \leq \ell'$ .

**Preuve** Procédons par l'absurde et supposons que  $\ell > \ell'$ . Alors  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell - \ell' > 0$ , et par le théorème précédent,  $u_n - v_n > 0$  à partir d'un certain rang. C'est absurde.

### ⊗ Attention

On ne peut avoir mieux qu'une inégalité large  $\ell \leq \ell'$  dans la conclusion, même



si l'on a  $u_n < v_n$ . Considérer  $u_n = -\frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{1}{n}$  par exemple.

### Proposition ANA.9.3 | Propriétés de la limite

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergeant respectivement vers  $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$  et  $\ell' \in \overline{\mathbf{R}}$ . Alors :

- ▶ la suite  $(|u_n|)$  converge vers  $|\ell|$ .
- ▶ Si  $\{\ell, \ell'\} \neq \{-\infty, +\infty\}$ , alors la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\ell + \ell'$ .
- ▶ Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}^*$ , la suite  $(\lambda u_n)$  converge vers  $\lambda \ell$ .
- ▶ Si  $\{|\ell|, |\ell'|\} \neq \{0, +\infty\}$ , alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $\ell \ell'$ .
- ▶ Si  $\ell \neq 0$ , alors  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang et la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  converge vers  $\frac{1}{\ell}$ .
- ▶ Si  $\ell = 0$  et  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang, alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  diverge vers  $+\infty$ .

### 1.3. Théorèmes de convergence par majoration, minoration et encadrement

### Théorème ANA.9.5 | Théorème de convergence par encadrement

On considère trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  telles que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$  au moins à partir d'un certain rang,
- les deux suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers une même limite  $\ell \in \mathbf{R}$ .

Alors :  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .



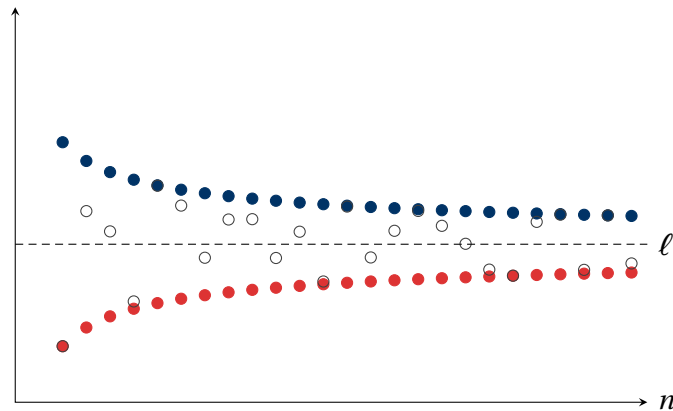


FIG. ANA.9.3. : Théorème d'encadrement : la suite représentée au milieu est nécessairement convergente

**Preuve** Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse sur  $(u_n)$  et  $(w_n)$ , il existe  $n_1 \in \mathbf{N}$  et  $n_2 \in \mathbf{N}$  tels que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

$$n \geq n_1 \implies l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geq n_2 \implies l - \varepsilon \leq w_n \leq l + \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe  $n_3 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_3 : u_n \leq v_n \leq w_n$ . Ainsi, en posant  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ , on a pour tout  $n \geq n_0 : l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$ . Ainsi,  $(v_n)$  converge vers  $l$ .

### Corollaire ANA.9.1

Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers zéro est une suite convergeant vers zéro.

**Preuve** Soit  $(u_n)$  une suite bornée disons par  $M \in \mathbf{R}^+$ , et  $(v_n)$  convergeant vers zéro. Alors pour tout  $n$ ,

$$0 \leq |u_n v_n| \leq M |v_n|,$$

or  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , donc par théorème d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = 0$ .

### Théorème ANA.9.6 | Théorème de divergence par minoration

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que :

1.  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang,

2.  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Alors :  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

**Preuve** Soit  $A \in \mathbf{R}$ . Alors  $u_n \geq A$  à partir d'un certain rang  $n_1$ . Comme  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang  $n_2$ , alors  $A \leq v_n$  à partir du rang  $\max\{n_1, n_2\}$ , d'où la conclusion.

### Corollaire ANA.9.2 | Théorème de divergence par majoration

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que :

1.  $u_n \leq v_n$  au moins à partir d'un certain rang,

2.  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ .

Alors :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ .

**Preuve** Appliquer le théorème de divergence par minoration aux suites  $(-v_n)$  et  $(-u_n)$ .

## 1.4. Suites extraites des termes pairs et impairs

### Théorème ANA.9.7 | Convergence des suites des termes pairs et impairs

Soit  $(u_n)$  une suite. On suppose que les deux suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers une même limite  $l \in \overline{\mathbf{R}}$ . Alors  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

**Remarque 1.2** — Par contraposée, si les deux sous-suites des termes pairs et impairs ne convergent pas vers la même limite, alors la suite ne converge pas.


**Preuve** Supposons que  $l \in \mathbf{R}$  (le cas où  $l = \pm\infty$  est laissé en exercice). Soit  $\varepsilon > 0$ . Par convergence des deux suites extraites, il existe deux entiers  $n_1$  et  $n_2$  tels que  $|u_{2n} - l| \leq \varepsilon$  pour  $n \geq n_1$  et  $|u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$  pour  $n \geq n_2$ . Posons alors  $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$ . Pour tout  $n \geq n_0$ , on a alors  $|u_n - l| \leq \varepsilon$ , que  $n$  soit pair ou impair : en effet si  $n = 2p$ , alors  $2p \geq 2n_1$ , donc  $p \geq n_1$  d'où  $|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \varepsilon$ , et si  $n = 2p + 1$ , alors  $2p + 1 \geq 2n_2 + 1$ , donc  $p \geq n_2$  d'où  $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$ .

Ainsi,  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

Il existe des résultats faisant intervenir des suites autres que celles des termes impairs/pairs  $((2n)$  et  $(2n + 1))$ , mais qui ne sont pas à notre programme.

**Exemple 4 —** Si une suite  $(u_n)$  vérifie

$$\forall n, p \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np},$$

alors elle converge. 

**Preuve** Admise.

### Remarque 1.3 —

- ▶ On peut préciser l'énoncé : une suite croissante  $(u_n)$  converge vers  $\sup_{n \in \mathbf{N}} u_n$  (la limite étant finie ou non, selon que  $(u_n)$  est majorée ou non), *i.e.* vers le plus petit  $M \in \mathbf{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$ .
- ▶ Noter que la convergence de la suite est dans la conclusion du théorème.
- ▶ Cet énoncé permet de conclure quant à la convergence des suites croissantes, même si on a aucune idée de la limite!

### ADJACENCE DE SUITES.

#### Définition ANA.9.11 | Suites adjacentes

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites *adjacentes* si :

1. elles sont monotones de sens contraires,
2. **(la différence tend vers zéro)**  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

## 1.5. Théorèmes de convergence par monotonie

### Théorème ANA.9.8 | Théorème de la limite monotone

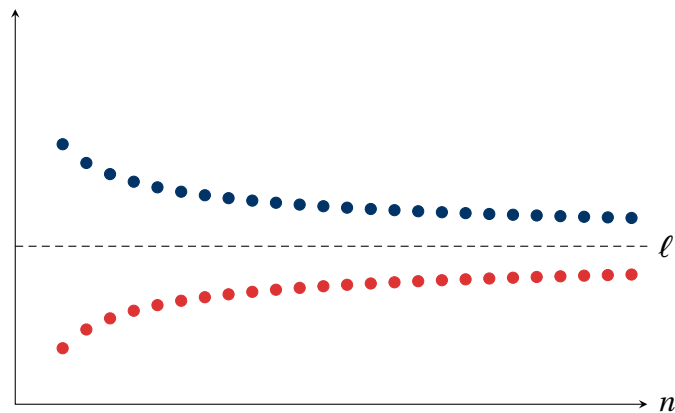
1. Toute suite réelle croissante et majorée (ou décroissante minorée) converge vers une limite finie.
2. Toute suite réelle croissante non majorée (*resp.* décroissante non minorée) diverge vers  $+\infty$  (*resp.*  $-\infty$ ).

### Théorème ANA.9.9 | Convergence des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent, et vers une même limite finie.

#### ⊗ Attention

La convergence est dans **la conclusion**, et non dans la définition de l'adjacence.

FIG. ANA.9.4. : Deux suites adjacentes : elles convergent toutes les deux vers  $\ell$ 


**Preuve** On peut supposer sans perte de généralité que c'est  $(u_n)$  qui est croissante et  $(v_n)$  décroissante.

Ainsi,  $(v_n - u_n)$  est décroissante et converge vers 0 : on a donc nécessairement  $v_n - u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . On en déduit que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ . Ainsi, la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$ , elle converge donc vers un réel  $u$  d'après le théorème de la limite monotone. De même,  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $u_0$  : elle converge vers un réel  $v$ . Enfin,  $(v_n - u_n)$  converge vers 0 par hypothèse et vers  $v - u$  par les théorèmes généraux. Par unicité de la limite, on a donc  $u = v$ .

**Exemple 5 – Convergence d'une série alternée** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in$


$$\mathbf{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k}. \text{ Montrons que cette suite converge.}^2 \quad \boxed{\text{✎}}$$


<sup>2</sup>Cet exemple est à très bien connaître

3. Montrer que que  $(v_n), (w_n)$  sont adjacentes. On appelle alors *constante d' EULER* notée  $\gamma$ , qui vaut  $0,577$  à  $10^{-3}$  près, la limite commune de ces deux suites. 

**Exemple 6 — Existence de la constante d'EULER** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad v_n = S_{n-1} - \ln n, \quad w_n = S_n - \ln n.$$

1. Justifier l'inégalité  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . 

2. Dédire que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ . 

4.  Écrire un script Python permettant d'avoir une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-3}$  près. 

**1.6. Suites remarquables**

**1.6.1. Suites arithmétiques et géométriques.**

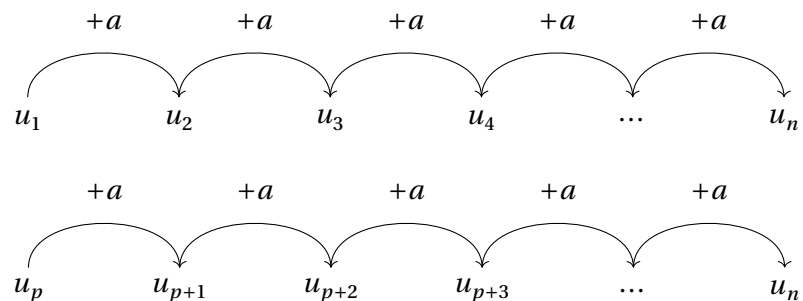
**Définition ANA.9.12**

On appelle *suite arithmétique* de raison  $a \in \mathbf{R}$  toute suite  $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n + a.$$

On rappelle que l'on a alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0 + na.$$



Il est clair qu'aucune suite arithmétique de raison non nulle ne converge. Nous pouvons cependant en expliciter leur somme.

5. Montrer que :

$$H_n \stackrel{\text{(d  f.)}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} \ln(n) + \gamma + o(1).$$



**Théorème ANA.9.10 | Somme des termes d'une suite arithmétique.**

Soit  $a \in \mathbf{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n ka$ . Alors :

$$S_n = a \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Preuve** Voir votre cours de 1ère année.

Nous pouvons retenir une formule générale de la manière suivante :

$$\sum \text{suite arithmétique} = \text{nb termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

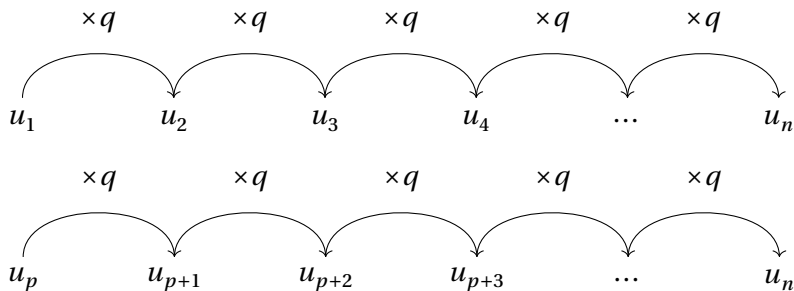
**Définition ANA.9.13 | Suite géométrique**

On appelle *suite géométrique* de raison  $q \in \mathbf{R}$  toute suite  $(u_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = qu_n.$$

On rappelle que l'on a alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0q^n.$$



**Théorème ANA.9.11 | Convergence des suites géométriques.**

Soit  $q \in \mathbf{R}$ . Alors la suite  $(q^n)$  converge si et seulement si  $|q| < 1$  ou  $q = 1$ . Elle converge vers 0 si  $|q| < 1$  et vers 1 si  $q = 1$ .

**Théorème ANA.9.12 | Somme géométrique.**

Soit  $q \in \mathbf{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ . Alors :

$$S_n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1, \\ n + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

**Preuve** Si  $q = 1$ , alors il est clair que  $S_n = n + 1$ . Supposons donc que  $q \neq 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

$$(1 - q)S_n = S_n - qS_n = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = 1 - q^{n+1}$$

et comme  $1 - q \neq 0$ , on obtient l'expression de  $S_n$  annoncée en divisant par  $1 - q$ .

Nous pouvons retenir une formule générale de la manière suivante :

$$\sum \text{suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

**1.6.2. Suites arithmético-géométriques**

On rappelle également ici la méthode permettant d'étudier les mélanges des deux suites précédentes : les *suites arithmético-géométriques*.

**Définition ANA.9.14**

On appelle *suite arithmético-géométrique* toute suite  $(u_n)$  pour laquelle il existe  $q \in \mathbf{R}$  et  $a \in \mathbf{R}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = qu_n + a.$$

**Proposition ANA.9.4**

Soit  $(u_n)$  une suite telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on ait  $u_{n+1} = qu_n + a$ , où  $(q, a) \in \mathbf{R}^2$  et  $q \neq 1$ . Alors,


- ▶ il existe une constante  $\alpha \in \mathbf{R}$  telle que  $(u_n - \alpha)$  est une suite géométrique de raison  $q$ .
- ▶ **(Terme général en fonction de  $n$ )**  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)q^n$ .<sup>3</sup>

**Preuve** Commençons par déterminer une suite constante  $(\alpha)$  vérifiant la même relation :

$$\alpha = q\alpha + a \iff \alpha = \frac{a}{1-q} \quad (\text{car } q \neq 1).$$

Posons  $\alpha = \frac{a}{1-q}$ . On a donc  $\alpha = q\alpha + a$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :  $u_{n+1} = qu_n + a$ . Ainsi, par différence membre à membre, on a :  $u_{n+1} - \alpha = q(u_n - \alpha)$ . La suite  $(u_n - \alpha)$  est donc une suite géométrique de raison  $q$ . On sait alors que  $u_n - \alpha = (u_0 - \alpha)q^n$  (pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ).

**Exemple 7** — Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :  $u_{n+1} = 3u_n + 2$ .

Déterminer une expression explicite en fonction de  $n$  de :  $\sum_{k=0}^n u_k$ . 

<sup>3</sup>Cette expression ne doit pas être donnée telle quelle mais être retrouvée par le calcul.

**Définition ANA.9.15**

On appelle *suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants* sur  $\mathbf{R}$  toute suite  $(u_n)$  pour laquelle il existe  $a, b, c \in \mathbf{R}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

On appelle *équation caractéristique associée à  $(u_n)$*  l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (\text{EC})$$

**Notation**

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites vérifiant la relation récurrente linéaire d'ordre deux précédente.

**Théorème ANA.9.13 | Expression explicite**

Soient  $(u_n)$  une suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants et Eq. (EC) son équation caractéristique. On suppose que  $a \neq 0, c \neq 0$ . On note  $\Delta$  le discriminant de Eq. (EC).

1. (Si  $\Delta > 0$ ) alors Eq. (EC) admet deux racines simples réelles distinctes  $\alpha$  et  $\beta$ , et :

$$\mathcal{S} = \text{Vect}((\alpha^n), (\beta^n)).$$

2. (Si  $\Delta = 0$ ) alors Eq. (EC) admet une racine double (nécessairement réelle)  $\alpha \neq 0$ , et :

$$\mathcal{S} = \text{Vect}((\alpha^n), (n\alpha^n)) = \{((\lambda + \mu n)\alpha^n), \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

3. (Si  $\Delta < 0$ ) alors Eq. (EC) admet deux racines complexes conjuguées  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$ . On pose  $\rho = |\alpha| > 0$  et  $\theta \equiv \text{Arg}(\alpha) \in ]-\pi, \pi[$  ( $\theta \neq 0, \pm\pi$  car  $\alpha \notin \mathbf{R}$ ), si bien que  $\alpha = \rho e^{i\theta}$ . Alors :

$$\mathcal{S} = \text{Vect}((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta))).$$


**Attention**


aux confusions avec le résultat analogue sur les équations différentielles dans le cas  $\Delta < 0$  : il fait appel à la **forme algébrique des racines** pour les équations différentielles, et la **forme exponentielle** pour les suites.

La preuve ci-dessous doit être considérée comme un exercice d'Algèbre linéaire.


**Preuve** Faisons-là dans le cas  $\Delta > 0$  i.e. où (EC) admet deux racines réelles distinctes.


1. Notons  $\Phi \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2, \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1). \end{cases}$  Alors  $\Phi$  est un isomorphisme linéaire, en particulier  $\dim \mathcal{S} = 2$ . En effet,

►  $\Phi$  est linéaire. 

►  $\Phi$  est injective. 




►  $\Phi$  est surjective. 

4. Donc c'est une base puisque  $\mathcal{S}$  est de dimension deux. 

C'est terminé.

**Exemple 8 — Suite de FIBONACCI à l'aide de l'équation caractéristique** La suite de Fibonacci est définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Déterminer une expression explicite du  $n$ -ième terme en fonction de  $n$ . En déduire que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge vers une limite à déterminer. 

2. Puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux racines de (EC), alors  $(\alpha^n), (\beta^n) \in \mathcal{S}$ . 

3. On montre ensuite que la famille  $((\alpha^n), (\beta^n))$  est libre dans  $\mathcal{S}$ . 

2. ➤ À l'aide Python, déterminer une valeur approchée de  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .



Ainsi, en définissant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons la récurrence vectorielle ci-après :

$$\forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n, \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbf{N}$  revient donc à trouver  $X_n$  en fonction de  $n$ , puis à regarder la première coordonnée de  $X_n$ .

► On déduit alors par récurrence que :  $\forall n \in \mathbf{N}, X_n = A^n X_0$ .



**TRAITEMENT MATRICIEL D'UNE RÉCURRENCE LINÉAIRE D'ORDRE 2.** Il est possible de reformuler une récurrence linéaire d'ordre deux ou plus à l'aide de matrices, mais pour simplifier nous ferons la présentation uniquement pour l'ordre deux.

**Exemple 9 — Suite de FIBONACCI à l'aide de matrices** On considère à nouveau la suite de Fibonacci est définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Cette dernière égalité est équivalente à la suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

► On calcule ensuite  $A^n$  en diagonalisant la matrice  $A$ . On montrera que  $A = PDP^{-1}$

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 & \sqrt{5}-1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$



### 1.6.4. Système de suites récurrentes linéaires à coefficients constants


On s'intéresse ici à un système de récurrences linéaires d'ordre 1 «imbriquées». C'est l'analogue discret des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 que nous verrons dans la prochaine section. Traitons un exemple.

**Exemple 10** — On considère trois suites  $(u_n), (v_n), (w_n)$  telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n, \\ v_{n+1} = 2v_n + 2w_n, \\ w_{n+1} = 3w_n, \end{cases} \quad \text{et} \quad u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 3.$$

Exprimons  $(u_n), (v_n), (w_n)$  en fonction de  $n \in \mathbf{N}$ .

1. Écrire le système précédent à l'aide d'une matrice  $A$  et de  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$  pour tout


$n \in \mathbf{N}$ . 

► On peut conclure. 


2. On rappelle que dans l'**Exemple 12** du **Chapter ALG.5**, nous avons diagonalisé la


matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , et avons montré que :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Notons  $Y_n = P^{-1}X_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que  $(X_n)$  est solution du système si et seulement si  $(Y_n)$  est solution de  $Y_{n+1} = DY_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . 

**Remarque 1.4** — Les calculs précédents s'étendent naturellement aux récurrences d'ordre supérieur, le vecteur colonne  $X_n$  aura simplement une dimension plus grande que 2.

4. En déduire les solutions du système initial. 

 **Attention**

Un point important est que le calcul effectif de  $P^{-1}$  n'est pas nécessaire dans la démarche.

**Méthode** Exprimer les solutions d'un système de suites récurrentes linéaires – Cas diagonalisable



On considère trois suites  $(u_n), (v_n), (w_n)$  telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R}) \text{ supposée diagonalisable.}$$

Alors pour exprimer les suites  $(u_n), (v_n), (w_n)$  en fonction de  $n$ , on :

1. diagonalise  $A$ , *i.e.* on cherche  $P$  inversible,  $D$  diagonale telle que  $A = PDP^{-1}$ ,
2. on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ , et  $Y_n = P^{-1}X_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . On montre que  $Y_{n+1} = DY_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
3. On peut alors exprimer  $Y_n$  en fonction de  $n \in \mathbf{N}$ .
4. Puis on conclut à l'aide de  $P$  :  $X_n = PY_n$ .

### 1.6.5. Suites récurrentes générales d'ordre 1

Cette fois-ci on ne suppose plus linéaire la relation de récurrence, mais seulement d'ordre 1 (*i.e.* elle fait intervenir un terme et le suivant).

**Définition/Proposition ANA.9.1**

On appelle *suite récurrente d'ordre un* toute suite  $(u_n)$  vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 \in D$$

où  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction définie sur un domaine  $D \subset \mathbf{R}$  vérifiant

$$f(D) \subset D.$$

On peut résumer cette technique dans une méthode.

**Preuve** Si  $f(D) \subset D$ , montrons par récurrence  $\mathcal{P}_n$  «  $u_n$  est bien défini, et  $u_n \in D$  », pour  $n \in \mathbf{N}$ . Pour  $n = 0$ ,  $u_0 \in D$ . Si la propriété est vraie au rang  $n$ , alors  $u_n \in D$  puis  $u_{n+1} = f(u_n) \in f(D) \subset D$  est alors aussi bien définie. Donc la suite  $(u_n)$  est bien définie.

Constatons que dans cette partie nous généralisons certaines suites remarquables déjà étudiées.

**Exemple 11** — Précisons les récurrences obtenues dans quelques cas particuliers.

- ▶  $f(x) = x + a$ , où  $a \in \mathbf{R}$  : la suite  $(u_n)$  associée est alors arithmétique.
- ▶  $f(x) = qx$ , où  $q \in \mathbf{R}$  : la suite  $(u_n)$  associée est alors géométrique.
- ▶  $f(x) = qx + a$ , où  $(q, a) \in \mathbf{R}^2$  : la suite  $(u_n)$  associée est alors arithmético-arithmétique.

La suite de cette partie est axée autour de deux problèmes :

- ▶ celui de la définition de la suite.
- ▶ Puis, celui de l'existence éventuelle d'une limite.

**NATURE DE LA SUITE.** Le plus souvent, dans les exercices, on vous fera :

1. analyser la monotonie de la suite. Cela se fait en comparant  $u_0$  et  $u_1$  puis en utilisant la monotonie de  $f$ . Si par exemple  $u_1 \leq u_0$  et  $f$  est croissante, alors, en appliquant  $n$  fois  $f$  à l'inégalité précédente, on obtient pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .
2. Dédire la convergence/divergence en utilisant les théorèmes de convergence/divergence monotone.

**Attention** En règle générale, la monotonie de  $f$  ne donne pas directement la monotonie de  $(u_n)$ .

Par exemple, si la suite est croissante (*resp.* décroissante), et que  $D$  est majorée (*resp.* minorée), alors on peut établir la convergence. Enfin, pour trouver la valeur de la limite, on passe à la recherche de points fixes pour la fonction  $f$ .

**Définition ANA.9.16 | Point fixe**

On appelle *point fixe* de  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  tout réel  $x \in D$  tel que  $f(x) = x$ .

**Théorème ANA.9.14**

Soient  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ , où  $D \subset \mathbf{R}$ , et  $(u_n)$  une suite réelle telle que :


$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$


Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et  $f$  est définie et **continue** en  $\ell$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

**Attention** Ne pas oublier la continuité!

**Preuve** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Le membre de gauche tend vers  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et celui de droite vers  $f(\ell)$  par continuité de  $f$ . Ainsi,  $f(\ell) = \ell$ .

**Exemple 12** — Étudions les suites récurrentes suivantes :

1.  $u_0 \geq 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ . 

2.  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} = u_n^2$ . 

Dans les exemples précédents, la fonction  $f$  associée était toujours croissante. Des exemples où la fonction  $f$  est décroissante seront vus en TD.

**1.6.6. Suites implicites**

**Définition ANA.9.17**

On appelle *suite implicite* toute suite  $(x_n)$  dont le terme général  $x_n$  est donné comme solution (en général unique) d'une équation dépendant d'un paramètre  $n \in \mathbf{N}$ , i.e. vérifiant une égalité du type

$$f_n(x_n) = 0$$


avec  $f_n$  une fonction pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ .


Il n'y a pas de résultat général au programme, mais leur étude s'appuie souvent sur un schéma proche de l'exemple ci-après. La difficulté est qu'*a priori* on ne connaît pas l'expression générale d'une suite implicite, on utilisera le théorème de convergence monotone pour établir la convergence.

**Exemple 13 — Étude d'une suite implicite** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on considère l'équation :


$$f_n(x) = 0 \quad (E_n)$$


d'inconnue  $x \in \mathbf{R}_+^*$ , où :  $f_n(x) = nx + \ln(x)$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution sur  $\mathbf{R}_+^*$ . On la note désormais  $x_n$ .  La fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbf{R}^{+\ast}$ , et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$  par croissances comparées, et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$ . De plus, en calculant la dérivée, on constate facilement que la fonction est même strictement croissante. Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbf{R}^{+\ast}$  vers  $f(\mathbf{R}^{+\ast}) = \mathbf{R}$  (d'après le calcul de limites et la monotonie de  $f$ ). Comme  $0 \in \mathbf{R}$ , il existe un unique  $x_n \in \mathbf{R}^{+\ast}$  comme prétendu dans l'énoncé.

2. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $x_n \in ]0, 1]$ .  Comme  $f_n(1) = n > 0$ , on peut même affirmer que  $x_n \in ]0, 1]$ .

3. La suite  $(x_n)$  décroît. *Indication* : On cherchera à comparer  $0 = f_n(x_n)$  et  $f_n(x_{n+1})$ .

 Nous avons  $f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1} = -x_{n+1} \leq 0$  car  $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ . Ainsi, puisque  $0 = f_n(x_n) \geq f_n(x_{n+1})$ , et que la fonction  $f_n$  est croissante, nous avons immédiatement  $x_n \geq x_{n+1}$  pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ .

4. La suite  $(x_n)$  converge vers une limite  $\ell \in [0, 1]$  que l'on peut déterminer.  La suite est d'après ce qui précède décroissante minorée par zéro, donc converge vers une limite finie.

Supposons que  $\ell \in ]0, 1]$ . Alors puisque  $nx_n = -\ln(x_n)$ , nous aurions en passant à la limite :  $-\ln(\ell) = \infty$  ce qui est clairement une contradiction.

**Méthode Plan d'étude d'une suite implicite**



1. Établir l'existence et l'unicité de la suite grâce au théorème de la bijection.
2. Chercher la monotonie en comparant  $f_n(x_{n+1})$  à  $f_n(x_n) = 0$  (ou  $f_{n+1}(x_n)$  à  $f_n(x_n) = 0$ ).
3. Trouver la valeur de la limite : en général on raisonne par l'absurde dans l'identité  $f_n(x_n) = 0$ .

**2. DYNAMIQUE CONTINUE : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**



**Cadre**

Dans toute cette section,

- ▶ I désignera un intervalle réel, qui sera le domaine de définition de l'équation différentielle.
- ▶ L'entier  $n$  désignera l'ordre de l'équation différentielle.
- ▶ L'entier  $p$  désignera le nombre de coordonnée des solutions, qui seront des matrices colonnes de  $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ .

**2.1. Généralités**

**Définition ANA.9.18 | Équation différentielle**

Soient  $n, p \in \mathbf{N}^*$ . On appelle *équation différentielle d'ordre  $n$  sur  $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$*  toute équation<sup>4</sup> de la forme

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

où :

- ▶ l'intervalle  $I$  est appelé le *domaine de définition* de l'équation différentielle.
- ▶  $f : I \times (\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R}))^n \rightarrow \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$  est appelée *générateur de l'équation différentielle*.
- ▶ La fonction  $y \in \mathcal{D}^n(I, \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R}))$  est appelée *inconnue* de l'équation. On appelle *solution* toute fonction  $y : I \rightarrow \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$  dérivable<sup>5</sup> telle que :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Si  $p = 1$ , la courbe représentative d'une solution est appelée une *courbe intégrale* de l'équation différentielle et on parle d'équation différentielle *scalaire*.

Ainsi, on appelle toute équation différentielle toute relation entre une fonction et ses dérivées.

**Remarque 2.1** — On omet souvent la variable dans les fonctions inconnues. Mais, en toute rigueur, il faudrait considérer comme équation différentielle une équation de la forme

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

**Définition ANA.9.19 | Système différentiel**

On appelle *système différentiel d'ordre 1* (ou simplement *système différentiel*) toute équation différentielle où :

- ▶  $n = 1$ ,<sup>6</sup>
- ▶ il existe  $B \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ , et pour tout  $t \in I$  une matrice  $A(t) \in I$ , telles que :

$$\forall x \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R}), \quad f(t, x) = A(t)x + B.$$

Le système est dit à *coefficients constants* si la fonction  $t \in I \rightarrow A(t)$  est constante.

<sup>4</sup>sous-entendue en une fonction  $y$

<sup>5</sup>i.e. que chaque coordonnée de  $y$  est dérivable


<sup>6</sup>l'équation différentielle ne fait alors apparaître que l'inconnue  $y$  et sa dérivée première  $y'$


De manière plus explicite, un système différentiel en l'inconnue  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$ , est une équation différentielle de la forme


$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_p'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$


où  $b_i \in \mathbf{R}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Nous verrons une méthode afin de résoudre un tel système différentiel linéaire lorsque  $A$  est diagonalisable.

**Exemple 14** — *Écriture d'une équation différentielle sous la forme  $y^{(n)} = f(t, y', \dots, y^{(n-1)})$*  Dans chacun des exemples ci-dessous, écrire l'équation sous la forme  $y^{(n)} = f(t, y', \dots, y^{(n-1)})$  de la définition. On précisera les entiers  $n, p$  associés et la fonction  $f$ .<sup>7</sup>

1.  $y''' = 4ty''$ , 

2.  $y'' = 4xy' - 2y$ , 

3.  $z'' = 4z' - 2z$ , 

4. **(Système de Lokta-Volterra)**  $\begin{cases} P_1' = \left(1 - \frac{P_2}{3}\right)P_1, \\ P_2' = \left(1 - \frac{P_1}{2}\right)P_2. \end{cases}$  Est-ce un système différentiel linéaire? 

<sup>7</sup>Les notations de variable, fonction inconnue sont volontairement diverses dans cet exemple, vous devez savoir vous adapter



5. (Système de chauffe) 
$$\begin{cases} m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1), \\ m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) + h_2 S_2 (T_\infty - T_2), \end{cases} \text{ avec}$$
  
 $m_1, C_1, m_2, C_2, h_1, h_2, T_\infty \in \mathbf{R}$ . C'est même un système différentiel à coefficients constants. Préciser  $t \mapsto A(t)$  et B comme définis dans la Définition ANA.9.19.



**Attention Non-unicité du générateur et des « entiers  $n, p$  »**

Il n'y a aucune unicité des objets précédents. Par exemple,  $y'' = 4xy' - 2y$  peut également être vue comme :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4x & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix},$$

donc comme une équation différentielle dont la fonction inconnue  $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  est à valeurs dans  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbf{R})$  ( $p = 2$ ), d'ordre  $n = 1$  et de fonction associée

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \times \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ (x, Y) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4x \end{pmatrix} Y \end{array} \right.$$



donc un système différentiel *in fine*.

Plaçons-nous sans plus tarder dans le cas linéaire scalaire.

## 2.2. Équations différentielles linéaires scalaires

### 2.2.1. Généralités

#### Définition ANA.9.20

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  sur  $\mathbf{R}$*  toute équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (\mathbf{E}_n)$$

où  $a_i \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . La fonction  $y \in \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$  est appelée *inconnue* de  $(\mathbf{E}_n)$ . On appelle *solution* de  $(\mathbf{E}_n)$  toute fonction  $y : I \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable telle que :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

Elle est dite à coefficients constants si les fonctions  $a_{n-1}, \dots, a_1$  sont constantes.

**Remarque 2.2 —** Les définitions de courbe intégrale et d'intervalle de définition restent bien entendu en vigueur.

#### Définition ANA.9.21 | Homogène

- ▶ L'équation  $(\mathbf{E}_n)$  est dite *homogène*, ou *sans second membre*, si  $b$  est la fonction nulle.
- ▶ On appelle *équation homogène associée* à  $(\mathbf{E}_n)$  ou encore *équation sans second membre associée* à  $(\mathbf{E}_n)$  l'équation suivante :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (\mathbf{H}_n)$$



#### Notation

Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(\mathbf{E}_n)$ , et  $\mathcal{S}^0$  l'ensemble des solutions de  $(\mathbf{H}_n)$ .

**Remarque 2.3 — Forme normalisée  $\longleftrightarrow$  Forme générale** Une équation de la forme

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = c(t)$$

est encore appelée une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ . La forme faisant intervenir un coefficient  $1$  devant la dérivée s'appelle la *forme normalisée* de l'équation différentielle, elle s'obtient en divisant les deux membres par la fonction  $a_n$  sur tout intervalle  $J$  où  $a_n$  ne s'annule pas,


$$\forall t \in I \cap J, \quad y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1(t)}{a_n(t)}y' + \frac{a_0(t)}{a_n(t)}y = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

Dans la suite tous les résultats seront énoncés pour la forme normalisée, *i.e.* celle des équations  $(\mathbf{E}_n)$  et  $(\mathbf{H}_n)$ .

**Remarque 2.4 — Caractère  $\mathcal{C}^n$  des solutions** Si  $y$  est une solution de  $(\mathbf{E}_n)$ , alors  $y^{(n)}$  est même continue sur  $I$  (*i.e.*  $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ ), puisque  $y^{(n)} = b - a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_0y$  est alors une somme de fonctions continues.

**Exemple 15 —** Justifier que les équations différentielles suivantes sont linéaires, et déterminer leur homogène associée. Préciser leur domaine de définition.

1.  $2 - xz' = x^2z''$ .

2.  $\sum_{i=1}^n iy^{(i)} = \pi.$  

► Puisque  $\mathcal{S}_0$  est un noyau,<sup>a</sup> c'est en particulier un espace vectoriel.

**Attention**

Ce n'est pas le cas de l'ensemble  $\mathcal{S}$  ! En effet, dès que le second membre est non nul, la solution nulle n'est plus solution,  $\mathcal{S}$  n'est donc *a fortiori* pas un espace vectoriel.

**Définition/Proposition ANA.9.2 | Endomorphisme associé à une équation différentielle linéaire**

► On appelle *endomorphisme associé à  $(E_n)$*  l'application linéaire suivante :

$$\Phi_n(a_0, \dots, a_{n-1}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathbf{R}^1, \\ y \longmapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y. \end{array} \right.$$

►  $\mathcal{S}_0 = \text{Ker}(\Phi_n(a_0, \dots, a_{n-1}))$ . Par conséquent,  $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel.<sup>8</sup>

**STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE  $(E_n)$ .** Une équation différentielle linéaire est une «équation linéaire» sur  $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ , donc l'ensemble des solutions possède une structure classique.

**Théorème ANA.9.15 | Structure des solutions de l'équation complète**

Si  $y^{\text{par}} : I \rightarrow \mathbf{R}$  est **une** solution particulière de l'équation complète  $(E_n)$ , alors les solutions de  $(E_n)$  sont toutes les fonctions d'expression :

$$y = y_H + y^{\text{par}},$$


où  $y_H$  est une solution de  $(H_n)$ . Autrement dit l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions sur  $\mathbf{R}$  de  $(E_n)$  est :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y^{\text{par}} \stackrel{\text{(déf.)}}{=} \{y_H + y^{\text{par}}, y_H \in \mathcal{S}_0\},$$

où  $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de  $(H_n)$ .

Dans la suite on notera plus simplement  $\Phi_n$  au lieu de  $\Phi_n(a_0, \dots, a_{n-1})$ .

**Preuve**

► L'application  $\Phi_n$  est linéaire. 

<sup>8</sup>On peut montrer également qu'il est de dimension finie égale à  $n$ . Nous n'avons pas les outils pour le montrer de manière générale, nous le ferons donc seulement pour  $n = 1, 2$ .

<sup>a</sup>On aurait pu utiliser aussi la définition d'un sous-espace vectoriel et montrer notamment la stabilité par combinaison linéaire

**Attention** La preuve ci-dessous exploite très largement la linéarité de l'équation, ce résultat est faux dans le cas contraire.

**Preuve** (Point clef — *Faire la différence entre l'ED avec la solution particulière et une solution générale*)



**PRINCIPE DE SUPERPOSITION.** Passons à une autre conséquence de la linéarité : le principe de superposition.

**Méthode** Principe de superposition

Lorsque le second membre  $b$  de  $(E_n)$  s'écrit comme une somme de fonctions, par exemple  $b = \lambda b_1 + \mu b_2$  avec  $b_i$  continue pour tout  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , on peut appliquer le *principe de superposition*. Il s'agit de considérer les deux équations différentielles linéaires :

$$y^{(n)} + a_{n-1}^1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1^1(t)y' + a_0^1(t)y = b_1(t) \quad (E_n^1)$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}^2(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1^2(t)y' + a_0^2(t)y = b_2(t) \quad (E_n^2)$$

Si l'on a :

▶ déterminé une solution particulière  $y_1^{\text{par}}$  de  $(E_n^1)$ ,  
 ▶ et une solution particulière  $y_2^{\text{par}}$  de  $(E_n^2)$ .  
 La somme  $\lambda y_1^{\text{par}} + \mu y_2^{\text{par}}$  est alors une solution particulière de  $(E_n)$ . Le principe reste naturellement vrai si l'on considère une somme de  $n$  fonctions dans le second membre.

**Preuve** Sommer simplement les équations  $(E_n^1)$  et  $(E_n^2)$ .

Des exemples d'application seront vues dans les prochaines sections. Maintenant que le résultat général de structure des ensembles de solution est établi, nous allons l'appliquer à l'ordre 1 et 2. Tout l'enjeu est alors de savoir :

1. calculer explicitement l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'homogène,
2. déterminer une solution particulière  $y^{\text{par}}$ . Pour l'ordre 1, nous aurons une méthode systématique appelée *variation de la constante*.

**2.2.2. Équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre**

**Définition ANA.9.22 | Définition pour  $n = 1$**   
 On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre sur  $\mathbf{R}$*  toute équation de la forme  $(E_1)$ .

C'est donc une équation du type

$$y' + a(t)y = b(t), \quad (E_1)$$

où  $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ . Rappelons que nous avons également défini la notion d' *équation homogène associée* ou encore *équation sans second membre associée* à  $(E_1)$  l'équation suivante :

$$y' + a(t)y = 0. \quad (H_1)$$

**Remarque 2.5 — Caractère  $\mathcal{C}^1$  des solutions** Si  $y$  est une solution de  $(E_1)$ , alors  $y'$  est continue sur  $I$ , puisque  $y' = b - ay$ . La fonction  $y$  est donc un élément de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ .

**RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE** On connaît par un calcul direct l'ensemble des solutions de l'équation  $(H_1)$ , donné dans le théorème suivant. Nous savions déjà en revanche que c'est un espace vectoriel!

**Théorème ANA.9.16 | Résolution de l'équation homogène**

L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de  $(H_1)$  est :


$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \text{Vect} \left( t \mapsto e^{-A(t)} \right), \text{ où } A : I \rightarrow \mathbf{R} \text{ est une primitive de } a \\ &= \text{Vect} \left( t \mapsto \exp \left( - \int_{t_0}^t a(s) ds \right) \right), \text{ où } t_0 \in I. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel de dimension 1.

**Preuve** La fonction  $a$  étant continue sur  $I$ , elle admet une primitive  $A$  sur cet intervalle. Une fonction dérivable  $y : I \rightarrow \mathbf{R}$  est alors solution de  $(H_1)$  si et seulement si pour tout  $t \in I$  :

$$y'(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)e^{A(t)} = 0$$

(la fonction  $t \mapsto e^{A(t)}$  ne s'annule pas sur  $I$ ). On reconnaît la dérivée du produit  $y(t)e^{A(t)}$ . Ainsi,  $y$  est solution si et seulement si  $t \mapsto y(t)e^{A(t)}$  est constante sur l'intervalle  $I$ . Les solutions sont donc bien les fonctions  $y : I \rightarrow \mathbf{R}$  telles que :  $\forall t \in \mathbf{R}, y(t)e^{A(t)} = C$ , où  $C \in \mathbf{R}$ , d'où le résultat.

**Exemple 16 —** Résoudre  $(1 + t^2)y' + 4ty = 0$ . 



**Cadre**

Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle  $y' + ay = b$ , avec  $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$  continues, et  $A$  désigne une primitive de  $a$ .

**RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION COMPLÈTE** On applique simplement le théorème déjà démontré sur le sujet : toute solution est obtenue en sommant les solutions de l'homogène et une solution particulière.

**Théorème ANA.9.17 | Résolution de l'équation complète**

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions sur  $\mathbf{R}$  de  $(E_1)$  est :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in I \mapsto Ce^{-A(t)} + y^{\text{par}}(t), \quad C \in \mathbf{R} \right\} \stackrel{\text{notation}}{=} \mathcal{S}_0 + y^{\text{par}},$$

où  $A : I \rightarrow \mathbf{R}$  est une primitive de  $a$ .

Pour résoudre complètement l'équation différentielle  $(E_1)$ , il reste donc à déterminer une solution particulière  $y^{\text{par}}$  de  $(E_1)$ .

**VARIATION DE LA CONSTANCE.** Nous commençons par une méthode qui fonctionne toujours dès que le second membre est continu : la *méthode de variation de la constante*. Il s'agit de chercher une solution de la forme des solutions de  $(H_1)$ , où la *constante*  $C$  est remplacée par une **fonction** dérivable  $t \in I \rightarrow C(t)$ . Nous faisons donc *varier* la constante  $C$  au sens propre du terme.




### Méthode Variation de la constante

Chercher  $y^{\text{par}}$  sous la forme  $t \in I \rightarrow C(t)e^{-A(t)}$ , où la fonction  $C : I \rightarrow \mathbf{R}$  est dérivable et est à déterminer.

**Preuve** Si l'on pose  $y^{\text{par}}(t) = C(t)e^{-A(t)}$ , pour tout  $t \in I$ , où  $C$  est une fonction dérivable sur  $I$ , alors :

$$\begin{aligned} y^{\text{par}} \text{ solution de } (E_1) &\iff (y^{\text{par}})' + ay^{\text{par}} = b \\ &\iff (Ce^{-A})' + aCe^{-A} = b \\ &\iff C'e^{-A} - CA'e^{-A} + aCe^{-A} = b \\ &\iff C'e^{-A} - Ca'e^{-A} + aCe^{-A} = b \\ &\iff C'e^{-A} = b \\ &\iff C' = be^A \\ &\iff C \text{ est une primitive de } be^A \text{ sur } I \end{aligned}$$

On est donc ramené à un calcul de primitive. Une fois  $C$  déterminé (à une constante additive près!), une solution particulière est donnée sur  $I$  par  $y^{\text{par}}(t) = C(t)e^{-A(t)}$ . Donc la méthode de variation de la constante fonctionne si et seulement s'il existe une primitive à la fonction  $be^A$  sur  $I$ . Cette dernière existe dès que la  $t \rightarrow b(t)e^{A(t)}$  est continue, ce qui est le cas.

**Exemple 17** — Résoudre :  $y' + 3x^2y = e^{x-x^3}$ . 

Nous savons donc à présent résoudre complètement une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Lorsque l'on ajoute en plus une *condition initiale*, alors il existe une unique solution.

#### Théorème ANA.9.18 | Résolution avec condition initiale

Soient  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbf{R}$ . Il existe une et une seule solution au « problème de CAU-

CHY » :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t), \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

De plus,

- ▶ l'unique solution a pour expression

$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{A(t_0)-A(t)} y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(u)} b(u) du.$$

- ▶ En particulier, toute solution qui s'annule est identiquement nulle.

En résumé, sans condition initiale on a une infinité de solutions. Avec une condition initiale il y a généralement unicité.

Preuve



**UTILISATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION.** La méthode a déjà été présentée dans la section de généralités. La voici appliquée dans le cas de l'ordre 1.

**Exemple 18 —** Déterminer une solution particulière sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 3e^t + e^{2t}.$$

On cherche donc une solution particulière de ces deux équations différentielles :

$$y' - 2y = 3e^t, \quad y' - 2y = e^{2t}.$$

- ▶ Pour la première, on trouve par variation de la constante : pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $y_1(t) = -3e^t$ .
- ▶ Dans le second cas  $y_2(t) = te^{2t}$ .

Par principe de superposition, la somme est alors une solution particulière de l'équation différentielle de départ :

$$y^{\text{par}}(t) = te^{2t} - 3e^t, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

### 2.2.3. Équations différentielles linéaires du 2<sup>nd</sup> ordre à coefficients constants

**Définition ANA.9.23 | Définition pour  $n = 2$**

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre sur  $\mathbf{R}$*  toute équation de la forme  $(E_2)$ .

 **Cadre**  
 Dans toute la suite de cette sous-section, nous considèrerons des équations différentielles à coefficients constants.<sup>9</sup>

C'est donc une équation du type

$$ay'' + by' + cy = d(t) \quad (\text{E}_2)$$

où  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , et  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ . Rappelons que nous avons également défini la notion d'équation homogène associée ou encore équation sans second membre associée à  $(\text{E}_2)$  l'équation suivante :

$$ay'' + by' + cy = b. \quad (\text{H}_2)$$

#### Définition ANA.9.24 | Équation caractéristique

On introduit également l'équation caractéristique de  $(\text{E}_2)$  :

$$ar^2 + br + c = 0, \quad \text{d'inconnue } r \in \mathbf{R}. \quad (\text{EC})$$

**Remarque 2.6 — Caractère  $\mathcal{C}^2$  des solutions** Si  $y$  est une solution de  $(\text{E}_2)$ , alors  $y''$  est continue sur  $I$ , puisque  $y'' = \frac{1}{a}(f - by' - cy)$ . La fonction  $y$  est donc un élément de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{R})$ .

 **Cadre**  
 Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle  $ay'' + by' + cy = d(t)$ , avec  $d : I \rightarrow \mathbf{R}$  continue, et  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

**RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE** Nous savons là encore déterminer facilement l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

<sup>9</sup>Ce sont les seules au programme.

#### Théorème ANA.9.19 | Résolution de l'équation homogène

On suppose ici  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ .

1. Si  $(\text{EC})$  possède deux racines réelles distinctes  $\alpha \in \mathbf{R}$  et  $\beta \in \mathbf{R}$ , alors

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left( t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto e^{\beta t} \right).$$

2. Si  $(\text{EC})$  possède une racine double  $\alpha \in \mathbf{R}$ , alors

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left( t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto te^{\alpha t} \right) = \left\{ t \mapsto (A + Bt)e^{\alpha t}, (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$


3. Si  $(\text{EC})$  possède deux racines complexes conjuguées  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \text{Vect} \left( t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right), \\ &= \left\{ t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), A, B \in \mathbf{R} \right\} \end{aligned}$$


Ainsi,  $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel de dimension 2.


**Preuve** Voir cours de première année. On vérifie également sans difficulté que les familles de solutions proposées sont libres, et donc forment des bases de l'ensemble des solutions de l'homogène.

**Exemple 19 — Résoudre**

1.  $y'' - \omega^2 y = 0$  et  $y'' + \omega^2 y = 0$  (où  $\omega$  est un réel non nul). 



2.  $y'' - 4y' + 13y = 0.$  

3.  $y'' - 4y' + 4y = 0.$  

**RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION COMPLÈTE** On applique encore une fois le théorème déjà démontré sur le sujet : toute solution est obtenue en sommant les solutions de l'homogène et **une** solution particulière.

**Théorème ANA.9.20**

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions sur  $\mathbf{R}$  de  $(E_2)$  est :

$$\mathcal{S} = \{y + y^{\text{par}}, y \in \mathcal{S}_0\} \stackrel{\text{(nota.)}}{=} \mathcal{S}_0 + y^{\text{par}}.$$

**Preuve** Ce théorème est une conséquence directe du **Théorème ANA.9.15** pour  $n = 2$  et de la résolution explicite de l'homogène faite précédemment.

**DÉTERMINATION DE  $y^{\text{par}}$**  Pour résoudre complètement l'équation différentielle  $(E_2)$ , il reste donc à déterminer *une* solution particulière  $y^{\text{par}}$  de  $(E_1)$ . On ne sait le faire que pour certaines formes du second membre  $d(t)$ .

**Remarque 2.7** — Il existe une méthode générale, comme pour le premier ordre, appelée *méthode de variations des constantes*, mais elle n'est pas à notre programme.

Admettant l'existence d'une solution particulière avec un second membre continu  $d$ , on peut démontrer l'existence et l'unicité ci-après.


**Théorème ANA.9.21 | Résolution avec condition initiale**

Soient  $t_0 \in I$ ,  $(y_0, y'_0) \in \mathbf{R}^2$ . Il existe une et une seule solution au problème de Cau-

chy :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0. \end{cases}$$

En particulier, toute solution qui s'annule est identiquement nulle.

**Preuve** Nous admettons l'existence d'une solution particulière. Faisons la preuve dans le cas « $\Delta > 0$ », les autres étant analogues. 

où  $P$  est une fonction polynomiale à coefficients dans  $\mathbf{R}$  et  $m \in \mathbf{R}$ . Alors il existe une solution particulière de  $(E_2)$  d'expression :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad y^{\text{par}}(t) = Q(t)e^{mt},$$

où  $Q$  est une fonction polynomiale à coefficients dans  $\mathbf{R}$  et :

- ▶ **si  $m$  n'est pas racine de  $(EC)$**  :  $\deg(Q) = \deg(P)$ ,
- ▶ **si  $m$  est racine simple de  $(EC)$**  :  $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ ,
- ▶ **si  $m$  est racine double de  $(EC)$**  :  $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ .

**Preuve** Cherchons à quelle condition  $(E_1)$  admet une solution d'expression

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad y^{\text{par}}(t) = Q(t)e^{mt}$$

où  $Q$  est une fonction polynomiale. On calcule, pour tout  $t \in \mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} (y^{\text{par}})'(t) &= (Q'(t) + mQ(t))e^{mt}, \\ (y^{\text{par}})''(t) &= (Q''(t) + 2mQ'(t) + m^2Q(t))e^{mt}. \end{aligned}$$

Cette fonction  $y^{\text{par}}$  est donc solution de  $(E_1)$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbf{R}$  :

$$a(y^{\text{par}})''(t) + b(y^{\text{par}})'(t) + cy^{\text{par}}(t) = P(t)e^{mt}$$

ce qui, après simplification par  $e^{mt}$  et regroupement des termes, équivaut à :

$$aQ''(t) + (2am + b)Q'(t) + (am^2 + bm + c)Q(t) = P(t).$$

Il suffit alors de résoudre cette équation polynomiale en injectant  $Q(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  dans l'identité avec les  $a_k$  des éléments de  $\mathbf{R}$  à déterminer [...].


**CAS PARTICULIER : SECOND MEMBRE DE LA FORME « POLYNÔME  $\times$  EXPONENTIELLE ».** Notez que le résultat ci-après, en prenant  $a = 0$ , fournit aussi une solution particulière lorsque l'équation différentielle est d'ordre 1.


**Théorème ANA.9.22 | Solution particulière pour  $a \in \mathbf{R}$  une constante, et  $b(t) = P(t)e^{mt}$ ,  $P \in \mathbf{R}[X]$ ,  $m \in \mathbf{R}$**


On suppose que le second membre de  $(E_2)$  est de la forme


$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad b(t) = P(t)e^{mt},$$

**Exemple 20 —** Déterminer une solution particulière réelle des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1.  $y'' - 4y = (8t + 6)e^{2t}$ . 

2.  $y'' - y' - 2y = 3e^t + 1.$  


3.  $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}.$  

4.  $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^{2t}.$  

**PRINCIPE DE SUPERPOSITION.** Le principe de superposition s'applique encore pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants admettant un second membre somme de plusieurs fonctions simples.

### 2.2.4. Technique du changement de fonction inconnue


On peut aussi parfois réaliser des changements de fonction inconnue dans les équations différentielles pour se ramener à un type que l'on sait résoudre (exemple typique : passer d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants à une version à coefficients constants, ou encore, comme dans l'exemple ci-dessous, passer d'une équation différentielle non linéaire à une version linéaire). Voyons cela sur un exemple avant de systématiser dans une méthode.

**Exemple 21 — Non linéaire à linéaire** Résoudre l'équation différentielle (E)  $y' = y \ln y$ . *Indication* : On pourra réaliser le changement de fonction inconnue  $y(t) = e^{z(t)}$  pour tout  $t$ . 

#### Résumé

$\Rightarrow$  Soit  $y$  une solution de (E). Alors posons  $z = \ln \circ y$ . On a vérifié que  $z$  est solution d'une équation différentielle (E') résoluble.

$\Leftarrow$  Soit  $z$  une solution de (E'), alors  $y = \exp \circ z$  est une solution de (E). En d'autres termes, il y a une correspondance bijective entre les solutions de (E) et (E') — il suffit donc de résoudre l'une ou l'autre pour toutes les avoir.

**Exemple 22 — Non constants à constants** Résoudre  $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$  sur  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ . *Indication* : On pourra réaliser le changement de fonction inconnue  $z(x) = y(\tan x)$  pour tout  $t$ . 



3. Évaluer (E) en  $\varphi(t)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .
4. Combiner 2) et 3) pour trouver une équation différentielle en  $z$ .

### 2.3. Résolution approchée par la méthode d'EULER

Rappelons que l'on appelle équation différentielle toute équation de la forme

$$y^{(n)} = f(t, y', \dots, y^{(n-1)})$$

où  $I$  est un intervalle réel,  $f : I \times (\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R}))^n \rightarrow \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ , avec  $n, p \in \mathbf{N}^*$ . Nous allons dans la suite nous placer dans le cadre  $n = 1$ , *i.e.* considérer des équations de la forme

$$y' = f(t, y),$$

sur un intervalle réel  $I$ , en revanche on autorise  $y$  à avoir  $p$  coordonnées, ainsi  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ . On retrouve le cas scalaire pour  $p = 1$ . On cherche ainsi à connaître une solution approchée d'un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R}), \end{cases} \quad I = [0, \tau], \quad f : I \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue,}$$

avec  $\tau > 0$ . Notez bien que cette méthode permet de résoudre, au moins de manière approchée, tout problème de Cauchy du moment que  $f$  est une fonction continue (pour que les intégrales ci-dessous aient un sens). En ce sens approché, on fait donc beaucoup mieux que le seul cas linéaire proposé dans les deux précédentes parties.



#### Méthode Résolution par changement de fonction inconnue

Soit (E) une équation différentielle en une fonction  $y$  que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction  $z$  dépendant de  $y$  donnée par l'exercice (généralement « de la forme  $z(t) = y \circ \varphi(t)$  »).
2. Calculer les dérivées successives  $z, z', z'', \dots$  (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en  $y$ ).

**PRINCIPE DE LA MÉTHODE.** Soit  $0 = t_0 < \dots < t_N = \tau$  une subdivision de  $[0, \tau]$ . L'idée de la méthode est la suivante de construire un nuage de points  $(t_i, y_i)$  de proche en proche (donc grâce à une relation de récurrence), tels que ces points  $y_i$  soient très proches des  $y(t_i)$  (où  $y$  désigne l'unique solution au problème de Cauchy). Le nuage de points est construit par « analyse-synthèse » (ou heuristique ici).

**Méthode d'EULER**

1. On commence par subdiviser l'intervalle  $[0, \tau]$  de manière uniforme à l'aide de  $N + 1$  points espacés d'un pas de  $h = \frac{\tau}{N}$ . Plus précisément, on pose :

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad \dots, \quad t_k = kh, \quad \dots, \quad t_N = \tau.$$

2. **(Heuristique)** On considère que pour  $h$  petit :

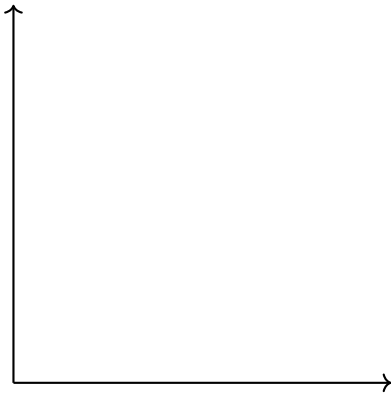
$$\text{Si } y \text{ est une solution, alors } y'(t) = f(t, y(t)) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Donc que pour toute solution  $y$  :

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)) \quad (2.1)$$

3. On définit donc une suite de points  $y_i$  satisfaisant le plus possible l'approximation précédente, en posant :

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k, y_k).$$



**>\_🐍 IMPLÉMENTATION EN PYTHON.** Nous commençons par donner la fonction en dimension 1.

```
"""
f : fonction, y0 : valeur en zéro, tau : borne max de
l'intervalle,
N : nombre de points de la subdivision->
retourne un couple (abs, solution approchée)
"""
h = tau/N
T = np.linspace(0, tau, N+1)
Y = np.zeros(N+1)
Y[0] = y0
for k in range(N):
    Y[k+1] = Y[k] + h * f(T[k], Y[k])
return T, Y
```

Si l'inconnue  $y$  possède  $k$  coordonnées, alors c'est pareil, on approche simplement la dérivée de chaque coordonnée.

```
import numpy as np
def euler_vec(f, y0, tau, N):
    """
    f : fonction, y0 : vecteur en zéro, tau : borne max de
    l'intervalle,
    N : nombre de points de la subdivision->
    retourne un couple (abs, solution approchée)
    solution approchée est une matrice (en chaque point de la
    subdivision, k
    coordonnées)
    """
    h = tau/N
    T = np.linspace(0, tau, N+1)
    Y = np.zeros((N+1, len(y0)))
    Y[0] = y0
```

```

for k in range(N):
    Y[k+1] = Y[k] + h * f(T[k], Y[k])
return T, Y

```

**Exemple 23 – Fonction exponentielle** Testons avec la fonction exponentielle, *i.e.* l'équation différentielle  $y' = y$ .

```

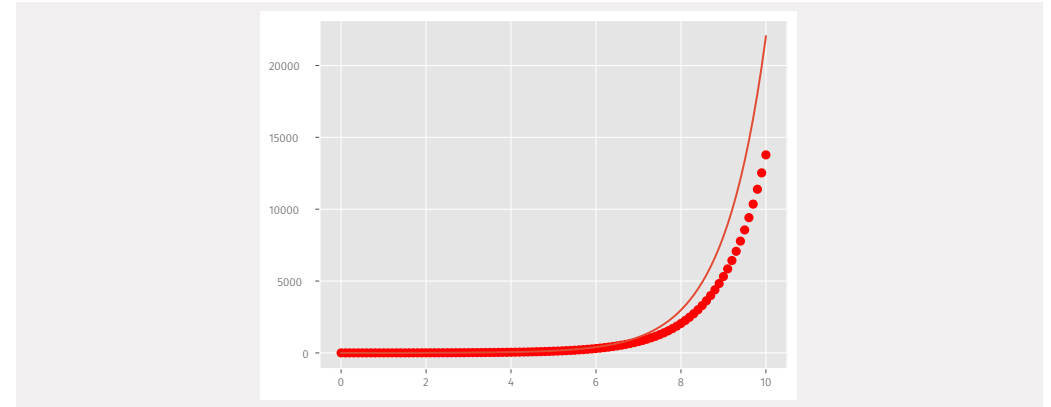
def f(t,x):
    return x

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def euler(f, y0, tau, N):
    """
    f : fonction, y0 : valeur en zéro, tau : borne max de
    l'intervalle,
    N : nombre de points de la subdivision->
    retourne un couple (abs, solution approchée)
    """
    h = tau/N
    T = np.linspace(0, tau, N+1)
    Y = np.zeros(N+1)
    Y[0] = y0
    for k in range(N):
        Y[k+1] = Y[k] + h * f(T[k], Y[k])
    return T, Y

X, sol_app = euler(f, 1, 10, 100)
plt.plot(X, sol_app, 'ro') #sol. approchee
plt.plot(X, np.exp(X)) #solution exacte

```



**Exemple 24 – Système proie/prédateur de Lotka & Volterra** Reprenons un système déjà introduit dans un exemple précédent, correspondant à une compétition entre deux espèces :

$$\begin{cases} y_1' = (2 - 4y_2)y_1, \\ y_2' = (-2 - 2y_1)y_2. \end{cases}$$

D'après ce que l'on a vu dans la section précédente, si par exemple  $y_1$  correspond à une population de lapins, et  $y_2$  une population de renards, alors nous avons ici :

- ▶ un fort taux de prédation des renards sur les lapins, un faible taux de prédation des lapins sur les renards,
- ▶ des taux de natalité comparables.

On s'attend alors en toute logique à observer une extinction rapide de la population de lapins.

```

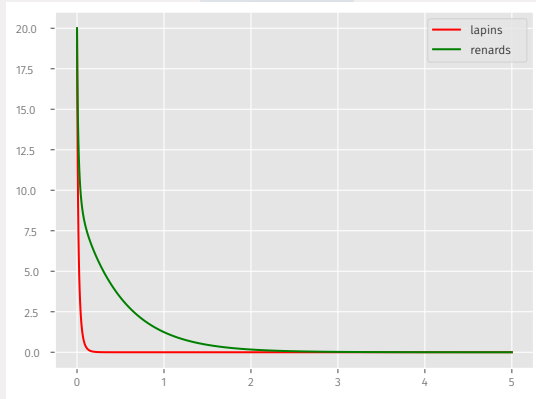
def f(t, x):
    return np.array([(2-4*x[1])*x[0], (-2-2*x[0])*x[1]])

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X, sol_app = euler_vec(f, [20, 20], 5, 10000)

```

```
plt.plot(X, [sol_app[i][0] for i in range(len(sol_app))], 'r',
        label = 'lapins')
plt.plot(X, [sol_app[i][1] for i in range(len(sol_app))],
        'g', label = 'renards')
plt.legend()
```



Commenter le graphe obtenu. 

#### 2.4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Soit  $p \geq 1$  un entier. On rappelle qu'un système différentiel en l'inconnue  $t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$ , est une équation différentielle de la forme

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_p'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$

où  $b_i \in \mathbf{R}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Nous allons voir une méthode afin de résoudre un tel système différentiel linéaire lorsque  $A$  est diagonalisable. Mais commençons par un lemme, souvent admis dans les sujets de concours.

##### Lemme ANA.9.1 |

Soit  $t \mapsto X(t)$  un vecteur de fonctions dérivables de  $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ , et  $B \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbf{R})$  une matrice constante. Alors

$$(B \cdot X)' = B \cdot X'.$$

**Preuve** Notons  $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix}$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , avec  $x_1, \dots, x_p$  dérivables. Notons

$B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ . Alors pour tout  $t$ , on a

$$B \cdot X(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p b_{1,j} x_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p b_{p,j} x_j(t) \end{pmatrix} \implies (B \cdot X(t))' = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p b_{1,j} x_j'(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p b_{p,j} x_j'(t) \end{pmatrix},$$

ce qui prouve

$$(B \cdot X)'(t) = B \cdot X'(t).$$




**Méthode Résolution d'un système différentiel**


Notons  $Y'(t) = AY(t)$  le système avec  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{K})$  un vecteur de fonctions

dérivables, et  $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbf{K})$  une matrice diagonalisable à coefficients constants. Pour résoudre le système, on commence par

1. diagonaliser la matrice  $A$ . On obtient  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale et  $P$  inversible.
2. Considérer la nouvelle fonction inconnue  $Z = P^{-1}Y$ .
3. Établir un système en  $Z$  : puisque  $P$  est une matrice constante, on a  $Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}PDP^{-1}Y \implies Z' = DZ$ .
4. Résoudre  $Z' = DZ$ , c'est un système d'équations différentielles indépendantes.
5. On déduit  $Y = PZ$ .

**Exemple 25 — en dimension 3** Soit le système différentiel suivant (en les fonctions inconnues  $y_1, y_2, y_3$  :


$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3, \\ y_2' = 2y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 3y_3, \end{cases} \quad y_1, y_2, y_3 \text{ de classe } \mathcal{C}^1.$$


1. Écrire le système précédent à l'aide d'une matrice  $A$  et de  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ . 


2. On rappelle que dans l'Exemple 12 du Chapter ALG.5, nous avons diagonalisé la

matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , et avons montré que :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}, \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Notons  $Z = P^{-1}X$ . Montrer que  $Y$  est solution de  $Y' = AY$  si et seulement si  $Z$  est solution de  $Z' = DZ$ . 

4. En déduire les solutions du système initial. 

**Attention**  Là encore, dans la méthode présentée, il n'y a pas besoin de connaître la matrice  $P^{-1}$ , mais uniquement  $P$ .

### 3. MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES DYNAMIQUES

L'interprétation physique du nombre dérivé est une vitesse instantanée. Il est donc possible de décrire des phénomènes d'évolution continue à l'aide d'équations différentielles ou des suites récurrentes pour des évolutions discrètes. Nous nous intéresserons également dans la suite aux modèles décrivant des dynamiques de population.

#### 3.1. Taux d'évolution et dynamiques linéaires

Lorsqu'une grandeur discrète  $U = (u_n)$  (une suite) ou continue  $y$  (une fonction dérivable) varie, on cherche à quantifier souvent la variation de cette grandeur entre deux instants. Pour le signe, *i.e.* savoir si elle croît ou décroît, on dispose déjà d'outils :

$$u_{n+1} - u_n, n \in \mathbf{N} \quad \text{pour les suites, et } y' \quad \text{pour les fonctions.}$$

On pourrait d'autre part s'intéresser plus précisément à l'amplitude de la variation en un temps donné.

- ▶ **(Discret)** dans le cas discret, si  $n, p$  sont deux entiers, alors la variation de  $(u_n)$  entre les temps  $n$  et  $n + p$  est définie comme

$$\Delta_n^{n+p}(U) = u_{n+p} - u_n.$$

- ▶ **(Continu)** dans le cas continu, si  $t, h$  sont deux réels positifs, alors la variation de  $y$  entre les temps  $t$  et  $t + h$  est définie comme

$$\Delta_t^{t+h}(y) = y(t+h) - y(t).$$

Plutôt que de regarder des variations comme *supra*, on peut aussi se demander quel est le pourcentage ou taux d'augmentation/diminution par rapport à une valeur antérieure — c'est le principe par exemple des livrets bancaires.

- ▶ **(Discret)** dans le cas discret, si  $n, p$  sont deux entiers, alors intuitivement le taux d'évolution de  $(u_n)$  entre les temps  $n$  et  $n + p$  est définie comme le réel  $\tau_{n,p}(U)$  tel que

$$u_{n+p} = u_n + \tau_{n,p} u_n$$

donc de manière équivalente

$$\tau_{n,p}(U) = \frac{u_{n+p} - u_n}{u_n}.$$

- ▶ **(Continu)** dans le cas continu, si  $t, h$  sont deux réels positifs, alors on définit de même le taux d'évolution de  $y$  entre les temps  $t$  et  $t + h$  :

$$\tau_{t,t+h}(y) = \frac{y(t+h) - y(t)}{y(t)}.$$

On peut préférer aussi les versions *instantanées* (*cf.* la définition ci-après).

#### Définition ANA.9.25 | Taux d'évolution

- ▶ **(Discret)** Soit  $U = (u_n)$  une suite. Si  $n, p$  sont deux entiers, alors on définit :
  - le *taux d'évolution entre  $n$  et  $p$*  noté  $\tau_{n,p}(U)$  par :

$$\tau_{n,p}(U) = \frac{u_{n+p} - u_n}{u_n}.$$

- le *taux d'évolution en  $n$*  noté  $\tau_n(U)$  par :

$$\tau_n(U) = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}.$$

- ▶ **(Continu)** Soit  $y$  une fonction dérivable. Si  $t, h$  sont deux réels positifs, alors on définit :

— le *taux d'évolution* entre  $t$  et  $t + h$  noté  $\tau_{t,t+h}(y)$  par :

$$\tau_{t,t+h}(y) = \frac{y(t+h) - y(t)}{y(t)}.$$

— le *taux d'évolution en  $t$*  noté  $\tau_t(y)$  par :


$$\tau_t(y) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{t,t+h}(y)}{h} \text{ }^{10}.$$


Lorsque  $y$  décrit une population d'individus, on parle de *taux de reproduction* (resp. *mortalité*) en  $t$  si  $\tau(t) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ).

- **(Évolution linéaire)** Dans chacun des cas, on dit que  $U$  (ou  $y$ ) suit une *évolution linéaire* lorsque le taux d'évolution est constant au cours du temps.

Dans la suite de cette section, nous n'utiliserons presque plus que le taux d'évolution en un temps donné. L'avantage de cette quantité est qu'elle possède une interprétation très intuitive, et permet donc de formaliser mathématiquement des situations très diverses d'évolution. Voyons quelques exemples.

**Exemple 26** — Dans cet exemple, on considère  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique,  $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable.

1. Quelles sont les suites  $U$  de taux d'évolution constant égal à  $\tau \in \mathbf{R}$ ? Analyser la convergence en temps long, commentez. 

2. Même question pour les fonctions  $y$ , on analysera la convergence en temps long, commentez. 

**Remarque 3.1** — C'est d'ailleurs la démarche de l'exemple précédent qui poussa à introduire la fonction exponentielle. On dit aussi de manière plus vague que  $y$  possède une « croissance exponentielle ».

### 3.2. Modélisation de systèmes présentant une dynamique


L'utilisation de suites numériques d'une part, et de fonctions d'autre part permet de modéliser de manière très fidèle des systèmes présentant une dynamique simple. De manière formelle, si une grandeur  $V$  — discrète ou continue et éventuellement vectorielle — décrit une évolution, alors schématiquement :


- **(Discret)** bilan de  $V$  entre  $n$  et  $n + 1 \implies$  relation de récurrence sur  $(v_n)$ .
- **(Continu)** bilan de  $V$  entre  $t$  et  $t + h \implies$  équation différentielle sur  $V$ .


<sup>10</sup>Par définition du nombre dérivé

Faisons ce travail de bilan de grandeur, dans plusieurs contextes.

**Exemple 27 — Modélisation** Modéliser les situations ci-après à l'aide d'une suite ou d'une fonction. Commentez.

**1. (Reproduction cellulaire très simplifiée)** On considère une population de cellules, qui se reproduisent tous les ans. On suppose que chaque cellule donne alors lieu à deux cellules à l'année suivante. 


**2. (Cinétique chimique d'ordre 1)** On considère une réaction chimique notée  $A \rightarrow B$ , on suppose que le réactif A disparaît de manière proportionnelle au temps et à la concentration  $[A]$  en réactif A. 

**3. (Évolution radioactive)** On considère une population d'atomes de carbone 14. On suppose qu'en tout temps  $t \in \mathbf{R}^+$ , une proportion  $\rho_t \in \mathbf{R}^+$  d'atomes se désintègrent et une proportion  $t\rho_b \in \mathbf{R}^+$  se crée. 

**4. (Deux populations à évolution liée)** On considère une population de tortues, composée de bébés (âgés d'un an, population décrite<sup>11</sup> par une suite  $(b_n)$ ) d'une part et d'adultes (âgés de deux ans ou plus, associés à une suite  $(a_n)$ ) d'autre part.

On suppose que

- ▶ les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge,
- ▶ 40% des tortues adultes de l'année  $n$  meurent avant la fin de l'année,
- ▶ les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie.

On déterminera  $a_{n+2}$  en fonction de  $a_{n+1}$  et  $b_n$ , ainsi que  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  

Nous verrons d'autres contextes en TD.

### 3.3. Dynamique des populations

#### 3.3.1. Modèle malthusien : évolution libre

Il est largement considéré que c'est au crédit de Thomas. R. MALTHUS que l'on accorde la paternité de l'un des premiers modèles mathématiques de croissance de population, qui publie (anonymement, dans sa première version) son célèbre *Essai sur le principe de population* en 1798.

<sup>11</sup>Je n'emploie pas le mot cardinal car  $b_n$  n'est pas forcément un entier

Selon MALTHUS, cf. la citation présentée en début de chapitre, la croissance d'une population aurait un ratio géométrique, *a contrario* de la croissance des ressources qui serait arithmétique. MALTHUS ne vérifia pas rigoureusement cette théorie de rapport de croissances, prenant comme argument d'autorité l'évidence de ses propos. MALTHUS estime que la population mondiale double toutes les 25 années - fatalement, la population tendra rapidement à s'accroître au-delà des moyens de subsistance, engendrant selon lui pléthores de conséquences plutôt dévastatrices (guerres, famines, épidémies, ...).

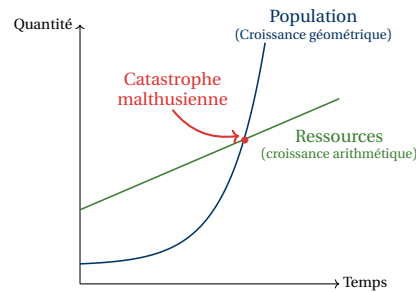


FIG. ANA.9.5. : Représentation du modèle de MALTHUS. Lorsque la quantité de population (augmentation géométrique) dépasse celle des ressources (augmentation arithmétique), la catastrophe malthusienne s'enclenche.

L'appréhension d'une telle catastrophe démographique associée à une préconisation de la limitation du nombre de naissances porte désormais le nom de *malthusianisme*. Notons que, comme le souligne l'anthropologue C. Meillassoux, cette peur d'une croissance excessive au delà des moyens de subsistances est complètement irréaliste : en réalité, comment une population pourrait-elle continuer à croître exponentiellement en ayant épuisé les ressources nécessaires à son développement ? MALTHUS le reconnaît d'ailleurs lui-même (traduction en Français) : « Je sais bien, que les millions d'habitants en excès dont j'ai parlé n'existeront jamais ». Mais cette pensée malthusienne eut tout de même des conséquences importantes, comme par exemple la politique de l'enfant unique en Chine. Présentons à présent une description mathématique.

On suppose que la population grandit en se multipliant par un nombre fixe  $\beta$  appelé *taux de reproduction* ou *taux de fertilité*, et meurt selon un *taux de mortalité*  $\mu > 0$  supposés constant ici. Ainsi, si  $P$  désigne le cardinal<sup>12</sup> de la population.

<sup>12</sup>abus de vocabulaire, puisque  $P$  n'a aucune raison d'être un entier positif

## BILAN DE POPULATION MALTHUSIEN

► (modèle discret)



► (modèle continu)



On débouche alors sur la définition ci-après.

**Définition ANA.9.26 | Modèle de MALTHUS**

- ▶ On dit qu'une suite  $(p_n)$  suit un *modèle malthusien de taux  $\beta, \mu$ , condition initiale  $P_0 \in \mathbf{R}$*  si  $(p_n)$  vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + (\beta - \mu)p_n \quad (n \in \mathbf{N}), \quad p_0 = P_0. \quad (\text{Malthus, disc})$$

- ▶ On dit qu'une fonction  $P$  suit un *modèle malthusien de taux  $\beta, \mu$ , condition initiale  $P_0 \in \mathbf{R}$*  si  $P$  est dérivable en  $t$  et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu)P(t) \quad (t \geq 0), \quad P(0) = P_0. \quad (\text{Malthus})$$

On appelle  $\beta$  le taux de natalité,  $\mu$  le taux de mortalité. Le taux d'évolution est alors  $\beta - \mu$ .<sup>13</sup>

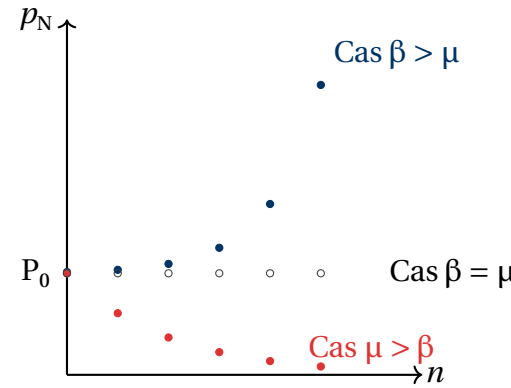


FIG. ANA.9.6. : Modèle malthusien discret

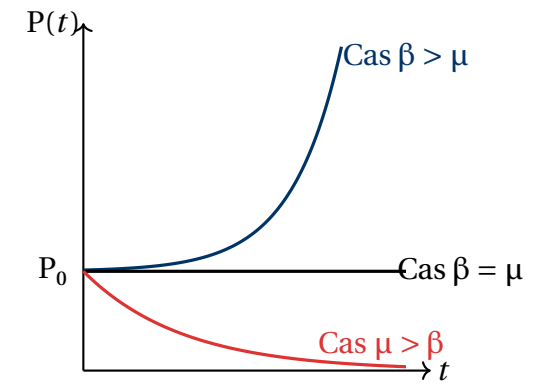


FIG. ANA.9.7. : Modèle malthusien continu

Ce modèle très simpliste met en évidence un point très important : l'évolution d'une population est dictée par la balance entre taux de fertilité et taux de mortalité, que ce soit dans le cas discret ou le cas continu.

De manière équivalente, cela signifie que :

- ▶ **(Cas discret)**  $p_n = (1 + \beta - \mu)^n P_0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,
- ▶ **(Cas continu)**  $P(t) = P_0 e^{(\beta - \mu)t}$  pour tout  $t \geq 0$ .

Ici nous ne supposons donc pas l'existence de prédateurs, et que les ressources naturelles sont en quantité illimitée. Ainsi la population a donc la possibilité de se développer indéfiniment.

<sup>13</sup>Conséquence directe de la définition

**3.3.2. Modèle logistique de VERHULST : évolution sous capacité de milieu**

En 1838, Pierre-François VERHULST répond à MALTHUS en proposant un modèle *logistique* de dynamique de population. À l'instar du modèle de MALTHUS, il suppose qu'une population sans limitation de ressources croît de manière exponentielle mais que la croissance de la population est freinée par sa propre dynamique et par la limitation des ressources du milieu.

Dans sa note, VERHULST suppose la résistance à la croissance d'une population proportionnelle au carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croître (à l'instar d'un mobile en chute libre traversant un milieu résistant — cette intuition fut d'ailleurs fournie à VERHULST par le physicien QUETELET). Le bilan de population est quant à lui le même que pour MALTHUS, avec simplement l'ajout d'un terme proportionnel à  $-P(t)^2$  (ou  $-p_n^2$ ). À renommage de variables près, on arrive directement sur la définition ci-après.

**Définition ANA.9.27 | Modèle de VERHULST**

- ▶ On dit qu'une suite  $(p_n)$  suit un *modèle de VERHULST de taux*  $\beta, \mu, \kappa$ , *condition initiale*  $P_0 \in \mathbf{R}$  si  $(p_n)$  vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + (\beta - \mu) \left( p_n - \frac{p_n^2}{\kappa} \right) \quad (n \in \mathbf{N}), \quad p_0 = P_0. \quad (\text{Verhulst, disc})$$

- ▶ On dit qu'une fonction  $P$  suit un *modèle de VERHULST de taux*  $\beta, \mu, \kappa$ , *condition initiale*  $P_0 \in \mathbf{R}$  si  $P$  est dérivable en  $t$  et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu) \left( P(t) - \frac{P(t)^2}{\kappa} \right) \quad (t \geq 0), \quad P(0) = P_0. \quad (\text{Verhulst})$$

On appelle  $\beta$  le taux de natalité,  $\mu$  le taux de mortalité, et  $\kappa$  la capacité du milieu<sup>14</sup>.

Pour le modèle de VERHULST, il n'est pas du tout aisé d'obtenir une expression de  $(p_n)$  en fonction de  $n$ . En revanche dans le cas continu, si  $P_0 > 0$ , nous pouvons établir (cf. TD) que :

$$P(t) = \frac{\kappa}{1 + e^{-(\beta-\mu)t} \left( \frac{\kappa}{P_0} - 1 \right)}.$$

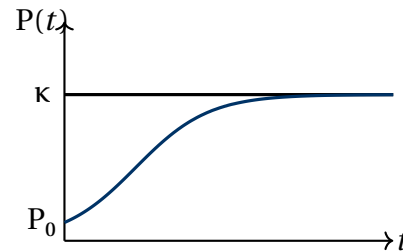


FIG. ANA.9.8 : Modèle de VERHULST continu

**Définition ANA.9.28 | Modèle de GOMPERTZ**

- ▶ On dit qu'une suite  $(p_n)$  suit un *modèle de GOMPERTZ de taux*  $\beta, \mu, \kappa$ , *condition initiale*  $P_0 \in \mathbf{R}$  si  $(p_n)$  vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + (\beta - \mu) \ln \left( \frac{\kappa}{p_n} \right) p_n \quad (n \in \mathbf{N}), \quad p_0 = P_0. \quad (\text{Gompertz, disc})$$

- ▶ On dit qu'une fonction  $P$  suit un *modèle de GOMPERTZ de taux*  $\beta, \mu, \kappa$ , *condition initiale*  $P_0 \in \mathbf{R}$  si  $P$  est dérivable en  $t$  et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu) \ln \left( \frac{\kappa}{P(t)} \right) P(t) \quad (t \geq 0), \quad P(0) = P_0. \quad (\text{Gompertz})$$

On appelle  $\beta$  le taux de natalité,  $\mu$  le taux de mortalité, et  $\kappa$  la capacité du milieu.

Là encore, on ne peut pas obtenir d'expression explicite pour le modèle discret. En revanche dans le cas continu, si  $P_0 > 0$ , nous pouvons établir (cf. TD) que :

$$P(t) = \kappa e^{\ln \left( \frac{P_0}{\kappa} \right) e^{-(\beta-\mu)t}}.$$

Nous ferons la résolution explicite en TD.

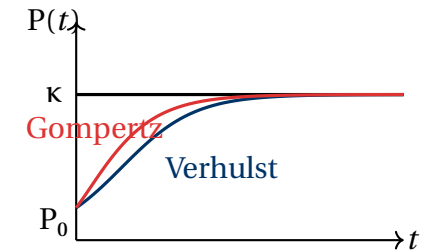


FIG. ANA.9.9 : Modèle de GOMPERTZ continu

**3.3.3. Modèle de GOMPERTZ**

Un modèle ressemblant au précédent, seule la vitesse de convergence vers la valeur limite est modifiée ainsi que la pente initiale.

<sup>14</sup>C'est donc ce terme supplémentaire qui vient freiner la croissance de la population si  $\beta - \mu > 0$ , et accélérer la croissance si  $\beta - \mu < 0$

**3.3.4. Modèle proies-prédateurs de LOTKA-VOLTERRA : compétition entre deux populations**

Si deux espèces dont les populations sont représentées par  $P_1$  et  $P_2$  se partagent le milieu, on peut adapter le modèle de VERHULST pour tenir compte de cette compétition.



**Définition ANA.9.29 | Modèle de Lotka-Volterra**

On dit qu'une fonction  $P$  suit un *modèle de Lotka-Volterra de taux*  $\beta, \mu, \kappa$  si  $P$  est dérivable en  $t$  et vérifie :

$$\begin{cases} P_1'(t) = ((\beta_1 - \mu_1) - \pi_1 P_2(t)) P_1(t), \\ P_2'(t) = ((\beta_2 - \mu_2) - \pi_2 P_1(t)) P_2(t). \end{cases} \quad (\text{LoktaVolt})$$

On appelle  $\beta_1$  le taux de natalité,  $\mu_1$  le taux de mortalité pour la première (avec  $\beta_2, \mu_2$  pour la seconde), et  $\pi_1, \pi_2$  les taux de prédation.

**Remarque 3.2 — Interprétation du système** Nous annotons chacun des termes présents dans le système. 

$$\begin{cases} P_1'(t) = ((\beta_1 - \mu_1) - \pi_1 P_2(t)) P_1(t), \\ P_2'(t) = ((\beta_2 - \mu_2) - \pi_2 P_1(t)) P_2(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

En plus de la non-linéarité, nous avons à travailler ici sur une équation différentielle dans  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ . Nous étudierons plus en détail ce système en séance d'Informatique en approchant les solutions grâce à la méthode d'EULER.

\*\*\* **Fin du chapitre** \*\*\*

## 4. EXERCICES

## Exercice ANA.9.1 | Vrai ou Faux?

- $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
- Une suite bornée converge.
- La partie entière d'une suite réelle convergente est convergente.
- Une suite géométrique bornée converge.
- Soit  $f$  une fonction solution de  $y' = 3y$ . Alors pour tout  $x$ , il existe  $C \in \mathbf{R}$  telle que  $f(x) = Ce^{2x}$ .
- Il y a une unique solution de  $y' = xy$  avec  $y(0) = 1$ .
- Les solutions de  $y'' - 2y'(x) + 2y = 0$  sont toutes bornées.
- La suite provenant de la méthode d'EULER appliquée à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est arithmético-géométrique.

## 4.1. Suites numériques

Exercice ANA.9.2 | Étudier la convergence des suites  $(u_n)$  définies par :

- $u_n = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 - n \cos n}$  pour  $n \geq 1$ ,
- $u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln n)}{\sqrt{n^2 + 1}}$  pour  $n \geq 1$ ,
- $u_n = n - \sqrt{n^2 + (-1)^n}$ ,
- $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n - 3^{n+1}}$ ,
- $u_n = n \left(2 + \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)$ ,
- $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{3n}\right)\right)^{3n^2 + 1}$  pour  $n \geq 1$ .

## Solution (exercice ANA.9.2)

$$1. u_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{\cos n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{1}.$$

2. Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{1}.$$

- $u_n = n - \sqrt{n^2 + (-1)^n} = n \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{\infty}$  par règles usuelles sur les limites.
- On met en facteur les termes «les plus lourds» au numérateur et dénominateur.

$$u_n = \frac{3^n \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{3^{n+1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{\frac{1}{3}}.$$

5. On sait que le cosinus est borné par 1, donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq 2 + \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) \leq 3,$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \leq u_n.$$

Il vient  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  par théorème de divergence par minoration.

- Faisons un développement limité. Constatons que la suite est bien définie puisque  $0 \leq \frac{1}{3n} \leq 1$  et donc  $\cos\left(\frac{1}{3n}\right) > 0$  pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\cos\left(\frac{1}{3n}\right)\right)^{3n^2 + 1} \\ &= \exp\left((3n^2 + 1) \ln \cos\left(\frac{1}{3n}\right)\right) \\ &= \exp\left((3n^2 + 1) \ln\left(1 - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

**Exercice ANA.9.3 | Suite récurrentes linéaires d'ordre deux** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n$  et déterminer la limite de :

1.  $u_0 = 1, u_1 = 9, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ . ➤ Proposer un programme Python traçant les 100 premiers termes.
2.  $u_0 = -1, u_1 = 5, u_{n+2} + u_n = u_{n+1}$ ,
3.  $u_0 = 1, u_1 = 2, u_n = \frac{2}{\frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}}}$ , pour tout  $n \geq 2$ ,
4.  $u_0 = 1, u_1 = 2, 6u_n u_{n+1} - 5u_n u_{n+2} + u_{n+1} u_{n+2} = 0$ .

**Exercice ANA.9.4 | Deux récurrences non classiques**

1. Soit E l'ensemble des suites réelles  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} + x_n = n$ .
  - 1.1) Trouver une suite arithmétique élément de E. On la notera  $(y_n)$ .
  - 1.2) Trouver toutes les suites de E, on pourra former une relation de récurrence sur la suite  $(x_n - y_n)_n$ , si  $(x_n) \in E$ .
  - 1.3) Donner un équivalent d'une suite  $(x_n)$  de E.
2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par
 
$$u_0 = \frac{2}{3}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
  - 2.1) En étudiant  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n \times \sqrt{2} - n$  pour tout  $n$ , donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - 2.2) Calculer  $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$  en fonction de  $n$ .

**Solution (exercice ANA.9.4)**

1. Soit E l'ensemble des suites réelles  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} + x_n = n$ .
  - 1.1) On cherche  $(y_n)$  sous la forme  $y_n = y_0 + nr$  avec  $r \in \mathbf{R}$ . En remplaçant, on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad y_0 + (n+1)r + y_0 + nr = n \iff (2y_0 + r) + 2nr = n.$$

Les membres étant des polynômes en  $n$ , on déduit :

$$r = \frac{1}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{4}.$$

La seule suite arithmétique de (E) est donc

$$(y_n) = \left( -\frac{1}{4} + \frac{n}{2} \right).$$

- 1.2) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . On a

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + n, \\ y_{n+1} = -y_n + n. \end{cases}$$

Donc en faisant la différence

$$x_{n+1} - y_{n+1} = -(x_n - y_n),$$

donc la suite  $(x_n - y_n)$  est géométrique de raison  $-1$ , et

$$x_n - y_n = (-1)^n (x_0 - y_0) = (-1)^n \left( x_0 + \frac{1}{4} \right),$$

cela implique

$$x_n = (-1)^n \left( x_0 + \frac{1}{4} \right) + -\frac{1}{4} + \frac{n}{2}.$$

- 1.3) En mettant  $\frac{n}{2}$ , on montre sans difficulté que  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2}$  pour toute suite  $(x_n) \in E$ .
2. Attention,  $(u_n)$  n'est pas du tout arithmético-géométrique.
  - 2.1) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \sqrt{2} \cdot u_{n+1} - (n+1) \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (n+1) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} + 1 - n - 1 \\ &= \frac{v_n + n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} - n \\ &= \frac{v_n}{2} + n - n = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , et donc  $v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2^{n-1}}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Ainsi, on déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}
 2.2) \quad S_n &= \sum_{i=0}^n \left( \frac{1}{3 \cdot 2^{i-1}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{2}{3} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \boxed{\frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n(n+1)}{2}}.
 \end{aligned}$$

**Exercice ANA.9.5 | Approximation de l'exponentielle** Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On souhaite trouver un moyen algorithmique permettant d'obtenir une valeur approchée de  $e^x$ . Pour cela, introduisons une suite  $(u_n(x))$  définie par :

$$\forall n > -x, \quad u_n(x) = \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$


1. Déterminer un développement asymptotique de  $(u_n(x))$  à l'ordre 1, puis montrer que  $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$ . Ce résultat pourra être utilisé dans la suite.
2. On introduit une seconde suite  $(v_n(x))$  définie par :

$$\forall n \in \mathcal{N}, \quad v_n(x) = \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^{-n},$$

où  $\mathcal{N}$  est un ensemble à préciser.



- 2.1) Justifier que les suites  $(u_n(x)), (v_n(x))$  sont définies pour  $n > |x|$ .
- 2.2) Montrer par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbf{N}, y > -1$ ,

$$(1 + y)^n \geq 1 + ny.$$

- 2.3)  Conjecturer les variations des suites à l'aide de Python.
- 2.4) En montrant que pour  $n \in \mathbf{N}, n > |x|$ ,

$$u_{n+1}(x) = \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^{n+1} \left( 1 - \frac{x}{n(n+1) \left( 1 + \frac{x}{n} \right)} \right)^{n+1},$$

établir que  $(u_n(x))_{n > |x|}$  est croissante.

- 2.5) En faisant le lien entre  $v_n(x)$  et  $u_n(-x)$  pour tout  $n, x$  vérifiant  $n > |x|$ , donner la monotonie de  $(v_n(x))$ .
- 2.6) Conclure quant à la convergence des suites  $(u_n(x))$  et  $(v_n(x))$ .
- 2.7)  En déduire une fonction Python d'en-tête `approx_expo(x, prec)` qui fournit une valeur approchée de  $e^x$  à précision `prec`.
- 2.8)  Vérifier le programme précédent à l'aide du module `math` ou `numpy`.

**Solution (exercice ANA.9.5)**

1. On utilise les formules de développements limités usuels.

$$\begin{aligned}
 u_n(x) &= \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \\
 &= \exp \left( n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \exp \left( n \left( \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \exp \left( x - \frac{x^2}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} e^x \exp \left( -\frac{x^2}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \boxed{e^x \left( -\frac{x^2}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right)}.
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \exp \left( -\frac{x^2}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\ \left. \begin{array}{l} \exp \left( -\frac{x^2}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\ \exp \left( -\frac{x^2}{n} + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \end{array} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2. On introduit une seconde suite  $(v_n(x))$  définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n(x) = \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^{-n}.$$

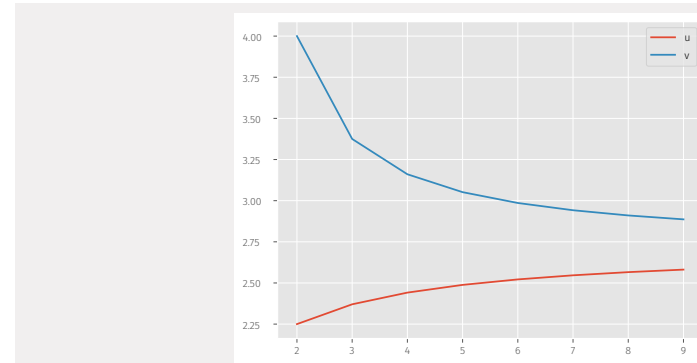
- 2.1) La première est définie dès que  $n > -x$ . La seconde est définie pour les  $n$  tels que  $1 - \frac{x}{n} > 0$  donc si et seulement si  $n > x$ . Or,  $n > |x|$  signifie que  $-n < x < n$ , donc  $(u_n(x)), (v_n(x))$  sont définies sur le domaine commun  $\boxed{n > |x|}$ .

**2.2)** Soit  $y > -1$ . La propriété est vraie pour  $n = 0$  car  $1 \geq 1$ . Supposons-la vraie au rang  $n$ , alors puisque  $1 + y > 0$  on a par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} (1 + y)^{n+1} &\geq (1 + ny)(1 + y) \\ &= 1 + ny + x + ny^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)y. \end{aligned}$$

```
import math as ma
def calcul_trace(n, x):
    """
    retourne deux listes correspondant à u,v
    """
    n_0 = int(abs(x))+1
    L_u = []
    L_v = []
    for k in range(n_0, n):
        L_u.append((1+x/k)**k)
        L_v.append((1-x/k)**(-k))
    return L_u, L_v
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
L_u, L_v = calcul_trace(10, 1)
plt.plot(range(2, 10), L_u, label='u')
plt.plot(range(2, 10), L_v, label='v')
plt.legend()
```



On conjecture donc que  $(u_n(x))$  semble croissante et  $(v_n)$  décroissante.

**2.3)** On a en suivant l'indication

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} \\ &\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par une question précédente} \\ \curvearrowright \end{array} \right. \\ &= u_n(x). \end{aligned}$$

Donc  $(u_n(x))_{n>|x|}$  est croissante.

**2.4)** On a  $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ , donc  $(v_n(x))$  est décroissante comme inverse d'une suite croissante. Il reste enfin à montrer la convergence vers zéro, c'est immédiat car il s'agit d'une différence de suites convergent vers  $e^x$ .


**2.5)** >\_☞

```
import math as ma
def approx_expo(x, prec):
    """
    retourne deux listes correspondant à u,v
    """
```

```

k = int(abs(x))+1
u = (1+x/k)**k
v = (1-x/k)**(-k)
while v - u > prec:
    k += 1
    u = (1+x/k)**k
    v = (1-x/k)**(-k)
return ((1+x/k)**k+(1-x/k)**(-k))/2

```

2.6)  On peut alors comparer

```

>>> import math as ma
>>> ma.exp(1)
2.718281828459045
>>> approx_expo(1, 10**(-3))
2.7182819969815766

```

**Exercice ANA.9.6 | Une suite récurrente avec « $f$ » décroissante** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  par :  $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ . On considère également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , valable pour tout entier naturel  $n$ .

1. **1.1)** Dresser le tableau de variation de  $f$ , limites comprises.
- 1.2) Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est parfaitement défini et strictement positif.
2. Les scripts suivants renvoient, 5 pour programme1 et 6 pour programme2. Que sait-on de  $u_5$  et  $u_6$ ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ?

```

import math as ma
def programme1():
    u = 1

```

```


n = 0
while u > 0.00001:
    u = ma.exp(-u)/u
    n += 1
return n

import math as ma
def programme2():
    u = 1
    n = 0
    while u < 100000:
        u = ma.exp(-u)/u
        n += 1
    return n

```

3. **3.1)** étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbf{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, g(x) = e^{-x} - x^2$$

- 3.2) En déduire que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une seule solution, que l'on notera  $\alpha$ , sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
- 3.3)  Montrer que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ . Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de  $\alpha$ , en utilisant l'algorithme de dichotomie.
4. **4.1)** établir les deux inégalités :  $u_2 > u_0$  et  $u_3 < u_1$ .
- 4.2) En déduire les variations des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ .
5. On pose :  $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ 
  - 5.1) Déterminer  $h(x)$  pour tout réel  $x$  strictement positif et vérifier que  $h$  est continue en 0.
  - 5.2) Résoudre l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$  élément de  $\mathbf{R}_+$ .
  - 5.3) En déduire la limite de la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ .
  - 5.4) Montrer par l'absurde que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  diverge puis donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ .

**Solution (exercice ANA.9.6)**

- 1. 1.1)** La fonction  $f$  est définie dérivable (en tant que quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) sur  $\mathbf{R}^{++}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbf{R}^{++}$ ,  $f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$ . On déduit alors le tableau de variations de  $f$  à l'aide du signe de  $x \mapsto -(x+1) = -x-1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-e$	$+\infty$	$0$

Diagramme de variation : une flèche pointe de  $-\infty$  à  $-e$  (entre  $x = -\infty$  et  $x = -1$ ), une autre pointe de  $-e$  à  $-\infty$  (entre  $x = -1$  et  $x = 0$ ), et une dernière pointe de  $+\infty$  à  $0$  (entre  $x = 0$  et  $x = +\infty$ ).

Les limites s'obtiennent par opérations classiques sur les limites et par croissances comparées. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} = -\infty,$$

par croissances comparées. Les limites en zéro découlent d'opérations usuelles sur les limites, celle en  $+\infty$  de  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ .

- 1.2)** Il s'agit de vérifier que la suite ne s'annule jamais, et donc que l'on reste dans  $\mathcal{D}_f$  à chaque itération, i.e.  $f(\mathbf{R}^{++}) \subset \mathbf{R}^{++}$ . Mais comme  $f$  est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que  $f(\mathbf{R}^{++}) = [\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)[ =$

$\mathbf{R}^{++}$ . Donc : la suite est bien définie.

- 2.** Les boucles while s'arrêtent dès que  $u_n$  est très grand ou très petit. Pour programme1, le résultat donne  $u_5 \leq 0.00001$ . Pour programme2, nous avons  $u_6 \geq 100000$ . On peut conjecturer le comportement des sous-suites extraites des termes pairs et impairs : les pairs convergent peut-être vers 0, et les impairs divergent peut-être vers  $+\infty$ .

- 3. 3.1)** La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^+$  en tant que différence de telles fonctions. Soit  $x \in \mathbf{R}_+.$  Alors

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x = -xf(x) - 2x = -x(f(x) + 2).$$

Puisque  $f$  est strictement positive sur  $\mathbf{R}^{++}$  (donc  $f + 2$  aussi) d'après le tableau de variations, la fonction  $g'$  est quant à elle négative sur  $\mathbf{R}^{++}$ . Donc :

$g$  est une fonction strictement décroissante sur  $\mathbf{R}^+.$

- 3.2)** Déduisons que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une seule solution, que l'on notera  $\alpha$ , sur  $\mathbf{R}_+^*$ . On souhaite ici montrer l'existence et l'unicité, il faut donc chercher à appliquer le théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

En effet, remarquons déjà que pour tout  $x \in \mathbf{R}^{++}$ ,  $f(x) = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0$ . Or,  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}^{++}$ , elle est de plus strictement décroissante et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ .

Ainsi,  $g$  réalise une bijection de  $\mathbf{R}^{++}$  vers  $] -\infty, 1]$ , et comme  $0 \in ] -\infty, 1]$ , il existe un unique  $\alpha \in \mathbf{R}^{++}$  tel que  $g(\alpha) = 0$  donc tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

- 3.3)** Montrer que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ , i.e. que :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) > 0, \quad g(1) < 0.$$

Nous avons  $f(1) = \frac{1}{e} < 1$  donc  $g(1) < 0$ . Et  $g\left(\frac{1}{e}\right) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = e^{1-\frac{1}{e}} - e^{-1} = e^{-1} \left( e^{2-\frac{1}{e}} - 1 \right) > 0$  car  $2 - \frac{1}{e} > 1$ . Donc :  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ . Cette inégalité va nous permettre d'initialiser l'algorithme de Dichotomie ci-après.

```
import math as ma
def g(x):
    return ma.exp(-x)-x**2
def dichotomie(prec):
    """
    retourne une valeur approchée de alpha à précision eps
    via l'algorithme de dichotomie
    """
    a = 1/ma.exp(1)
    b = 1
    while b-a > prec:
        c = (a+b)/2
        if g(a)*g(c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
```

`return (a+b)/2`

Par exemple pour `prec = 10*(-3)`, on obtient 0.7033848354324981.

4. 4.1) Nous avons  $u_2 = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$ , il s'agit donc de vérifier que  $1 - e^{-1} > 1$ , ce qui est équivalent à  $1 > e^{-1}$ . L'égalité est vérifiée. Pour la seconde,  $u_3 = \frac{e^{-e^{1-e^{-1}}}}{e^{1-e^{-1}}}$  il s'agit de montrer que  $\frac{e^{-e^{1-e^{-1}}}}{e^{1-e^{-1}}} < e^{-1}$ , ou encore en passant au logarithme :

$$e^{-1} - 1 - e^{1-e^{-1}} < -1 \iff e^{-1} < e^{1-e^{-1}}.$$

En passant à nouveau au logarithme, on obtient :

$$-2 < -e^{-1} \quad \text{égalité bien entendu vérifiée.}$$

D'où en conclusion :  $u_2 > u_0$  et  $u_3 < u_1$ .

- 4.2) La fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbf{R}^{+*}$ , donc  $f \circ f$  est quant à elle croissante sur  $\mathbf{R}^{+*}$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$ , appliquons  $n$  fois la fonction  $f \circ f$  aux inégalités établies dans la question précédente. On obtient :

$$u_{2n+2} > u_{2n}, \quad u_{2n+3} < u_{2n+1}.$$

C'est exactement dire que

$(u_{2n})$  (resp.  $(u_{2n})$ ) est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

5. On pose :  $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$  On va établir d'abord qu'il s'agit du prolongement par continuité en zéro de la fonction  $f^2$ .
- 5.1) Soit  $x$  un réel strictement positif. Par définition, pour  $x > 0$ ,

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}}.$$

Par opérations sur les limites, on a :  $x - \frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$  donc par produit  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Ainsi, la fonction  $h$  est continue en zéro.

- 5.2) L'équation  $h(x) = x$  admet déjà zéro comme solution, résolvons-là à présent sur  $\mathbf{R}_{+*}$ . On a

$$\begin{aligned} h(x) &= x \\ \iff xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} &= x && \text{simplification par } x \neq 0 \text{ puis passage au logarithme} \\ \iff x - \frac{e^{-x}}{x} &= 0 \\ \iff x^2 &= e^{-x} \\ \iff x &= f(x). && x \neq 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc les éléments de  $\{0, \alpha\}$ .

- 5.3) Constatons d'abord que  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  vérifie une relation de récurrence à un pas. En effet, soit  $n \in \mathbf{N}$ , alors

$$u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1}) \quad (*)$$

car les termes de la suite sont strictement positifs d'après une question précédente. La suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante (déjà vu), et est minorée par zéro, donc converge vers une limite finie que nous notons  $\ell \in \mathbf{R}$ . Passons à la limite dans  $(*)$  :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} h(u_{2n+1}) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}\right) = h(\ell),$$

car  $h$  est continue sur  $\mathbf{R}^+$  (étape!). Donc  $\ell$  est une solution de l'équation  $h(x) = x$ , donc  $\ell = 0$  ou  $\alpha$ . La seconde limite est impossible, puisque  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante et que  $u_{2n+1} \leq u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$  d'après une question précédente. Donc si  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  convergeait vers  $\alpha$  on aurait par passage à la limite  $\alpha < \alpha$  — contradiction.

Donc, en conclusion :  $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

- 5.4) La suite des termes pairs est quant à elle croissante, et donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{2n} \geq u_0 = 1$ . On montre de-même qu'avant que, comme la fonction  $h$  est continue, la suite  $(u_{2n})$  ne peut converger que vers une solution de l'équation  $x = h(x)$ . Comme  $\alpha < 1$ , et que  $u_{2n} \geq 1 > 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , elle ne peut converger ni vers  $\alpha$ , ni vers zéro. Donc elle diverge et c'est forcément vers  $+\infty$  car elle est positive. Donc  $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .



**Exercice ANA.9.7 | Étude d'une suite récurrente d'ordre 1. Approximation d'une racine par une suite** On considère un réel  $a > 0$  et une suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0$  tel que  $u_0 > \sqrt{a}$ , et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

- Étudier brièvement sur  $\mathbf{R}^{++}$  la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$  et le signe de  $f(x) - x$ .
- \_🔗 Écrire une fonction en Python qu'on appellera  $U(u_0, a, n)$  qui prend en argument le premier terme de la suite, le réel  $a$  et l'entier  $n \geq 1$ , et renvoie la liste des termes  $[u_0, \dots, u_n]$ .
- En utilisant la bibliothèque `matplotlib.pyplot` tracer le graphique qui donne les 100 premiers termes de  $(u_n)$  pour  $a = 2$  et  $u_0 = 3,2$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N} : \sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$ . En déduire que  $(u_n)$  converge et calculer sa limite.
- On pose  $v_n = \frac{u_n - a}{u_n + \sqrt{a}}$ .
  - Montrer que  $v_{n+1} = v_n^2$  et en déduire  $v_n = v_0^{2^n} \forall n$ .
  - Montrer que pour tout  $n, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq 2u_0 v_0^{2^n}$  et retrouver la limite de  $(u_n)$ .
- Dans cette question  $a = 2$  et  $u_0 = 2$ . On veut déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $2u_0 v_0^{2^n} < 10^{-100}$ .
  - \_🔗 Le déterminer en écrivant une fonction python `NMin`.
  - Que peut-on dire de  $u_n$  avec le  $n$  trouvé ci-dessus?

**Solution (exercice ANA.9.7)**

- La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^{++}$  en tant que somme de fonctions dérivables. De plus,  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^{++}$ .

La fonction  $f$  est donc décroissante sur  $[0, \sqrt{a}]$  et croissante sur  $[\sqrt{a}, \infty[$ .

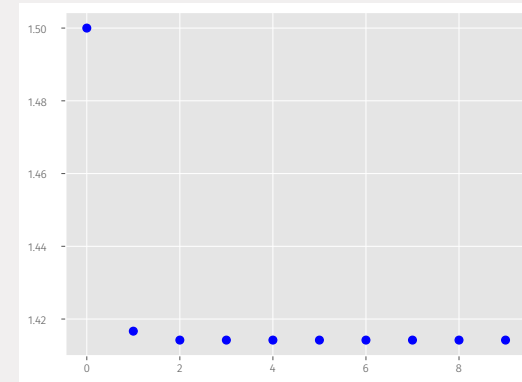
De plus, si l'on pose  $g(x) = f(x) - x = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x} - x \right)$ , on constate immédiatement que :

$g$  est positive si  $x \leq \sqrt{a}$  et négative si  $x \geq \sqrt{a}$ .

```
2. def U(u0, a, n):
    """
    Renvoie la liste des termes jusqu'au rang n
    """
    L = [u0]
    u = u0
    for _ in range(2, n+1):
        u = (1/2)*(u+a/u)
        L.append(u)
    return L
```

- On peut donc ensuite tracer ces termes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(U(3/2,2,10), 'bo')
```



- Constatons que  $f(\sqrt{a}) = a$ , c'est un point fixe de la fonction. Alors rappelons que  $u_0 > \sqrt{a}$ . Donc en appliquant  $f$  qui est strictement croissante sur ce domaine, on trouve  $u_1 > \sqrt{a}$ . Mais comme  $g$  est strictement négative sur  $]\sqrt{a}, \infty[$ , on a alors pour tout  $x \in ]\sqrt{a}, \infty[$ ,  $f(x) < x$  donc en faisant  $x = u_0$  on trouve  $u_1 < u_0$ . En combinant les deux encadrements on trouve  $\sqrt{a} < u_1 < u_0$ , i.e. la propriété au rang  $n = 0$ . Supposons-là vraie au rang  $n$ , alors appliquons  $f$  dans l'encadrement, on a alors :

$\sqrt{a} < u_{n+2} < u_{n+1}$  puisque  $f$  est strictement croissante sur  $[\sqrt{a}, \infty[$ . La propriété est donc vraie pour tout  $n$  par récurrence.

Ainsi la suite est décroissante minorée donc  $(u_n)$  converge.

5. 5.1) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{(u_n^2 + a) - 2u_n\sqrt{a}}{(u_n^2 + a) + 2u_n\sqrt{a}} = v_n^2.$$

On vérifie ensuite la formule  $v_n = v_0^{2^n}$  par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$ .

5.2) On a déjà établi que pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \geq \sqrt{a}$ . Et pour l'autre partie de l'encadrement, on écrit que  $u_n - \sqrt{a} = v_n(u_n + \sqrt{a}) \leq v_n 2u_0$ . Puis on utilise l'expression explicite de  $(v_n)$  trouvée précédemment. Puisque  $u_0 > \sqrt{a}$ , on vérifie par exemple par étude de fonction que  $v_0 \in ]-1, 1[$ , donc que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_0^{2^n} = 0$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

```
6. 6.1) import math as ma
def NMin(u0, a):
    """
    Cherche le plus petit entier n tel que le majorant de
    u-sqrt(a) soit assez petit
    """
    n = 0
    v = (u0-ma.sqrt(a))/(u0+ma.sqrt(a))
    while 2*(u0)*v >= 10**(-100):
        n += 1
        v = v**2
    return n
```

Par exemple pour les paramètres données dans l'énoncé, on trouve : 8.

6.2) Pour ce  $n$  on est sûr que  $u_n$  est une approximation de  $\sqrt{a}$  avec précision  $10^{-100}$ .

**Exercice ANA.9.8 | Agro—Véto, 2018. Étude d'une suite implicite** Pour  $n \geq 1$ , on définit la suite de fonctions  $(f_n)$  par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

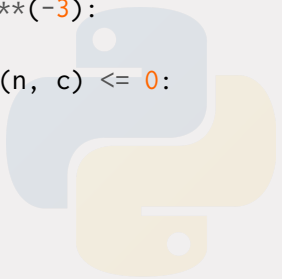
1. 1.1) Montrer pour  $n$  fixé que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbf{R}$  notée  $a_n$ . Montrer que  $a_n > 0$ .
- 1.2) ✎ Écrire une fonction `diCho(n)` qui calcule une valeur approchée de  $a_n$  pour un  $n$  donné, à précision  $10^{-2}$ , en utilisant le principe de dichotomie. La tester pour  $n = 2$ .
- 1.3) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est convergente et déterminer sa limite.
2. On pose  $u_n = n^2 a_n$  pour tout  $n \geq 1$ .
  - 2.1) ✎ Écrire un programme qui trace les termes  $u_n$  pour  $n \in [10, 40]$ . En déduire une conjecture sur la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - 2.2) Démontrer cette conjecture. En déduire un équivalent de la suite  $(a_n)$ .
3. Soit  $g$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2+2}$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
  - 3.1) Montrer que  $g$  est croissante sur  $[a_2, 1]$ .
  - 3.2) On définit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  par  $x_0 = 1$  et  $x_{n+1} = g(x_n)$  pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que la suite  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Solution (exercice ANA.9.8)**

1. Pour  $n$  fixé  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  (c'est un polynôme) et  $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$  pour tout  $x$ , donc  $f_n$  strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ . La limite de  $f_n$  en  $-\infty$  est  $-\infty$ , et en  $+\infty$  c'est  $+\infty$ . De plus  $f_n$  est continue sur  $\mathbf{R}$ , donc d'après le théorème de la bijection,  $f_n$  s'annule une unique fois : Il existe un unique réel  $a_n$  tel que  $f_n(a_n) = 0$ . De plus  $f_n(0) = -2 < 0 \Rightarrow 0 < a_n$  car  $f_n$  strictement croissante et  $f_n(a_n) = 0$ .
  - 1.1) Pour démarrer le principe de dichotomie, on a besoin aussi d'un majorant de  $a_n$ , or  $f_n(1) = n + n^2 - 2 \geq 1 + 1 - 2 = 0$  car  $n \geq 1$ , donc  $1 \geq a_n$ .

```
def f(n, x):
    return n*x**3 + n*n*x - 2
```

```
def dichotomie(n):
    a = 0
    b = 1
    while b - a > 10**(-3):
        c = (a+b)/2
        if f(n, a)*f(n, c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```



Par exemple :

```
>>> dichotomie(10)
0.02001953125
```

1.2) Pour  $n$  fixé,  $f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = \underbrace{na_n^3 + n^2 a_n - 2}_{=f_n(a_n)=0} + \underbrace{a_n^3 + (2n+1)a_n}_{>0 \text{ car } a_n > 0} > 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$ .

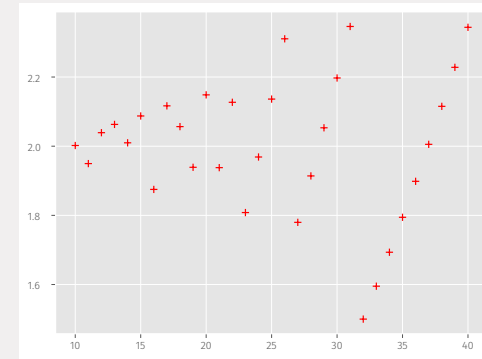
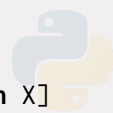
Donc  $a_n > a_{n+1}$  puisque la fonction  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ , et ceci pour tout  $n \geq 1$ . On en déduit que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est décroissante, et minorée par 0, donc convergente.

De plus  $f_n(a_n) = 0 \iff na_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0 \iff a_n = \frac{2}{n} \left( \frac{1}{a_n^2 + n} \right)$ . Or quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbf{R}$  donc  $a_n^2 + n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n^2 + n} \rightarrow 0$  et  $a_n \rightarrow 0$  donc  $\ell = 0$ .

2. 2.1) Si l'on garde la précision de  $10^{-3}$  utilisé au départ dans le programme de dichotomie, on obtient une représentation graphique incohérente des  $u_n$ , on va donc demander une précision eps supérieure.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
X = range(10, 41)
Y = [n*dichotomie(n) for n in X]
plt.plot(X, Y, '+r')
```



Les valeurs de la suite sont proches de deux, mais certes très anarchiques. La méthode de dichotomie fonctionne donc assez mal sur cet exemple.

On « conjecture » que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers 2.

2.2)  $\forall n \geq 1 \quad u_n = n^2 a_n$  donc  $f_n(a_n) = 0 \iff \frac{u_n}{n} a_n^2 + u_n - 2 = 0 \iff u_n \left( 1 + \frac{a_n^2}{n} \right) = 2$ . Comme  $\frac{a_n^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , nous obtenons :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$ . Ainsi, nous obtenons l'équivalent :  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n}$ .

3. 3.1) Soit  $g(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2+2}$ . On peut remarquer qu'elle est définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbf{R}$  :

$$g'(x) = \frac{6x^2(3x^2+2) - 6x(2x^3+1)}{(3x^2+2)^2} = \frac{6x}{(3x^2+2)^2} \underbrace{(x^3+2x-1)}_{h(x)}$$

La fonction  $h$  est donc dérivable sur  $\mathbf{R}$  et  $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$  donc  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ , donc sur  $[0, 1]$ . Or  $a_2 \in [0, 1]$  et  $h(a_2) = a_2^3 + 2a_2 - 1 = \frac{1}{2} (2a_2^3 + 4a_2 - 2)$ , donc  $g'$  du signe de  $h$  sur  $[0, 1]$  et est donc négative avant  $=0$  par définition de  $a_2$ .

$a_2$  et  $g'$  est positive sur  $[a_2, 1]$ , donc  $g$  est croissante sur  $[a_2, 1]$ .

3.2) On remarque de plus que  $g(1) = \frac{3}{5} < 1$ ,  $g(a_2) - a_2 = \frac{2a_2^3+1}{3a_2^2+2} - a_2 = \frac{-a_2^3-2a_2+1}{3a_2^2+2} = 0$  donc  $g(a_2) = a_2$ . Donc  $g([a_2, 1]) \subset [a_2, 1]$  et  $g$  est croissante et continue sur cet intervalle. Nous obtenons successivement :

—  $x_n \in [a_2, 1]$  pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$  par stabilité de  $[a_2, 1]$  par  $g$ , —  $x_1 =$

$g(x_0) = \frac{3}{5} < x_0$ , donc par récurrence (en utilisant la croissance de  $g$ ), on peut montrer que :

$\forall n, x_{n+1} < x_n$ , c'est-à-dire que  $(x_n)$  est décroissante. De plus cette suite est bornée, donc elle converge, vers  $x_\ell$  vérifiant  $g(x_\ell) = x_\ell$  par continuité de  $g$ . Or l'unique solution dans  $[0, 1]$  de cette équation est  $a_2$ . En conclusion :  $(x_n)$  converge vers  $a_2$

**4.2. Équations différentielles**

**Exercice ANA.9.9 | Équation «quasi-»différentielle** Déterminer les fonctions  $f \in \mathcal{D}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 2f(-x) + x.$$

**Solution (exercice ANA.9.9)**

► Pour éliminer la variable  $-x$  qui nous gêne, on peut essayer de dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, donc  $f$  vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) = -2f'(-x) + 1 = -2(2f(x) - x) + 1 \iff f''(x) + 4f(x) = 2x + 1.$$

Les solutions de l'homogène sont les fonctions  $x \mapsto A \sin(2x) + B \cos(2x)$  avec  $A, B \in \mathbf{R}$ . En cherchant une solution particulière sous forme polynomiale (ou par variation de la constante), on trouve l'ensemble des solutions qui est :

$$\left\{ x \mapsto A \sin(2x) + B \cos(2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \quad A, B \in \mathbf{R} \right\}.$$

► Inversement, prenons  $f$  de la forme  $f(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, x \in \mathbf{R}$  et regarder si elle est solution de l'équation de départ. Alors  $f$  est solution de l'équation de départ si et seulement si, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$2A \cos(2x) - 2B \sin(2x) + \frac{1}{2} = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) - x + \frac{1}{2} + x.$$

Ce qui permet d'écrire, en rassemblant les termes, que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, 2(A - B)(\cos(2x) + \sin(2x)) = 0 \implies A = B.$$

Il faut donc restreindre l'ensemble initial avec des constantes  $A$  et  $B$  égales. L'ensemble solution est

$$\left\{ x \mapsto A(\sin(2x) + \cos(2x)) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \quad A \in \mathbf{R} \right\}.$$

**Exercice ANA.9.10 |**

1. Diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .
2. Résoudre, par deux méthodes, le système différentiel suivant sur  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{cases} y' - y = z, \\ z' + z = 3y. \end{cases}$$

**Solution (exercice ANA.9.10)**

1. Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ , alors

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \phantom{L_1 \leftrightarrow L_3} \\ \phantom{L_2 \leftrightarrow 3L_2 - (1 - \lambda)L_1} \end{array} \right\} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \left. \begin{array}{l} \phantom{L_1 \leftrightarrow L_3} \\ \phantom{L_2 \leftrightarrow 3L_2 - (1 - \lambda)L_1} \end{array} \right\} L_2 \leftrightarrow 3L_2 - (1 - \lambda)L_1 \\ \phantom{L_1 \leftrightarrow L_3} \\ \phantom{L_2 \leftrightarrow 3L_2 - (1 - \lambda)L_1} \end{array}$$

Donc les valeurs propres sont  $\pm 2$ . Pour les espaces propres, on résout le système associé.

- ▶  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A)$  si et seulement si  $3x - 3y = 0$ , d'où  $E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,
- ▶  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$  si et seulement si  $3x + y = 0$ , d'où  $E_{-2}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Donc

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

2. ▶ **(Première méthode : matricielle)** Notons  $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ . Alors le système se réécrit

$$X' = \begin{pmatrix} y + z \\ 3y - z \end{pmatrix} = AX.$$

Donc introduisons  $Y = P^{-1}X$ . Alors  $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}PDP^{-1}X = DY$ .

Notons à présent  $Y = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$ , avec  $F, G$  deux fonctions dérivables. Alors, d'après le calcul précédent, elles sont solutions de

$$F' = 2F, \quad G' = -2G,$$

donc :

$$\exists K, L \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = Ke^{2x}, \quad G(x) = Le^{-2x}.$$

On revient ensuite aux variables  $y, z$ , pour tout  $x \in \mathbf{R}$

$$X(x) = PY(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ke^{2x} \\ Le^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ke^{2x} - \frac{1}{3}Le^{-2x} \\ Ke^{2x} + Le^{-2x} \end{pmatrix}.$$

- ▶ **(Deuxième méthode : artisanale)** Les deux fonctions  $y, z$  sont *a priori* dérivables une fois. Mais comme  $y' = z + y$ ,  $y$  est deux fois dérivable et on obtient

en redérivant :  $y'' - 4y = 0$  par substitution. Donc  $y$  est nécessairement de la forme  $y(x) = Ke^{2x} + Le^{-2x}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

En injectant dans la première équation, on trouve  $z(x) = Ke^{2x} - 3Le^{-2x}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

Inversement, on vérifie que les deux fonctions précédentes sont effectivement solutions. Et en renommant  $L$  en  $\frac{1}{3}L$ , on retrouve bien les solutions obtenues par la première méthode.

**Exercice ANA.9.11 | Changement de fonction inconnue** Résoudre

$$x^2 y'' + 3xy' + y = (x + 1)^2$$

sur  $\mathbf{R}^{+*}$ . *Indication :* On pourra réaliser le changement de fonction inconnue  $z(t) = y(e^t)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

**Solution (exercice ANA.9.11)**

On commence par calculer les dérivées de  $z$ . Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^t y'(e^t), \\ &= e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) \\ &= z'(t) + (e^t)^2 y''(e^t). \end{aligned}$$

Or, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a en utilisant l'équation différentielle de départ :

$$(e^t)^2 y''(e^t) = -3e^t y'(e^t) - y(e^t) - (e^t + 1)^2,$$

donc

$$(e^t)^2 y''(e^t) = -3z'(t) - z(t) - (e^t + 1)^2.$$

Donc  $z$  vérifie :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad z''(t) = z'(t) - 3z'(t) - z(t) - (e^t + 1)^2,$$

donc

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad z''(t) + 2z'(t) + z(t) = (e^t + 1)^2.$$

C'est cette fois-ci une équation différentielle linéaire à coefficients constants, l'équation caractéristique est  $x^2 + 2x + 1 = 0 = (x + 1)^2$ . Donc

$$\exists A, B \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}, \quad z(t) = (At + B)e^{-t}.$$

Constatons que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad z(t) = y(e^t) \iff \forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln x).$$

Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad y(x) = \frac{A \ln x + B}{x}}.$$

**Exercice ANA.9.12** | On note E l'ensemble des applications de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 f''(x) - 4x f'(x) + 6f(x) = 0.$$

- Vérifier que E est un espace vectoriel.
- Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $\mathbf{R}$  de E.
- Soit  $f \in E$ . On définit alors :  $g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow \frac{f(x)}{x^2} \end{array} \right.$ . Montrer que g est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}^*$  et que  $g''$  est nulle. En déduire la dimension et une base de E.
- Retrouver les solutions sur  $\mathbf{R}^{++}$  en faisant le changement de variable  $t = \ln x$ .

**Solution (exercice ANA.9.12)**

- Justifions que E est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Puisque l'équation différentielle est linéaire homogène, la fonction nulle est solution. Soient  $f, g \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} & x^2(\lambda f + \mu g)''(x) - 4x(\lambda f + \mu g)'(x) + 6(\lambda f + \mu g)(x) \\ &= x^2(\lambda f''(x) + \mu g''(x)) - 4x(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) + 6(\lambda f(x) + \mu g(x)) \\ &= \lambda 0 + \mu 0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de la dé-} \\ \text{rivation} \\ f, g \in E \end{array} \right\}$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ , donc **E est un espace vectoriel.**

- Soit  $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$  avec  $a_n \neq 0$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ . Alors commençons par chercher s'il y a une condition sur le degré  $n$ , en analysant le coefficient dominant. Le terme d'ordre  $n$  de  $X^2 f''(X) - 4X f'(X) + 6f(X)$  est :

$$a_n n(n-1)X^n - 4n a_n X^n + 6a_n X^n = a_n(n^2 - 5n + 6)X^n.$$

Ainsi, si  $f \in E$  alors tous les coefficients de  $X^2 f''(x) - 4X f'(x) + 6f(x)$  sont nuls, en particulier  $n^2 - 5n + 6 = (n-3)(n-2) = 0$  puisque  $a_n \neq 0$ . Donc :  $\deg f \in \{3, 2\}$ . Supposons que  $f = a_3 X^3 + \dots + a_0$ . Alors  $f$  est solution si et seulement si

$$\begin{aligned} X^2(6a_3 X + 2a_2) - 4X(3a_3 X^2 + 2a_2 X + a_1) + 6(a_3 X^3 + \dots + a_0) &= 0, \\ 0X^3 + 0X^2 + (-4a_1 + 6a_1)X - 4a_0 &= 0. \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient alors comme conditions  $a_1 = 0, a_0 = 0$ .

Donc  $f$  est solution si et seulement si  $f \in \text{Vect}(X^2, X^3)$ .

En résumé, **les solutions polynomiales sont les fonctions de  $\text{Vect}(X^2, X^3)$ .**

- La fonction **g est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}^*$**  en tant que quotient de telles fonctions, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour  $x \in \mathbf{R}^*$ ,

$$g'(x) = \frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x)}{x^3}.$$

Puis on déduit la dérivée seconde :

$$g''(x) = \frac{f''(x)x^2 - 2xf'(x)}{x^4} - 2\frac{f'(x)x^3 - 3x^2 f(x)}{x^6}.$$

Ainsi, en mettant les fractions au même dénominateur, on obtient

$$g''(x) = \frac{x^2 f''(x) - 2x f'(x) - 2x f(x) + 6f'(x)}{x^4} = \frac{0}{x^4}.$$

Donc :  $g'' = 0$  sur  $\mathbf{R}^*$ .

On déduit alors qu'il existe  $A, B \in \mathbf{R}$  tels que  $f(x) = Ax^3 + Bx^2$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ . Par continuité de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ , on a même :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = Ax^3 + Bx^2.$$

Ainsi,  $(x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$  est une famille génératrice de  $E$ , elle est de plus libre en tant que sous-famille d'une famille libre (la base canonique). Donc

$(x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$  est une base de  $E$  et  $\dim E = 2$ .

4. Définissons la fonction  $h : x \mapsto f(e^x)$ . Alors en tant que composée de telles fonctions, la fonction  $h$  est deux fois dérivable, et pour tout  $x \in \mathbf{R}^{+\ast}$ ,

$$h'(x) = e^x f'(e^x)$$

$$h''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x).$$

Mais d'après l'équation différentielle, nous avons

$$(e^x)^2 f''(e^x) - (4e^x) f'(e^x) + 6f(e^x) = 0.$$

Donc en utilisant  $h$ , on trouve :

$$(h''(x) - h'(x)) - 4h'(x) + 6h(x) = 0 \iff h''(x) - 5h'(x) + 6h(x) = 0.$$

L'équation caractéristique est alors  $x^2 - 5x + 6 = 0 = (x - 2)(x - 3)$ . Donc il existe  $A, B \in \mathbf{R}$  telles que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(e^x) = h(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$ . De manière équivalente,

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+\ast}, \quad f(x) = Ax^2 + Bx^3.$$

On retombe bien sur les solutions trouvées par l'autre méthode.

**Exercice ANA.9.13 | WRONSKIEN pour l'ordre 2** Soient  $f$  et  $g$  deux solutions de l'équation différentielle ci-dessous sur  $\mathbf{R}^*$

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad y'' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 0.$$

On admet l'existence de ces deux solutions. On considère par ailleurs, pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$  la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}.$$

On dit que  $(f, g)$  est un *système fondamental de solutions* si et seulement si

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+\ast}, \quad W(x) \neq 0.$$

1. Montrer que  $W = \det M$  — c'est une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}!$  — vérifie une équation différentielle simple du premier ordre.
2. En déduire que  $(f, g)$  est un système fondamental de solution si et seulement si  $W(1) \neq 0$ .

**Solution (exercice ANA.9.13)**

1. Par définition du déterminant, on a  $W(x) = fg' - f'g$ . En utilisant la formule de

dérivation d'un produit, on a pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 W'(x) &= (fg' - f'g)'(x) \\
 &= f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f''(x)g(x) - f'(x)g'(x) \\
 &= f'(x)g'(x) + f(x)\left(-\left(1 + \frac{2}{x}\right)g'(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)g(x)\right) \\
 &\quad - \left(-\left(1 + \frac{2}{x}\right)f'(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)f(x)\right)g(x) - f'(x)g'(x) \\
 &= \cancel{f'(x)g'(x)} - f(x)g'(x) - \cancel{f(x)g'(x)} + f'(x)g(x) + \cancel{f(x)g'(x)} - \cancel{f'(x)g'(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{dévelop-} \\ \text{pement} \end{array} \right\} \\
 &\quad - \frac{2}{x}f(x)g'(x) - \frac{1}{x}f(x)g(x) + \frac{2}{x}f'(x)g(x) + \frac{1}{x}f(x)g(x) \\
 &= -W(x) - \frac{2}{x}W(x) = -\left(1 + \frac{2}{x}\right)W(x).
 \end{aligned}$$

Donc :  $W$  est solution de  $y' = -\left(1 + \frac{2}{x}\right)y$ .

2. On déduit alors que pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ ,

$$W(x) = Ke^{-x-2\ln|x|} = \frac{Ke^{-x}}{x^2}.$$

En faisant  $x = 1$ , on obtient  $W(1) = Ke^{-1}$ , donc  $K = W(1)e$  et

$$W(x) = W(1)\frac{e^{1-x}}{x^2}.$$

Donc, puisque'une exponentielle n'est jamais nulle,  $(f, g)$  est un système fondamental de solution si et seulement si  $W(1) \neq 0$ .

**Exercice ANA.9.14 | Système différentiel non linéaire** On considère le système différentiel  $(\mathcal{S})$  suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x' &= y^2, \\ y' &= \sin x, \end{cases}$$

où les inconnues sont deux fonctions dérivables  $x$  et  $y$ . On admet que  $\mathcal{S}$  est non vide.

**1. (Points d'équilibres)** Déterminer les solutions constantes de  $(\mathcal{S})$ . Ces solutions sont appelées *points d'équilibre du système*.

**2.** Soit  $V$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

**2.1)** Donner une condition sur  $\frac{\partial V}{\partial x}$  et  $\frac{\partial V}{\partial y}$  pour que la fonction

$$\phi : t \longrightarrow V(x(t), y(t))$$

soit constante pour toute solution  $(x, y)$  de  $(\mathcal{S})$ .

**2.2)** Vérifier que la fonction

$$V : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow \cos x + y^3/3$$

satisfait la condition précédente.

**3.** On admet qu'il existe une unique solution  $(x_0, y_0)$  de  $(\mathcal{S})$  vérifiant  $x_0(0) = 0$  et  $y_0(0) = -\sqrt[3]{6}$ .

**3.1)** Quelle relation existe-t-il entre  $x_0$  et  $y_0$  ?

**3.2)** Exprimer  $y_0$  en fonction de  $x_0$  puis tracer le graphe correspondant.

### 4.3. Modélisation discrète et continue

**Exercice ANA.9.15 |** Toutes les heures, on injecte à un sujet, une même dose de 1,8 unités, d'une substance médicamenteuse dans le sang. Les injections sont faites par piqûre intraveineuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. En l'espace d'une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%. La première injection se fait à  $t = 0$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $Q_n$  la quantité de substance présente dans le sang à l'instant  $t = n$  (en heures), dès que la nouvelle injection est faite.

**1.** Calculer pour  $n \in \mathbf{N}^*$  le terme  $Q_n$ . Donner une approximation au dixième près de la quantité de substance présente dans le sang à l'instant à  $t = 5$ .

**2.** Déterminer la limite de  $(Q_n)$ .



3. ➤ Proposer un programme prenant en argument  $\varepsilon > 0$  et permettant de connaître le plus petit entier  $n$  tel que  $|Q_n - 6| < \varepsilon$ .

**Solution (exercice ANA.9.15)**

1. Nous avons donc la récurrence suivante après lecture de l'énoncé : pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ ,  $Q_{n+1} = 1.8 + 0.7Q_n$ . Donc on constate que l'unique point fixe associé est 6, donc  $(Q_n - 6)$  est géométrique de raison 0.7. On obtient alors pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$  :

$$Q_n - 6 = (0.7)^n(Q_0 - 6) \iff Q_n = 6 + (0.7)^n(1.8 - 6).$$

2.  $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 6$  puisque  $|0.7| < 1$ .

3. On déduit le script Python ci-dessous :

```
def approx6(eps):
    n = 0
    Q = 1.8
    while abs(Q-6) >= eps:
        n += 1
        Q = 1.8 + 0.7*Q
    return n
```

Une exécution pour  $\varepsilon = 10^{-2}$  renvoie 17.

**Exercice ANA.9.16 | Cinétique chimique d'ordre 2** On considère une réaction chimique notée  $A \rightarrow B$ , on suppose que le réactif A disparaît avec un taux proportionnel (on note  $k \in \mathbf{R}$  le coefficient associé) à la concentration de réactif. Déterminer la concentration  $[A]$  en réactif en fonction du temps.

**Solution (exercice ANA.9.16)**

Le taux d'évolution est négatif, puisqu'il y a disparition comme l'indique l'énoncé, et

donc

$$\frac{[A]'(t)}{[A](t)} = -k \cdot [A](t).$$

On peut aussi reformuler sans utiliser la définition du taux, en faisant un bilan de concentration entre  $t$  et  $t + h$ ,  $t, h \geq 0$  :

$$[A](t + h) = [A](t) - k([A](t) \cdot [A](t)),$$

donc en faisant  $h \rightarrow 0$ , on retrouve que  $[A]$  est solution de

$$y' = -ky^2.$$

Supposons que la concentration ne s'annule pas, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \int_0^t -\frac{[A]'(u)}{[A]^2(u)} du &= \int_0^t k du \\ \iff \left[ \frac{1}{[A](u)} \right]_0^t &= k[u]_0^t \iff \frac{1}{[A](t)} - \frac{1}{[A](0)} \\ &= kt \iff [A](t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{[A](0)}}. \end{aligned}$$

**Exercice ANA.9.17 | Modèle simplifié de croissance tumorale & contrôlabilité du système à zéro** Une première étape de la maladie du cancer consiste en une division frénétique et anarchique d'un certain nombre de cellules cancéreuses, qui forment un agrégat de cellules appelé tumeur. Durant cette phase, le nombre de cellules cancéreuses augmente entre deux temps avec un taux de reproduction égal à deux. Une modélisation simplifiée de ce processus en une équation différentielle vérifiée par le nombre  $y$  de cellules cancéreuses au temps  $t$ , la fonction  $y$  est solution de l'équation homogène

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = 1000 \end{cases} \quad f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ une fonction.} \quad (\text{Cancer})$$

Dans toute la suite, le nombre de cellules  $y$  est une variable du temps  $t$  que l'on exprime en jour.

- Proposer une fonction  $f$  en accord avec l'énoncé, puis résoudre l'équation différentielle.
- Trois biologistes en compétition souhaitent éradiquer la maladie au bout de 10 jours *via* une chimiothérapie, qui a pour effet de tuer un certain nombre de cellules cancéreuses au cours du temps. La nouvelle équation

$$\begin{cases} y' = f(y) + c, \\ y(0) = 1000, \end{cases} \quad c \text{ une fonction } \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}. \quad (\text{Chimio})$$

où  $c(t)$  désigne l'effet de la chimiothérapie à l'instant  $t$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

- Donner une formule explicite pour  $y$  solution de (Chimio).
- En déduire l'existence d'une fonction  $c$  répondant aux exigences des médecins.

**Exercice ANA.9.18 | Hauteur d'une baignoire** On considère une baignoire de forme parallélépipédique dont la base est de dimensions  $ab$  que l'on remplit avec un débit constant noté  $d$ . On note  $z(t)$  la hauteur d'eau dans la baignoire à l'instant  $t$  et  $V(t)$  son volume. On suppose que  $V(0) = 0$ . La baignoire a une fissure au fond qui laisse s'échapper plus ou moins d'eau en fonction de la pression exercée par l'eau sur celle-ci. On rappelle que la pression au fond de la baignoire est égale à  $p(z) = \rho g z$ . Le débit de la fuite est  $d_f = \alpha p$  avec  $\alpha > 0$  et  $p$  la pression qui s'y exerce. Toutes les grandeurs sont en unité SI.

- Si on suppose la baignoire suffisamment haute, montrer que le volume d'eau tend vers un volume à l'équilibre  $V_{eq}$  que l'on déterminera.
- Si la baignoire a un volume  $V$  (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), au bout de combien de temps sera-t-elle pleine?

**Exercice ANA.9.19 | Modèle de VERHULST continu** On dit qu'une fonction  $P$  suit un modèle de Verhulst de taux  $\beta, \mu, \kappa$  si  $P$  est dérivable en  $t$  et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu) \left( P(t) - \frac{P(t)^2}{\kappa} \right) \quad (t \geq 0), \quad P(0) = P_0. \quad (\text{Verhulst})$$

Dans la suite on note  $r = \beta - \mu$ . On cherche résoudre l'équation (Verhulst) pour  $P(0) = P_0 \in ]0, \kappa[$ .

- (Positivité)** On cherche déjà à prouver que pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(t) \in ]0, \kappa[$ . On suppose que  $P$  est une solution, et on note  $f(t) = rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right)$ .

- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^+$  puis justifier que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus.
- Montrer que  $f(0) \neq 0$  et en déduire que pour tout  $t \geq 0$ ,  $f(t) \neq 0$ .
- Montrer que pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(t) \in ]0, \kappa[$ .

**2. (Résolution)**

- Montrer qu'il existe deux constantes  $a, b \in \mathbf{R}^2$  telles que :  $\forall N \in \mathbf{R} \setminus \{0, \kappa\}, \frac{\kappa}{N(\kappa-N)} = \frac{a}{N} + \frac{b}{\kappa-N}$ .
- Résoudre (Verhulst).

**Solution (exercice ANA.9.19)**

- (Positivité)** On cherche déjà à prouver que pour tout  $t \geq 0$ ,  $P(t) \in ]0, \kappa[$ . On suppose que  $P$  est une solution, et on note  $f(t) = rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right)$ .

- la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^+$  en tant que somme et produit de fonctions dérivables. De plus, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(t) &= rP'(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) + rP(t) \left( -\frac{1}{\kappa} P'(t) \right) \\ &= r^2 P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right)^2 - \frac{r^2}{\kappa} P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) \\ &= rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) \left[ r \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) - \frac{r}{\kappa} \right] \\ &= f(t)g(t), \end{aligned}$$

où  $g(t) = r \left( 1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) - \frac{r}{\kappa}$  pour tout  $t \geq 0$ . Constatons que  $g$  est une fonction continue, donc  $f$  est solution de  $y' = g(t)y$ , une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus.

- On a

$$f(0) = rP_0 \left( 1 - \frac{P_0}{\kappa} \right) > 0$$

car  $\frac{P_0}{\kappa} \in ]0, 1[$  par hypothèse. Donc  $f(0) \neq 0$ , par ailleurs, d'après la question précédente, si on note  $G$  la primitive de  $g$  qui s'annule en zéro, alors

$$f(t) = f(0) \cdot e^{G(t)},$$

or  $e^{G(t)} \neq 0$  pour tout  $t$  donc  $f(t) \neq 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

- 1.3)** Notons  $Q = rX \left(1 - \frac{X}{\kappa}\right)$ , c'est un polynôme de degré deux, de graphe une parabole orientée vers le bas, et de racines  $0, \kappa$ .

$$f = Q \circ P.$$

On sait que  $P(0) \in ]0, \kappa[$ , donc la valeur initiale de  $P$  se situe strictement entre les racines de  $Q$  et  $f(0) > 0$  (le polynôme  $Q$  est positif entre ses racines). Si en un certain  $t$ ,  $P(t) \notin ]0, \kappa[$  alors  $f(t) < 0$ . Puisque  $f$  est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait  $t$  tel que  $f(t) = 0$  — contradiction. Donc  $\boxed{\text{pour tout } t \geq 0, P(t) \in ]0, \kappa[}$ .

**2. (Résolution)**

- 2.1)** Après calculs, on trouve :

$$\forall N \in \mathbf{R} \setminus \{0, \kappa\}, \quad \boxed{\frac{\kappa}{N(\kappa - N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{\kappa - N}}.$$

- 2.2)** On sait que  $f$  ne s'annule pas, donc on peut commencer par diviser de chaque côté l'équation différentielle par  $f$ . On résout alors :

$$\frac{P'(t)}{rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)} = \frac{P'(t)}{r} \cdot \frac{\kappa}{P(t)(\kappa - P(t))} = 1.$$

D'après la question précédente, elle est équivalente à

$$\frac{P'(t)}{r} \left( \frac{1}{P(t)} + \frac{1}{\kappa - P(t)} \right) = 1,$$

ou encore

$$\frac{1}{r} \left( \frac{P'(t)}{P(t)} - \frac{-P'(t)}{\kappa - P(t)} \right) = 1.$$

' En primitivant de chaque côté, on déduit l'existence d'une constante  $K \in \mathbf{R}$  satisfaisant

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{r} (\ln |P(t)| - \ln |\kappa - P(t)|) = t + K.$$

Par propriété du log, en passant à l'exponentielle, et en utilisant le fait que  $P(t) \in ]0, \kappa[$ , on obtient finalement

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P(t)}{\kappa - P(t)} = e^{r(t+K)} \iff \boxed{P(t) = \frac{\kappa e^{r(t+K)}}{1 + e^{r(t+K)}}}.$$

**Exercice ANA.9.20 | Modèle de GOMBERTZ continu** On dit qu'une fonction  $P$  suit un modèle de Gompertz de taux  $\beta, \mu, \kappa$  si  $P$  est dérivable en  $t$  et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu) \ln \left( \frac{\kappa}{P(t)} \right) P(t) \quad (t \geq 0), \quad P(0) = P_0 > 0.$$

On appelle  $\beta$  le taux de natalité,  $\mu$  le taux de mortalité, et  $\kappa$  la capacité du milieu. **On admet que  $P$  ne s'annule pas.**

Exprimer  $P(t)$  en fonction de  $t$ . *Indication : On pourra commencer par diviser par  $P$ .*