

Chapitre ANN.19.

Résumé des méthodes

1. EN ALGÈBRE

Méthode Unicité de l'écriture algébrique et identification

Une reformulation de l'unicité de l'écriture $z = x + iy$ est la suivante :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x', \quad y = y', \quad (x, y, x', y') \in \mathbf{R}^4.$$

On peut donc *identifier* partie réelle et partie imaginaire.

Méthode Expression conjuguée

Dans la preuve précédente on a utilisé une technique classique pour obtenir l'inverse d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On peut la résumer comme suit :

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Méthode Développement d'une norme de somme au carré

Soit $|z + z'|^2$ avec $z, z' \in \mathbf{C}$.

1. Écrire la quantité en fonction du conjugué : $|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')}$.

2. Développer.

Méthode Mettre sous forme exponentielle un nombre complexe

Soit $z \neq 0$.

- Calculer $|z|$, puis $\frac{z}{|z|}$.
- Chercher $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, *i.e.* tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

La forme exponentielle est alors : $z = |z|e^{i\theta}$. Il arrive parfois que l'angle θ

Méthode Technique de l'angle moitié (forme trigonométrique d'une somme d'exponentielles imaginaires)

Soient deux nombres complexes z, z' de module un donné sous forme trigonométrique : $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ avec $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi[$. Alors la forme trigonométrique de $z + z'$ s'obtient par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} z + z' &= e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) \\ &= 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right). \end{aligned}$$

 La méthode s'adapte à $z - z'$ en faisant apparaître un sinus. On obtient alors facilement module et argument :

$$|z + z'| = 2 \left| \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|, \quad \text{Arg}(z + z') \equiv \frac{\theta + \theta'}{2} \quad [2\pi].$$

 **Méthode** Calculs de racines n -ième de complexes

On cherche donc les solutions de $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ il n'y a que zéro comme solution).

1. Calculer la forme trigonométrique de $\alpha = \rho e^{i\theta}$.
2. Chercher z sous la forme $z = \rho' e^{i\theta'}$.
3. En remplaçant, on obtient comme conditions $(\rho')^n = \rho$ et $n\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Résoudre ces deux équations puis conclure.

Dans la pratique, la méthode sous-entend que l'on est capable de trouver une racine n -ième de α .

 **Méthode** Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée »

Soient $a, b, x \in \mathbf{R}$. On souhaite transformer l'expression $E(x) = a \cos x + b \sin x$ en $\rho \cos(x + \varphi)$, avec $\rho \in \mathbf{R}^+, \varphi \in \mathbf{R}$.

1. Mettre $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ en facteur, de sorte que

$$E(x) = \rho \left(\frac{a}{\rho} \cos x + \frac{b}{\rho} \sin x \right).$$

2. Comme $\left(\frac{a}{\rho}, -\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle unité, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(-\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

3. Alors $E(x) = \cos x \cos \varphi - \sin x \sin \varphi = \cos(x + \varphi)$. Une méthode analogue existe si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho \sin(x + \varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

 **Méthode** Linéarisation & Antilinéarisation avec des complexes

1. (Pour linéariser $\cos^k \theta, \sin^k \theta$) écrire

$$\cos^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k, \quad \sin^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^k,$$

puis développer avec le binôme, regrouper les termes avec leur conjugué, utiliser les formules d'EULER.

2. (Pour antilinéariser $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$) écrire

$$\begin{aligned} \cos(k\theta) &= \text{Re} \left(e^{i k \theta} \right) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \text{Re} \left(\left(e^{i\theta} \right)^k \right) = \text{Re} \left((\cos \theta + i \sin \theta)^k \right), \\ \sin(k\theta) &= \text{Im} \left(e^{i k \theta} \right) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \text{Im} \left(\left(e^{i\theta} \right)^k \right) = \text{Im} \left((\cos \theta + i \sin \theta)^k \right), \end{aligned}$$

puis développer avec le binôme et calculer les parties réelles et imaginaires.

 **Méthode** Calculs de sommes trigonométriques

1. Écrire \cos, \sin comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\text{Re}(\dots), \text{Im}(\dots)$, i.e. : $\text{Re}(\sum \dots) = \sum \text{Re}(\dots), \text{Im}(\sum \dots) = \sum \text{Im}(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

 **Méthode** Montrer qu'un polynôme est nul

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

1. montrer que tous ses coefficients sont nuls,
2. montrer qu'il admet plus de racines que son degré (en particulier s'il en admet une infinité).

Le plus souvent, on utilise 2 pour en déduire la nullité de tous les coefficients.

Méthode Montrer que deux polynômes sont égaux

Pour montrer que deux polynômes sont égaux, on peut au choix :

1. montrer que leurs coefficients sont identiques,
2. montrer que la différence admet plus de racines que son degré (en particulier si elle en admet une infinité).

Méthode Factorisation d'un polynôme

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Pour transformer P en un produit de polynômes de degré 1 ou 2, on :

1. cherche une racine $\lambda \in \mathbf{K}$.
2. On écrit P sous la forme $(X - \lambda) \times Q = P$ avec $Q \in \mathbf{K}[X]$.
3. On recommence le processus avec Q .

En résumé : cela revient à chercher les racines de P .

Méthode Lien entre la factorisation sur \mathbf{C} et \mathbf{R}

Pour décomposer un polynôme en produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, on peut déjà le décomposer dans $\mathbf{C}[X]$ (en cherchant ses racines), puis on regroupe les racines complexes conjuguées entre elles.

Méthode Système à somme et produit fixés

Ainsi, pour résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s, \\ x_1 x_2 = p \end{cases}$$

en $(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2$, il suffit de chercher les racines de $X^2 - sX + p$ à l'aide du discriminant.

Méthode Montrer l'appartenance « à un Vect »

Pour montrer que $x \in \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires, tels que : $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. En particulier, si $E = \mathbf{K}^n$, on tombe sur la résolution d'un système

linéaire.

Méthode Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel, on peut montrer qu'il n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. En

- ▶ vérifiant qu'il ne contient pas le neutre dudit ensemble de référence.
- ▶ Ou, on montre qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire.

Méthode Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Deux options sont possibles.

1. Justifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (\mathbf{K}^n , de polynômes, de fonctions, de suites ...) **ou**
2. Montrer que l'ensemble s'écrit comme Vect d'une famille.

Méthode Lien entre paramétrisation & équations cartésiennes

- ▶ **Paramétrisation** → **Équations implicites / cartésiennes** : Résolution d'un système en les paramètres de la forme paramétrique (généralement notés λ, μ, ν, \dots). Le système présentera alors une condition de compatibilité qui sera l'équation cartésienne cherchée.
- ▶ **Équations implicites / cartésiennes** → **Paramétrisation** : Résolution du système linéaire en les inconnues (généralement notées x, y, z, \dots), l'ensemble des solutions correspond alors à la forme paramétrique cherchée.

Méthode Montrer la liberté/liaison d'une famille

1. Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre, on écrit : « Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbf{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$. Alors [...] donc les λ_k sont tous nuls. » En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :
 - ▶ Dans $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{K}_n[X]$: on arrive à la résolution d'un système linéaire.
 - ▶ Dans $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^N$ on fait de l'analyse (limites, dérivation, etc.).
2. Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est liée, on écrit :

« [...] Posons alors $\lambda_1 = \dots, \dots, \lambda_n = \dots$: on a alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$, mais les λ_k ne sont pas tous nuls. »

Méthode Montrer qu'une famille est génératrice

Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ ¹ de vecteurs de F est une famille génératrice de F, on écrit :

« Soit $x \in F$. Alors cherchons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$. [...] On a donc déterminé des λ_i qui conviennent, la famille est génératrice. »

En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :

- ▶ Dans \mathbf{R}^n ou \mathbf{C}^n : on résout un système linéaire.
- ▶ Dans $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^N$ on fait de l'analyse (limites, dérivation, etc.).

Méthode Montrer qu'une application n'est pas linéaire

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, on peut :

- ▶ vérifier si l'égalité $u(0_E) = 0_F$ est vérifiée.
- ▶ Si c'est le cas, on cherche s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $x, y \in E$ tels que : $u(\lambda.x + \mu.y) \neq \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.

Méthode Image d'une application si une famille génératrice de l'espace de départ est connue

1. On commence par chercher une famille génératrice \mathcal{G} de l'ensemble de départ E.
2. On calcule les images de chacun des vecteurs de \mathcal{G} .
3. Si l'on souhaite une base, on cherche à extraire une sous-famille libre.

Méthode Construction d'applications linéaires à l'aide d'une base

À la question « construisez une application linéaire entre E et F », si vous connais-

sez une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, vous pouvez répondre :
je pose $u(e_1) = \text{Truc}_1 \in F, \dots$, je pose $u(e_n) = \text{Truc}_n$,
en découlera alors automatiquement $u(x)$ pour tout $x \in E$ par linéarité.

Méthode Binôme et calculs des puissances

Si on arrive à écrire une matrice comme somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice nilpotente N (i.e. telle que $N^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbf{N}$), qui **commutent**, on utilise la formule du binôme matricielle :

$$(D + N)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$

Méthode Inverse matriciel à l'aide d'un polynôme annulateur

Supposons qu'il existe $a_0, \dots, a_p \in \mathbf{K}$ tel que $a_0 \neq 0$, et soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ une matrice carrée vérifiant

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p = 0_n. \quad (1)$$

On dit que $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ est *annulateur de A*. Alors (1) est équivalente à

$$a_1 A + \dots + a_p A^p = -a_0 I_n,$$

puis étant donné que a_0 est non nul,

$$A \left(-\frac{a_1}{a_0} I_n + \dots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1} \right) = I_n.$$

La matrice A est alors inversible d'inverse $-\frac{a_1}{a_0} I_n + \dots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}$.

¹adapter la méthode pour une famille quelconque $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$

Méthode Passer d'une forme échelonnée en ligne à une forme échelonnée réduite en ligne

On élimine de droite à gauche, colonne par colonne, tous les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de transvections, donc d'opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ avec $j > i$ et $\mu \in \mathbf{R}$.

Méthode du miroir

Supposons que l'on arrive, après avoir effectué certaines opérations élémentaires sur les lignes de A (i.e. après avoir multiplié par $E = \dots E_3 E_2 E_1$, un produit de matrices d'opérations élémentaires, à gauche la matrice A), à transformer A en I_n . Alors on obtient l'égalité matricielle :

$$\frac{EA}{I_n} = \frac{EI_n A}{A^{-1}}, \quad \text{qui fournit ainsi l'inverse de A,}$$

la matrice inverse sera alors $EI_n = E$.

Méthode Opérations pour la recherche d'éléments propres

▶ Si le coefficient (3, 1) n'est pas nul :

1. l'opération optimale à effectuer en premier pour des matrices de taille 3×3 est la permutation $L_1 \longleftrightarrow L_3$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position (1, 1). On élimine alors avec celui-ci les coefficients (2, 1), (3, 1).
2. Ensuite, en position (2, 2), nous avons un coefficient affine en λ et que l'on souhaite utiliser en nouveau pivot afin d'éliminer le coefficient (3, 2). Pour éliminer λ en (2, 2), on peut faire une opération simple en fonction de L_3 .
3. Un pivot indépendant de λ est alors obtenu en (2, 2), on peut alors éliminer le coefficient (3, 2).

▶ Si le coefficient (3, 1) est nul :

1. on fait la permutation $L_1 \longleftrightarrow L_2$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position (1, 1). On élimine alors avec celui-ci le co-

efficient (3, 1).

2. En positions (2, 2), nous avons un coefficient indépendant de λ qui sert à éliminer le coefficient (3, 2).

Méthode Montrer qu'une famille est une base à l'aide de matrice

Soit \mathcal{B} une base de E un espace vectoriel, et \mathcal{F} une famille telle que $\#\mathcal{B} = \#\mathcal{F}$.

- ▶ Calculer $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- ▶ Montrer que M est inversible.

Méthode Calculer une matrice

Pour déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$, il faut donc :

1. calculer les vecteurs de $u(\mathcal{B})$, i.e. les $u(e_j)$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, calculer les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base image \mathcal{C} , i.e. chercher les $\lambda_{i,j}$ tels que :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} f_i,$$

où (f_1, \dots, f_n) est une base de \mathcal{F} . Ces coordonnées existent bien, et sont uniques, puisque \mathcal{F} est une base de F.

3. Conclure : la j -ème colonne de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ sera donc : $\begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$.

Méthode Montrer que deux matrices sont semblables

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Alors pour montrer $A \sim B$:

- ▶ (Si $n = 2$) on cherche P sous la forme $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ de sorte que $A \cdot P = P \cdot B$. On peut utiliser aussi la méthode ci-après.
- ▶ (Si $n = 3$) une seule méthode est à privilégier : celle du changement de

²Afin de ne pas ajouter des termes non nuls dans les colonnes à gauche du pivot de la ligne i



base. Notons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

L'idée est de chercher $P = \left(e_1 \mid \cdots \mid e_n \right)$ inversible, de sorte que

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \overset{A \cdot e_1}{b_{1,1}} & \cdots & \overset{A \cdot e_n}{b_{1,n}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

D'après la formule de changement de base³, les $e_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ doivent vérifier :

$$Ae_i = b_{1,i}e_1 + \cdots + b_{n,i}e_n, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Cette condition est simplement un ensemble de systèmes linéaires à résoudre. Dans la pratique, ces calculs seront rapides à mener puisque la matrice B aura très souvent que quelques coefficients non nuls.



Méthode Opérations pour la recherche d'éléments propres

- ▶ Si le coefficient (3, 1) n'est pas nul :
 1. l'opération optimale à effectuer en premier pour des matrices de taille 3×3 est la permutation $L_1 \longleftrightarrow L_3$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position (1, 1). On élimine alors avec celui-ci les coefficients (2, 1), (3, 1).
 2. Ensuite, en position (2, 2), nous avons un coefficient affine en λ et que l'on souhaite utiliser en nouveau pivot afin d'éliminer le coefficient (3, 2). Pour éliminer λ en (2, 2), on peut faire une opération simple en fonction

³appliquée à $f : X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow AX$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, P correspondant alors à $P^{\mathcal{B} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{B}}$



de L_3 .

3. Un pivot indépendant de λ est alors obtenu en (2, 2), on peut alors éliminer le coefficient (3, 2).
- ▶ Si le coefficient (3, 1) est nul :
 1. on fait la permutation $L_1 \longleftrightarrow L_2$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position (1, 1). On élimine alors avec celui-ci le coefficient (3, 1).
 2. En positions (2, 2), nous avons un coefficient indépendant de λ qui sert à éliminer le coefficient (3, 2).



Méthode Éléments propres en dimension 2 l'aide du déterminant

Soit $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{K})$. Alors :

$$\lambda \in \text{Spec}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Ainsi,

1. il suffit de résoudre en λ l'équation du second degré $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
2. On calcule ensuite $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_2)$ pour chaque solution trouvée précédemment.



Méthode Éléments propres en dimension 2 à l'aide du pivot de Gauß

- ▶ Si le coefficient (2, 1) est nul : la matrice $A - \lambda I_2$ est triangulaire, donc c'est terminé.
- ▶ Sinon, on fait la permutation $L_1 \longleftrightarrow L_2$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position (1, 1). On élimine alors avec celui-ci le coefficient (2, 1). La matrice $A - \lambda I_2$ est alors elle aussi échelonnée.



Méthode Calcul d'éléments propres d'une avec la définition

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{K})$. Alors pour trouver les éléments propres de A, on peut, si elle possède beaucoup de zéros :

- ▶ considérer le système $AX = \lambda X$,
- ▶ le résoudre en les $(\lambda, X) \in \mathbf{K} \times \left(\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \{0_{\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\} \right)$.



► Conclure.



Méthode Valeur propre et somme sur chaque ligne constante

Lorsque la somme des coefficients sur les lignes d'une matrice est constante égale à $\lambda \in \mathbf{K}$,

le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre associée λ .

Méthode Diagonalisabilité des matrices possédant une unique valeur propre — Important



- Si une matrice⁴ A possède une unique valeur propre λ , alors $A = PDP^{-1}$, où $D = \lambda I$. On en déduit que $A = \lambda I$.
- **(Conséquence)** Si A est une matrice possédant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$ et n'est pas égale à λI_n , alors elle **n'est pas** diagonalisable.



Méthode Comment trouver les puissances d'une matrice diagonalisable ?

1. Diagonaliser la matrice A . On obtient $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.
2. Chercher D^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. $A^n = PD^nP^{-1}$, que l'on montre généralement par récurrence, on en déduit A^n .



Méthode Développement d'une norme de somme au carré

Soit $\|x + y\|^2$ avec $x, y \in E$.

1. Écrire la quantité en fonction du produit scalaire : $\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle$.
2. Développer en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

⁴Le principe est naturellement le même pour un endomorphisme, en passant par une matrice associée qui aura elle aussi une unique valeur propre.



Méthode Majorer des sommes avec CAUCHY-SCHWARZ

Interpréter une somme comme un produit scalaire. On retiendra l'exemple très classique suivant : si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| = |\langle (1, \dots, 1) | (x_1, \dots, x_n) \rangle| \leq \sqrt{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$



Méthode Orthonormalisation d'une famille de deux vecteurs

Lors (e_1, e_2) est une base quelconque (non forcément orthonormée) de F , une version orthonormée est obtenue en posant :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|}, \\ f_2 &= \frac{e_2 - p_{\text{Vect}(e_1)}(e_2)}{\|e_2 - p_{\text{Vect}(e_1)}(e_2)\|} \\ &= \frac{e_2 - \frac{1}{\|e_1\|^2} \langle x | e_1 \rangle e_1}{\left\| e_2 - \frac{1}{\|e_1\|^2} \langle x | e_1 \rangle e_1 \right\|}. \end{aligned}$$

Le vecteur $e_2 - p_{\text{Vect}(e_1)}(e_2)$ est une version « redressée » du vecteur e_2 , orthogonale à e_1 (ou f_1).



Méthode Calcul d'une projection orthogonale

Deux méthodes pour calculer un projeté orthogonal sur F :

1. **(En utilisant la définition)** Si on ne connaît pas une base orthonormale de F , mais une famille génératrice (e_1, \dots, e_q) de F : soit $x \in E$, alors on cherche l'unique vecteur $p_F(x)$ vérifiant

$$p_F(x) \in F, \quad x - p_F(x) \in F^\perp.$$

On caractérise $x' = p_F(x)$ de la manière suivante :

$$x' = p_F(x) \iff x' \in F, \quad \text{et} \quad \langle x - x' | e_i \rangle = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket.$$

 **2. (En utilisant la formule dans une base orthonormale)** Si une base **orthonormale** (e_1, \dots, e_q) de F est connue, alors :

$$\forall u \in E, \quad p_F(u) = \sum_{i=1}^q \langle u | e_i \rangle e_i.$$

Lorsque F est de dimension 1 ou 2, on peut se ramener facilement à une base orthonormée et donc utiliser **2**, en dimension 3 ou plus : si aucune base orthonormée n'est donnée, on utilisera **1**.

2. EN ANALYSE

 **Méthode Nier l'existence d'une limite : fonctions d'une variable**

Exhiber deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I tendant vers a , mais telles que :

$$((f(u_n))_n \text{ et } (f(v_n))_n \text{ ne convergent pas vers la même limite.}$$

 **Méthode Continuité et permutation de limites**

Il faut surtout retenir la caractérisation séquentielle de la manière suivante : si f est continue, et avec les mêmes notations que *supra*,

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\dots)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\dots).$$

 **Méthode Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires**

On souhaite justifier l'existence et l'unicité éventuelle d'une solution $x \in \mathbf{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un in-

 tervalle I tel que $\alpha \in f(I)$.

Notez également que l'équation $f(x) = \alpha$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec $g = f - \text{Id}$ et $\alpha = 0$.

 **Méthode Translation x_0 dans un développement limité**

Si $x_0 \neq 0$, alors la recherche d'un $\text{DL}_n(x_0)$ pour une fonction f se fera en se ramenant au voisinage de 0 par le changement de variable « $h = x - x_0$ ». Plus précisément,

1. considérer $g : h \mapsto f(x_0 + h)$,
2. faire un $\text{DL}_n(0)$ de g : on obtient une expression du type $g(h) = R_n(h) + o(h^n)$ (avec R_n fonction polynomiale de degré n définie au voisinage de zéro),
3. un $\text{DL}_n(x_0)$ de f est alors : $f(x) =_{x \rightarrow x_0} R_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$.

 **Méthode Prolongement**

Pour montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité et/ou dérivable en un point x_0 , il suffit de faire un développement limité d'ordre 0/1 au voisinage de ce point.

 **Méthode Recherche d'équivalent/Signe local d'une fonction**

On lit :

1. un équivalent de fonction au voisinage de x_0 en regardant le **premier terme non nul** du $\text{DL}_n(x_0)$ pour un certain entier n assez grand (de sorte que le développement limité ne soit pas nul).
2. le signe de f au voisinage de x_0 grâce à celui de $a_0(x - x_0)^p$. Cela dépend donc de la parité de p notamment.

 **Méthode Nier l'existence d'une limite pour les fonctions de plusieurs variables**

Si $f : P \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ et $A \in P$. Alors si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en A , pour toute fonction $\varphi : Q \subset \mathbf{R}^n \rightarrow P$ (avec $A \in \overline{Q}$) telle que $\lim_B \varphi = A$ pour $B \in \overline{Q}$, on a :

$$\lim_{X \rightarrow B} f \circ \varphi(X) = \ell.$$

 Ainsi, si l'on trouve deux telles fonctions $\varphi_1 : Q_1 \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow P$ (associée à un point $B_1 \in \overline{Q_1}$) et $\varphi_2 : Q_2 \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow P$ (associée à un point $B_2 \in \overline{Q_2}$), vérifiant :

$$\lim_{X \rightarrow B_1} f \circ \varphi_1(X) \neq \lim_{X \rightarrow B_2} f \circ \varphi_2(X),$$

la fonction n'admet donc pas de limite en A. On dit que l'on a trouvé des « chemins le long desquels la fonction ne converge pas vers la même limite ».

Méthode Trouver la monotonie d'une suite

1. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier n .
2. Pour les suites qui ne s'annulent pas, on peut également comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. Cette seconde version est bien adaptée aux produits.

Méthode Exprimer les solutions d'un système de suites récurrentes linéaires – Cas diagonalisable

On considère trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R}) \text{ supposée diagonalisable.}$$

Alors pour exprimer les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ en fonction de n , on :

1. diagonalise A, i.e. on cherche P inversible, D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$,
2. on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, et $Y_n = P^{-1}X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On montre que $Y_{n+1} = DY_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. On peut alors exprimer Y_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.
4. Puis on conclut à l'aide de P : $X_n = PY_n$.

Méthode Plan d'étude d'une suite implicite

1. Établir l'existence et l'unicité de la suite grâce au théorème de la bijection.
2. Chercher la monotonie en comparant $f_n(x_{n+1})$ à $f_n(x_n) = 0$ (ou $f_{n+1}(x_n)$ à $f_n(x_n) = 0$).
3. Trouver la valeur de la limite : en général on raisonne par l'absurde dans l'identité $f_n(x_n) = 0$.

Méthode Principe de superposition

Lorsque le second membre b de (E_n) s'écrit comme une somme fonctions, par exemple $b = \lambda b_1 + \mu b_2$ avec b_i continue pour tout $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, on peut appliquer le *principe de superposition*. Il s'agit de considérer les deux équations différentielles linéaires :

$$y^{(n)} + a_{n-1}^1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1^1(t)y' + a_0^1(t)y = b_1(t) \quad (E_n^1)$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}^2(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1^2(t)y' + a_0^2(t)y = b_2(t) \quad (E_n^2)$$

Si l'on a :

- ▶ déterminé une solution particulière y_1^{par} de (E_n^1) ,
- ▶ et une solution particulière y_2^{par} de (E_n^2) .

La somme $\lambda y_1^{\text{par}} + \mu y_2^{\text{par}}$ est alors une solution particulière de (E_n) . Le principe reste naturellement vrai si l'on considère une somme de n fonctions dans le second membre.

Méthode Variation de la constante

Chercher y^{par} sous la forme $t \in I \longrightarrow C(t)e^{-A(t)}$, où la fonction $C : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable et est à déterminer.

Méthode Résolution par changement de fonction inconnue

Soit (E) une équation différentielle en une fonction y que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction z dépendant de y donnée par l'exercice (généralement « de la forme $z(t) = y \circ \varphi(t)$ »).
2. Calculer les dérivées successives z, z', z'', \dots (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en y).
3. Évaluer (E) en $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
4. Combiner 2) et 3) pour trouver une équation différentielle en z .

Méthode d'EULER

1. On commence par subdiviser l'intervalle $[0, \tau]$ de manière uniforme à l'aide de $N + 1$ points espacés d'un pas de $h = \frac{\tau}{N}$. Plus précisément, on pose :

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad \dots, \quad t_k = kh, \quad \dots, \quad t_N = \tau.$$

2. **(Heuristique)** On considère que pour h petit :

Si y est une solution, alors $y'(t) = f(t, y(t)) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$.

Donc que pour toute solution y :

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)) \tag{2.1}$$

3. On définit donc une suite de points y_i satisfaisant le plus possible l'approximation précédente, en posant :

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k, y_k).$$

Méthode Résolution d'un système différentiel

Notons $Y'(t) = AY(t)$ le système avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ un vecteur de fonctions

dérivables, et $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbf{K})$ une matrice diagonalisable à coefficients constants. Pour résoudre le système, on commence par

1. diagonaliser la matrice A . On obtient $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.
2. Considérer la nouvelle fonction inconnue $Z = P^{-1}Y$.
3. Établir un système en Z : puisque P est une matrice constante, on a $Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}PDP^{-1}Y \implies Z' = DZ$.
4. Résoudre $Z' = DZ$, c'est un système d'équations différentielles indépendantes.
5. On déduit $Y = PZ$.

Méthode Série quasi-télescopique

Lorsque le terme général d'une série est de la forme $u_{n+p} - u_n$, avec $p \in \mathbf{N}$ fixé, alors on se ramène à une série télescopique en écrivant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+p} - u_n = (u_{n+p} - u_{n+p-1}) + \dots + (u_{n+1} - u_n).$$

Chacune des séries intervenant est alors télescopique.

Méthode Calcul d'une somme de série polynôme fois géométrique

Une série du type $\left(\sum_{n \geq 0} n^k q^n\right)$, avec $|q| < 1, k \geq 0$, peut s'exprimer en fonction de séries géométriques et géométriques dérivées. En effet,

- ▶ pour $k = 1$, on écrit

$$n^1 q^n = q(nq^{n-1}).$$

- ▶ Pour $k = 2$, on écrit

$$n^2 q^n = q^2(n(n-1)q^{n-2}) + q(nq^{n-1}).$$

Méthode Calcul d'une somme de série polynôme fois exponentielle

Une série du type $\left(\sum_{n \geq 0} \frac{n^k}{n!}\right)$, avec $k \in \mathbf{N}$, peut s'exprimer en fonction de séries exponentielles après changement d'indice. En effet,

- ▶ pour $k = 1$, on écrit pour $n \geq 1$

$$\frac{n^1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

- ▶ Pour $k = 2$, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{n!} &= \frac{n}{(n-1)!} \quad \text{si } n \geq 1, \\ &= \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{n^2}{n!}} \right\} \text{ si } n \geq 2$$

Méthode Convergence des séries exponentielles convergeant vers zéro

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Alors :

1. $n^2 e^{-u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par croissances comparées,
2. donc pour n assez grand, $n^2 e^{-u_n} \leq 1 \implies 0 \leq e^{-u_n} \leq \frac{1}{n^2}$.
3. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, le théorème de comparaison donne la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-u_n}$.

Méthode Justifier l'existence d'une primitive

Il suffit de montrer la continuité de la fonction.

Méthode Justifier que l'intégrale d'une fonction définie sur un segment existe

Montrer que la fonction est :

- ▶ continue sur le segment,
- ▶ ou que l'on peut la prolonger en une fonction continue,
- ▶ ou encore qu'elle est continue par morceaux.

Méthode Primitiver une fonction en utilisant une intégrale

Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, choisir $a \in I$, puis calculer $\int_a^x f$ pour tout $x \in I$.

Méthode Calcul d'une intégrale à bornes variables

Soient I un intervalle, a un point de I et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Soient par ailleurs $u, v : J \rightarrow I$ deux fonctions définies sur J où J est un intervalle réel.

Pour étudier la dérivabilité de $x \in J \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f$, on :

1. introduit une primitive de f , notée F .
2. Alors : $\int_{u(x)}^{v(x)} f = F \circ v(x) - F \circ u(x)$.
3. Justifier la dérivabilité et dériver à l'aide la formule de dérivation d'une composée.
4. On obtient *in fine* $\frac{d}{dx} \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f \right) = f \circ v(x) v'(x) - f \circ u(x) u'(x)$ — cette formule ne doit pas être apprise par coeur, il faut savoir la retrouver en dérivant une composée.

Un point important est que le résultat ne dépend pas de F ; inutile donc de chercher à calculer F explicitement.

Méthode Quand utiliser l'intégration par parties ?

Pour intégrer un *produit* de deux fonctions, dont l'une est facile à *primitiver* et l'autre est facile à *dériver*. Exemple : une exponentielle multipliée par un polynôme.

Méthode Mise en place d'un changement de variable

En pratique, on écrit les calculs formels ci-après au brouillon⁵ :

$$\begin{cases} u = \varphi(t) \\ du = \varphi'(t) dt \\ x = \varphi(\alpha) \iff t = \alpha \\ x = \varphi(\beta) \iff t = \beta \end{cases}$$

en **justifiant que φ est de classe \mathcal{C}^1** ⁶. Ce n'est qu'après que l'on pourra écrire l'égalité :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Méthode Essayer de se ramener à une notation sous forme de fonction puissance

Beaucoup d'expression peuvent se mettre sous la forme « $(x - a)^\alpha$ » : la formule de primitivation de cette expression est donc centrale.

Méthode Primitives de fractions rationnelles

On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

- si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)}$, puis on écrit la fraction comme somme de deux autres qui se primitivent avec un logarithme.
- Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^2}$,
- si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on effectue un changement de variable pour se ramener à $u \mapsto \frac{1}{u^2 + 1}$.

⁵Ils n'ont pas vocation à servir de preuve de la formule de changement de variable

⁶Le changement de variable vous sera donné dans la pratique

Méthode Calcul d'une primitive avec des fonctions trigonométriques

- Commencer par linéariser l'expression, à l'aide de nombres complexes si besoin.
- Primitiver avec les formules usuelles.

Méthode intégration par parties pour les intégrales généralisées

- Revenir à une intégrale partielle.
- Utiliser la formule déjà connue sur le segment.
- Chercher à passer à la limite.

Méthode Convergence d'intégrale à intégrande exponentielle décroissante

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. Alors :

- $t^2 e^{-f(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ par croissances comparées,
- donc pour t assez grand, $t^2 e^{-f(t)} \leq 1 \implies 0 \leq e^{-f(t)} \leq \frac{1}{t^2}$.
- Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ converge, le théorème de comparaison donne la convergence de $\int_1^\infty e^{-f(t)}$.⁷

Méthode Plan d'étude d'une intégrale

Soit f continue ou continue sauf en un nombre fini de points sur $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Il s'agit de se poser les questions dans l'ordre suivant afin d'analyser l'existence de l'intégrale.

- Suis-je capable de calculer l'intégrale $\int_a^A f$ (ou $\int_A^a f$ en fonction du cas), ou les deux dans le cas de $]a, b[$ explicitement pour A dans l'intervalle d'intégration ? Si oui, on la calcule et on analyse l'existence d'une limite en A .
- Sinon, et ce sera l'immense majorité des cas, on se demande si :
 - elle est positive, dans ce cas on essaie de la majorer ou minorer par une fonction simple dont on connaît la nature de l'intégrale. On utilise éventuellement des développements limités et relations de comparai-

⁷Attention à bien démarrer l'intégrale à une borne strictement différente de zéro, 1 par exemple.



sons pour cela.
 ▶ elle n'est pas positive, on étudie la convergence absolue.



$X = k$	k_1	k_2	...
$\mathbf{P}(X = k)$	$\mathbf{P}(X = k_1)$	$\mathbf{P}(X = k_2)$...

3. EN ALÉATOIRE



Méthode Quand utiliser la formule des probabilités totales

Pour calculer la probabilité d'un évènement pour lequel on a besoin de faire une disjonction de cas. Exemple typique : deux urnes dont le tirage se fait dans l'une ou l'autre en fonction du résultat du tirage précédent, on utilise alors le résultat du tirage précédent comme système complet d'évènements puis on applique la formule des probabilités totales.



Méthode Quand utiliser la formule des probabilités composées

Pour calculer la probabilité d'un évènement qui est une intersection d'évènements non indépendants.⁸ Exemple typique : une urne dont on change les proportions de boules de chaque type étape par étape, piocher pour la première fois une boule d'un type au rang n revient à piocher que des boules des autres types jusqu'au rang $n - 1$ puis une boule du bon type au rang n .



Méthode Répondre à la question « déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X »

- Commencer par déterminer son support $X(\Omega)$ s'il n'est pas déjà donné *i.e.* l'ensemble de départ de \mathbf{P}_X .
- Calculer les $\mathbf{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Si $X(\Omega)$ est fini, il n'y a donc qu'un nombre fini de probabilités à déterminer, on peut alors les représenter sous forme d'un tableau comme ceci :

⁸sinon c'est plus facile, on utilise l'indépendance.

Méthode Trouver la loi d'un min ou max de variables aléatoires discrètes indépendantes



Pour le max $X = \max(X_1, \dots, X_n)$, si X_1, \dots, X_n sont par exemple à valeurs dans \mathbf{N} .

- On calcule la fonction de répartition : $\mathbf{P}(X \leq k) = \mathbf{P}(X_1 \leq k) \dots \mathbf{P}(X_n \leq k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
- On calcule ensuite $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X \leq k)$ et $\mathbf{P}(X \leq k - 1)$, *i.e.* $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \leq k) - \mathbf{P}(X \leq k - 1)$ pour tout entier k .

Pour $X = \min(X_1, \dots, X_n)$, remplacer dans **1**) \leq par \geq , puis en déduire la fonction de répartition. Étape **2**) inchangée, mais utiliser la relation $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \geq k) - \mathbf{P}(X \geq k + 1)$.



Méthode Étudier l'existence d'une variance dans le cas discret

Cela revient à étudier la convergence de :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^2 \mathbf{P}(X = x).$$



Méthode Pour montrer qu'une variable aléatoire est à densité

Deux méthodes sont possibles :

- on revient à la définition en devinant une densité,
- ou⁹ on montre que la fonction de répartition F_X est continue et de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini points. Une densité est alors obtenue en dérivant F_X là où elle est dérivable. On met en général la valeur zéro¹⁰ pour une densité là où F_X n'est pas dérivable.

⁹C'est cette méthode que nous utiliserons le plus souvent

¹⁰valeur arbitraire

Méthode Obtenir des renseignements sur $X(\Omega)$ lorsque X est à densité

- Au choix :
- ▶ on peut déduire des informations si X est une fonction de variable aléatoire (par exemple un carré, une valeur absolue, une racine carrée, etc.)
 - ▶ on regarde une densité puis on analyse les points où elle est non nulle.
 - ▶ On regarde là où la fonction de répartition est différente de zéro et un.

Méthode Montrer que l'image d'une variable aléatoire réelle à densité est à densité

- Soit X une variable à densité et $Y = g(X)$ avec g une fonction au moins définie sur $X(\Omega)$ (valeur absolue, logarithme, etc.).
1. Deviner un ensemble contenant $Y(\Omega)$ au moyen de l'image de la fonction g .
 2. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y .
 3. Calculer la fonction de répartition de Y i.e. $\mathbf{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ et vérifier le **Théorème ALEA.14.1**. Pour effectuer ledit calcul, faire des disjonctions de cas en y en utilisant l'ensemble trouvé en 1.

Méthode Trouver la loi d'un max de variables aléatoires à densité indépendantes

- Pour le max $X = \max(X_1, \dots, X_n)$.
1. on calcule la fonction de répartition : $\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X_1 \leq x) \dots \mathbf{P}(X_n \leq x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
 2. On utilise ensuite l'expression de la fonction de répartition à l'aide de la densité donnée.
 3. On vérifie le **Théorème ALEA.14.1** i.e. que $x \mapsto \mathbf{P}(X \leq x)$ est bien continue et de classe \mathcal{C}^1 sauf en un nombre fini de points. On déduit alors également une densité.

Méthode Trouver la loi d'un min de variables aléatoires à densité indépendantes

- Pour le min $X = \min(X_1, \dots, X_n)$.
1. on calcule la fonction d'antirépartition : $\mathbf{P}(X > x) = \mathbf{P}(X_1 > x) \dots \mathbf{P}(X_n > x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
 2. On utilise ensuite l'expression de la fonction de répartition à l'aide de la densité donnée.

3. On vérifie le **Théorème ALEA.14.1** i.e. que $x \mapsto 1 - \mathbf{P}(X > x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ est bien continue et de classe \mathcal{C}^1 sauf en un nombre fini de points. On déduit alors également une densité.

Méthode Étudier l'existence d'une variance dans le cas à densité

On étudie l'existence d'un moment d'ordre deux, i.e. la convergence de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 f_X(t) dt.$$

Méthode Lecture d'une table

Si l'on souhaite avoir, par exemple, $\Phi(0,96)$, on :

1. se place sur la ligne «0.9»,
2. se place ensuite sur la colonne «0.06».
3. On obtient alors la valeur désirée.

Méthode Répondre à la question «déterminer la loi conjointe du vecteur aléatoire X, Y »

1. Commencer par déterminer son support $(X, Y)(\Omega)$ s'il n'est pas déjà donné.
2. Calculer les $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Si $X(\Omega), Y(\Omega)$ sont finis, il n'y a donc qu'un nombre fini de probabilités à déterminer, on peut les présenter sous forme d'un tableau comme ceci :

$Y = \ell \mid X = k$	k_1	k_2	...
ℓ_1	$\mathbf{P}(Y = \ell_1, X = k_1)$	$\mathbf{P}(Y = \ell_1, X = k_2)$...
\vdots			\vdots

Méthode Déterminer des probabilités d'évènements du type $\{X = Y\}, \dots, \{X_1 = \dots = X_n\}$

Par exemple, si X, Y sont deux variables aléatoires discrètes, on souhaite calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

-  1. Introduire le système complet associé à X (ou Y) dans l'évènement $\{X = Y\}$:

$$\{X = Y\} = \bigcup_{k \in X(\Omega)} \{X = k, Y = k\}.$$

2. On passe ensuite aux probabilités :

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = k, Y = k).$$

En cas d'indépendance, on écrit alors

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = k).$$

De manière générale, pour $\mathbf{P}(X_1 = \dots = X_n)$, on introduit le système complet d'évènements associé $n - 1$ variables aléatoires parmi les n .

Méthode Développement d'une variance de somme

Soit la quantité $\mathbf{Var}(X + Y)$ avec X, Y deux variables aléatoires discrètes ayant une variance.

1. Écrire la quantité en fonction de la covariance : $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Cov}(X + Y, X + Y)$.
2. Développer en utilisant la bilinéarité de la covariance.

Méthode Déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

1. Introduire le système complet associé à X ou Y dans l'évènement $\{X + Y = k\}$ pour tout $k \in (X + Y)(\Omega)$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour avoir

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{\ell \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = \ell) \cdot \mathbf{P}(Y = k - \ell).$$

3. Pour poursuivre le calcul, regarder pour quels $\ell \in X(\Omega)$, on a :

$$\mathbf{P}(X = \ell) \cdot \mathbf{P}(Y = k - \ell) \neq 0.$$

-  Puis conclure en finissant le calcul de la somme.

Méthode Déterminer une densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité

1. Rappeler l'hypothèse d'indépendance puis écrire l'expression de la convolée des densités :

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad (f_X \star f_Y)(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx & \text{en cas de convergence,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour poursuivre le calcul, regarder pour quels $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f_X(x) f_Y(z - x) \neq 0.$$

Puis conclure en réduisant l'intervalle d'intégration.

Méthode Approcher une espérance (ou une probabilité) par simulation

Soient X, X_1, \dots, X_n une suite i.i.d. d'espérance μ , et admettant une variance. Alors :

1. $\overline{X}_n \approx \mu$ pour n assez grand, et \overline{X}_n s'obtient en simulant un grand nombre de fois la loi commune aux X_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. (Pour l'espérance)

$$\mathbf{E}(X) \approx \overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad n \text{ assez grand.}$$

On forme la moyenne de simulations X_i . Si cette moyenne ne semble pas converger, alors X n'a probablement pas d'espérance.

3. (Pour une probabilité/fonction de répartition) Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Alors comme $\mathbf{P}(X \in I) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{X \in I\}})$, on peut utiliser 1) pour approcher la probabilité :

$$\mathbf{P}(X \in I) \approx \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \in I\}}}{n}, \quad n \text{ assez grand.}$$

On compte le nombre de simulations X_i dans I et on renvoie la moyenne. Pour obtenir une approximation de $F_X(x)$, on compte le nombre de simulations « $\leq x$ ».

Méthode Pour retenir l'approximation de \overline{X}_n par une loi normale

Penser aux paramètres : $E(\overline{X}_n) = \mu$, $\text{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, « à la limite » on obtient une loi $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ de mêmes paramètres.

Méthode Pour retenir l'approximation de la loi binomiale par la normale

Penser aux paramètres : $E(S_n) = np$, $\text{Var}(S_n) = np(1-p)$, « à la limite » on obtient une loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ qui a même espérance/variance que S_n .

Méthode Pour retenir l'approximation de la loi de Poisson par la normale

Penser aux paramètres : $E(S_n) = n\lambda$, $\text{Var}(S_n) = n\lambda$, « à la limite » on obtient une loi $\mathcal{N}(n\lambda, n\lambda)$ de même espérance/variance que S_n .

Méthode Lecture d'une table

Si l'on souhaite avoir, par exemple, $\Phi(0,96)$, on :

1. se place sur la ligne « 0.9 »,
2. se place ensuite sur la colonne « 0.06 ».
3. On obtient alors la valeur désirée.

Méthode Résultats probabilistes pour établir un intervalle de confiance : le théorème central limite et l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

1. (Si le « type de loi » (bernoulli, gaussienne etc.) du n -échantillon est connu)

On arrive parfois à calculer les probabilités $\mathbf{P}(\theta \in I_{X_1, \dots, X_n})$ explicitement pour n'importe quel intervalle I_{X_1, \dots, X_n} , les intervalles de confiance obtenus ne sont alors **pas asymptotiques**.

Pour des échantillons gaussiens, on a deux cas de figure :

- ▶ si σ est connue, on centre/réduit la moyenne empirique et on utilise la

propriété de stabilité de la loi normale (cf. exemple de CRUELLA).

- ▶ [H.P] Si σ est inconnue, on peut avoir recours à la loi de STUDENT¹¹ : voir Remarque 6 ci-après pour une définition.

2. (Si la loi de départ n'est pas connue)¹² On utilise soit :

- ▶ le théorème central limite en centrant réduisant la moyenne empirique (en approchant la variance par la version empirique si elle n'est pas connue), cela nous donne un intervalle de confiance seulement asymptotique,
- ▶ soit l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Méthode Démarche générale d'un test statistique

1. Poser l'hypothèse (nulle) \mathcal{H}_0 que l'on souhaite tester.
2. Trouver un résultat de probabilité qui donne deux résultats différents selon que \mathcal{H}_0 est vraie ou non (dans le test d'adéquation *supra*, c'était le théorème central limite).
3. Donner la stratégie de décision, en fonction du résultat énoncé.

Méthode Obtenir $\Phi(x)$ pour un certain $x \in \mathbf{R}$ à l'aide d'une table

Si l'on souhaite avoir, par exemple, $\Phi(0,96)$, on :

1. se place sur la ligne « 0.9 »,
2. se place ensuite sur la colonne « 0.06 ».
3. On obtient alors la valeur désirée. Dans cet exemple, $\Phi(0,96) = 0,8315$.

Méthode Chercher $x \in \mathbf{R}$ tel que $\Phi(x) = \alpha$ à l'aide d'une table, $\alpha \in [0, 1]$

Si l'on souhaite avoir, par exemple, $x \in \mathbf{R}$ tel que $\Phi(x) = 0.975$.

1. On cherche dans la grille l'endroit où se trouve une valeur suffisamment proche de $\alpha = 0.975$.
2. Dans cet exemple, on constate que $\Phi(1.96) = 0.975$.

Si l'on souhaite avoir, par exemple, $x \in \mathbf{R}$ tel que $\Phi(x) = 0.160$.

¹¹ C'est la loi obtenue en remplaçant σ inconnue par σ_n^{cor} dans la centrée/réduite de la moyenne empirique d'un échantillon gaussien

¹² On sera dans ce contexte l'immense majorité du temps