Chapitre ALG.2.

Polynômes

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de revoir certaines propriétés de première année sur les polynômes. Quelques compléments seront présentés en fin de chapitre, notamment la formule de TAYLOR qui stipule que pour les fonctions polynomiales la formule de TAYLOR-YOUNG est en fait exacte — *i.e.* sans terme en o().

114 est le plus petit nombre entier naturel dont on ne sait toujours pas s'il peut s'écrire comme une somme de trois cubes. Avant Septembre 2019, ce plus petit nombre était 42, mais finalement :
$42 = (80435758145817515)^3 + (-80538738812075974)^3 + (12602123297335631)^3$

— Le saviez-vous ?

Cadre
Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. DÉFINITION DE $\mathbf{K}[X]$

Les polynômes sont définis généralement comme des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ qui comportent un nombre fini de termes non nuls, la suite des coefficients $a_0, \dots a_n$

 ©

(avec $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$) pour un certain $n \in \mathbf{N}$, que l'on appelle degré. Et on appelle fonction polynomiale associée la fonction $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Conformément au programme de BCPST, nous ne ferons pas la différence entre polynôme et fonction polynomiale associée [1]. Ainsi, pour nous, les polynômes seront déjà des fonctions.

1.1. Généralités

Définition ALG.2.1 | Polynôme sur K

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Un *monôme de degré n* est une fonction $P : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ de la forme $x \longmapsto ax^n$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{K}$. L'entier n est appelé *degré de* P et généralement noté $\deg P$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Un *polynôme* est une fonction du type $P : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ de la forme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{K}$ tel que $a_n \neq 0$. L'entier n est appelé *degré de* P et généralement noté $\deg P$, c'est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. La fonction $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est généralement notée

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On convient que $\boxed{\deg 0 = -\infty}$. Le coefficient $a_{\deg P}$ est appelé *coefficient dominant de* P. Si $a_{\deg P} = 1$ on dit que P est *unitaire*. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on parle de polynôme à coefficients réels. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on parle de polynôme à coefficients réels.

Notation

On note :
- $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbf{K}$,
- $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbf{K}$ de degré inférieur à n,
- $\mathbf{K}_{=n}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbf{K}$ de degré égal à n.
- Le polynôme $0_{\mathbf{K}_n[X]}$ est le polynôme nul, *i.e.* la fonction nulle pour nous.

[1] de ce point de vue : il nous sera impossible de substituer $x \in \mathbf{K}$ par une matrice ou tout autre objet plus général.

Attention

à ne pas confondre $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour un certain $x \in \mathbf{K}$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ qui dans le premier cas est un élément de $\mathbf{K}$ (*i.e.* un réel ou un complexe), dans le second une **fonction**. Mais nous avons :

$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Attention — Dans un polynôme, la somme est finie

une fonction du type $x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, en cas d'existence, n'est **pas** un polynôme.[2] Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

cette quantité tend vers $\frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$. Et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ n'est **pas** un polynôme en x.

Notation

Parfois le polynôme P est aussi noté P(X), la notation P(X) désigne donc encore une fonction.

Remarque 1.1 — Convention de degré. L'application deg est donc à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$:

$$\deg : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{N} \cup \{-\infty\}, \\ P & \longmapsto & \deg P. \end{array} \right.$$

La convention $\deg 0 = -\infty$ est purement technique. Elle trouve son intérêt dans la formule de degré d'un produit que nous reverrons plus tard : soit $P \in \mathbf{K}[X]$, alors $\deg(0.P) = \deg(0) + \deg P$ d'une part, et d'autre part comme $0.P = 0$ on devrait avoir

[2] Dans ce cas on parle de série entière lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, de fonction analytique lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, leur étude n'est pas au programme de BCPST

$\deg 0 = \deg 0 + \deg P$. Cette formule n'est jamais vérifiée sauf si P est constant, d'où la convention précédente de sorte que

$$-\infty = -\infty + 0.$$

Les polynômes étant définis ici comme un sous-ensemble de l'espace des fonctions de **K** dans **K**, on peut réaliser plusieurs opérations sur eux comme pour les fonctions habituelles.

Définition ALG.2.2 | Opérations $+, \times, \circ, .$

Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, $\lambda \in \mathbf{K}$. On notera $P+Q$, PQ, $P\circ Q$ et λP les fonctions ci-dessous :

1. $P+Q \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ x & \longmapsto & P(x)+Q(x), \end{array}\right.$
2. $P\times Q \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ x & \longmapsto & P(x)Q(x), \end{array}\right.$
3. $P\circ Q \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ x & \longmapsto & P(x)\circ Q(x), \end{array}\right.$
4. $\lambda P \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ x & \longmapsto & \lambda P(x). \end{array}\right.$

Attention — Piège de notation

Si $P \in \mathbf{K}[X]$ et $p \geqslant 0$, attention à la différence entre le polynôme $X^pP : x \in \mathbf{K} \longmapsto x^pP(x)$ — un produit — et le polynôme $P(X^p) : x \in \mathbf{K} \longmapsto P(x^p)$ — une composée.

Plus explicitement à l'aide de coefficients, soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_kX^k$, avec la convention

- $a_k = 0$ si $k \notin [\![0\,,\,p]\!]$,
- $b_k = 0$ si $k \notin [\![0\,,\,q]\!]$.

Alors on a :

1. $P+Q = \sum_{n=0}^{\max(p,q)} (a_n+b_n)X^n$,
2. $PQ(X) = \sum_{n=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)X^n$,
3. $P\circ Q(X) = \sum_{n=0}^{p} a_n\left(\sum_{k=0}^{q} b_kX^k\right)^n$,
4. $\lambda P = \sum_{n=0}^{p} \lambda a_nX^n$.

Proposition ALG.2.1 | Stabilité des opérations

Soient $n \geqslant 1$, $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ (*resp.* $\mathbf{K}_n[X]$), $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $P+Q$, PQ, $P\circ Q$ et λP sont des éléments de $\mathbf{K}[X]$ (*resp.* $\mathbf{K}_n[X]$). L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ est donc stable par addition, produit, composition et multiplication par un scalaire. [3]

Preuve On vérifie sans peine que les précédentes fonctions sont encore des polynômes.

Attention

La proposition précédente est fausse pour $\mathbf{K}_{=n}[X]$. [4] Par exemple, puisque $X^2 + (-X^2) = 0$, la somme de deux polynômes de degré deux n'est pas forcément un polynôme de degré deux.

1.2. Propriétés du degré

Proposition ALG.2.2

Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$. On a :

1. **(Degré d'une somme)**

$$\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\}.$$

De plus, si $\deg P \neq \deg Q$, alors il y a égalité :

$$\deg(P+Q) = \max\{\deg P, \deg Q\}.$$

2. **(Degré d'une multiplication scalaire)** Si $\lambda \neq 0$,

$$\deg(\lambda P) = \deg P.$$

[3] Il s'agit aussi d'un espace vectoriel, *cf.* Chapter ALG.3 pour le détail.
[4] Cet ensemble ne sera **pas** un espace vectoriel, *cf.* Chapter ALG.3 pour le détail.

3. **(Degré d'un produit)**

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

4. **(Degré d'une composée)**

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q.$$

Preuve Voir le cours de 1ère année.

Remarque 1.2 — La distinction de cas de la première assertion est présente pour traiter le cas où les coefficients dominant se compensent : si $\deg P \neq \deg Q$, cela n'arrivera jamais, sinon on peut observer une chute de degré. Par exemple, considérons $P = -X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 + 1$. Alors $P + Q = X + 2$ est de degré 1, et ce n'est pas le max des degrés qui est 2.

Proposition ALG.2.3 | Intégrité de l'ensemble des polynômes

Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$. Alors : $PQ = 0_{\mathbf{K}[X]} \implies \left(P = 0_{\mathbf{K}[X]} \quad \text{ou} \quad Q = 0_{\mathbf{K}[X]}\right)$.

Preuve Supposons que $PQ = 0_{\mathbf{K}[X]}$, alors en prenant le degré nous avons : $\deg P + \deg Q = -\infty$, donc nécessairement un des deux degrés vaut $-\infty$ *i.e.* $P = 0_{\mathbf{K}[X]}$ ou $Q = 0_{\mathbf{K}[X]}$ — encore une bonne illustration de l'intérêt de la convention « $\deg(0_{\mathbf{K}[X]}) = -\infty$ » ![a]

Attention
Ce résultat est faux pour deux fonctions quelconques non polynomiales.

Codage informatique d'un polynôme

Comment coder un polynôme en Python ? Puisqu'il est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients, il suffit par exemple de les ranger par ordre croissant de degré et considérer en convention que le polynôme nul correspond à la liste vide. Par exemple, le polynôme $P = X^2 + 2$ peut être codé par la liste `L = [2, 0, 1]`. On peut en déduire alors facilement une fonction qui calcule le degré.

```python
import numpy as np
# np.inf correspond à l'infini des maths
def degre(P):
    """
    retourne le degré de P
    """
    if len(P) == 0:
        return -np.inf
    else:
        return len(P) - 1
```

Comment coder à présent les opérations élémentaires sur les polynômes. Par exemple, voici comment s'y prendre pour la multiplication par X d'un polynôme (on constate que cela décale vers la droite tous les coefficients). Il faut donc simplement ajouter 0 en début de liste.

```python
def mult(P):
    """
    retourne la liste correspond à X.P
    """
    return [0] + P
```

[a] On a l'impression de n'avoir rien fait dans cette preuve : en fait le travail principal réside dans la propriété de degré d'un produit établie plus haut.

2. POLYNÔME DÉRIVÉ & PRIMITIVÉ

Les polynômes ont été définis dans ce chapitre comme un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions, donc ils héritent en particulier de la notion de dérivation connue depuis longtemps si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. En revanche, pour $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, comme nous ne savons pas dériver les fonctions de la variable complexe, la définition *infra* est finalement plus générale.

2.1. Généralités

Définition ALG.2.3 | Dérivation

Soit $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell \in \mathbf{K}[X]$, avec $n \geqslant 1$.

1. On appelle *polynôme dérivé de* P le polynôme noté
$$P' = \sum_{\ell=1}^{n} \ell a_\ell X^{\ell-1},$$
i.e. la dérivée de la fonction P.
2. Soit $k \in \mathbf{N}$. On appelle *polynôme dérivé k fois* de P le polynôme
$$P^{(k)} = \sum_{\ell=k}^{n} \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)a_\ell X^{\ell-k},$$
i.e. la dérivée k-fois de la fonction P.

Codage informatique du polynôme dérivé

On déduit directement de la définition, la propriété de degré d'une dérivée.

Proposition ALG.2.4 | Degré d'un polynôme dérivé

Si $P \in \mathbf{K}[X]$ et $k \in \mathbf{N}$, alors
$$\deg P^{(k)} = \begin{cases} \deg P - k & \text{si } k \leqslant \deg P, \\ -\infty & \text{si } k > \deg P. \end{cases}$$

Remarque 2.1 — Pour la dérivée première, peut-on écrire $k=0$ ou $k=1$ en premier indice ? On prendra garde d'éviter l'expression $P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1}$ même si le terme d'ordre $k=0$ est nul. En effet, nous n'avons pas donné un sens à $0 \times \frac{1}{X}$, ce n'est pas un élément de $\mathbf{K}[X]$[5].

Définition ALG.2.4 | Primitivation (en zéro)

Soit $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell \in \mathbf{K}[X]$, avec $n \geqslant 1$. On appelle *polynôme primitivé de* P le polynôme noté
$$\int P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \frac{X^{\ell+1}}{\ell+1},$$
i.e. la primitive **qui s'annule en zéro** de la fonction P.

Exemple 1 — Calculer les dérivées successives de $P = X^4 - 3X^3 + iX^2 - 1$ et le polynôme primitif de P. *Puisque* P *est de degré* 4*, alors* $P^{(k)} = 0$ *dès que* $k \geqslant 5$. *Par ailleurs,* $P' = 4X^3 - 9X^2 + 2iX$, $P'' = 12X^2 - 18X + 2i$, $P''' = 24X - 18$ *et* $P^{(4)} = 24$.

Proposition ALG.2.5 | Dérivées d'un monôme

Soient $a \in \mathbf{K}$ et $(n,k) \in \mathbf{N}^2$. Alors : $$\left[(X-a)^n\right]^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$ [6]

Preuve *Le polynôme* $(X-a)^n$ *est de degré* n *donc si* $k > n$, *alors* $\left[(X-a)^n\right]^{(k)} =$

[5] mais de $\mathbf{K}(X)$, l'ensemble des *fractions rationnelles*
[6] Cette formule très classique est à savoir retrouver très rapidement.

0. *Supposons que $k \leqslant n$, alors*

$$[(X-a)^n]^{(k)} = n[(X-a)^{n-1}]^{(k-1)} = n(n-1)[(X-a)^{n-2}]^{(k-1)},$$

puis de manière générale on obtient :

$$[(X-a)^n]^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{k-n} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k}.$$

Proposition ALG.2.6 | Dérivations et opérations

Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :

1. $(\lambda P)' = \lambda P'$,
2. $(P+Q)' = P' + Q'$,
3. $(PQ)' = P'Q + PQ'$,
4. $(P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'$.

Preuve Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$: comme pour nous les polynômes sont des fonctions, les formules ci-dessus découlent donc des formules déjà connues pour les fonctions réelles de la variable réelle. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il faut les vérifier à l'aide de coefficients [...].

Unicité des coefficients. Posons-nous à présent la question suivante : existe-il plusieurs familles de coefficients possibles $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ telles que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad ?$$

La réponse est non, un polynôme est entièrement déterminé par la suite de ses coefficients (réels ou complexes).

Proposition ALG.2.7 | Un polynôme est déterminé par ses coefficients

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{K}$.

1. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, nous avons :

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

2. Par conséquent :
   - $P = 0 \iff a_0 = \dots = a_n = 0$.
   - la suite de coefficients $a_0, \dots, a_n$ est unique.

Preuve Exprimons déjà les coefficients de P en fonction des dérivées successives. En effet, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P^{(k)}(X) = \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell\right)^{(k)} = \sum_{\ell=k}^{n} a_\ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)X^{\ell-k}.$$

Nous obtenons :

$$P^{(k)}(0) = \sum_{\ell=k}^{n} a_\ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)x^{\ell-k}\Big|_{x=0} = k!a_k.$$

Les coefficients sont donc donnés par la formule suivante $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Évident.

  $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $P = 0$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{0}{k!} = 0 = a_k$. L'équivalence est donc démontrée.
- Supposons qu'il existe par ailleurs $b_0, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ tels que : $P = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $0 = \sum_{k=0}^{n} 0.X^k = \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k)X^k$, donc d'après ce qui précède $0 = b_k - a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. C'est terminé.

Exemple 2 — *Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle discrète.* Soit X une variable aléatoire réelle discrète à support fini $[\![0, n]\!]$, on note

$$g_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k)t^k$$

pour $t \in \mathbf{R}$ — l'égalité provient du théorème de transfert.

1. Que dire de la fonction g_X ? *La fonction g_X est un polynôme de degré n par définition d'un polynôme.*
2. Comment obtenir la loi de X à partir de g_X ? *D'après la proposition précédente, pour tout $k \in \mathbf{N}$: $\mathbf{P}(X = k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$.*

3. Déterminer g_X dans le cas $X \hookrightarrow \mathcal{U}[\![0\,,\,n]\!]$. *Nous avons alors :* $\forall k \in [\![0\,,\,n]\!]$, $\boldsymbol{P}(X=k)=\frac{1}{n+1}$. *Donc pour tout* $t\in \boldsymbol{R}$,

$$g_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{n}=\frac{1}{n}\begin{cases}\frac{1-t^n}{1-t} & si\ t\neq 1,\\ \frac{n+1}{n+1}=1 & si\ t=1.\end{cases}$$

3. RACINES

On se préoccupe à présent des points d'annulation d'un polynôme.

1. Premier point : on voit très clairement quel est leur nombre pour des petits degrés; une fonction affine (un polynôme de degré un) s'annule en un point, un trinôme s'annule toujours au plus deux fois dans $\mathbf{C}$. En fait, tout polynôme de degré n s'annulera au plus n fois. Des propriétés sur le nombre de racines semblent donc exister.
2. Second point : lorsque λ annule un polynôme, alors ledit polynôme sera de la forme $(X-\lambda)Q$ où $Q\in\mathbf{K}[X]$. Cette «factorisation» est uniquement vraie pour les polynômes — pas question d'écrire cela pour d'autres types de fonctions!

Exemple 3 — ***Contre–*** La fonction $x\in\mathbf{R}^+\longmapsto\sqrt{x}$ s'annule en zéro et pourtant n'est pas de la forme $x\longmapsto xQ(x)$ avec $Q\in\ \mathbf{R}[X]$.

Commençons par une notation que l'on utilisera dans toute la section.

Définition ALG.2.5 | Relation de divisibilité

Soient $P,Q\in\mathbf{K}[X]$. Alors on dit que P *divise* Q s'il existe un polynôme $R\in\mathbf{K}[X]$ tel que : $PR=Q$. On notera $P\mid Q$.

3.1. Généralités

Définition ALG.2.6 | Racine

Soient $P\in\mathbf{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbf{K}$. On dit que λ est une *racine* de P si :

$$P(\lambda)=0.$$

Lorsque $\mathbf{K}=\mathbf{C}$: on parle de *racine réelle* si on a de plus $\lambda\in\mathbf{R}$.

Proposition ALG.2.8 | Existence d'une racine réelle pour un polynôme de degré impair

Soit $P\in\mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré impair. Alors P possède une racine réelle.

Attention

Cette propriété est très classique : il faut bien en connaître la démonstration. Il n'y a en revanche pas nécessairement unicité.

Preuve Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x\longmapsto P(x)$, notons $P(X)=a_{2p+1}X^{2p+1}+\cdots+a_0$ avec $a_0,\dots,a_{2p+1}\in\mathbf{K}$, et supposons que $a_{2p+1}>0$ — sinon on applique le même raisonnement à $-P$.
Alors P est une fonction continue, et $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty}P(x)=\pm\infty$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $P(\lambda)=0$. Autrement dit, P possède une racine réelle.

Passons maintenant à la propriété de factorisation constatée plus haut sur des exemples.

Proposition ALG.2.9 | Caractérisation par factorisation

Soient $P\in\mathbf{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbf{K}$. Alors :

$$\lambda \text{ est racine de } P \iff \exists Q\in\mathbf{K}[X],\quad (X-\lambda)\times Q=P.$$

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat, évaluer l'identité en λ.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit λ une racine de P. Alors écrivons que $P(X) = P(X) - P(\lambda)$. Alors

$$\begin{aligned} P(X) = P(X) - P(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k - \alpha^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (X-\alpha) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-i-1} \\ &= (X-\alpha) \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-i-1}. \end{aligned}$$

téléscopage

En notant $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-i-1}$, qui est bien un polynôme, nous obtenons le résultat.

Dans la Proposition ALG.2.9, rien ne nous dit que Q n'est pas encore lui-même de la forme $(X-\lambda)\widetilde{Q}$ avec $\widetilde{Q} \in \mathbf{K}[X]$, auquel cas $P = (X-\lambda)^2\widetilde{Q}$. Pour quantifier la puissance maximale apparaissant dans l'exposant de $X - \lambda$, on introduit la notion de *multiplicité*.

Définition/Proposition ALG.2.1 | Multiplicité

Soient $P \in \mathbf{K}[X]$, $\boxed{P \neq 0_{\mathbf{K}[X]}}$,[7] et $\lambda \in \mathbf{K}$. On dit que λ est une *racine d'ordre* k (ou de *multiplicité* k) de P si l'une des propositions ci-dessous est vérifiée :

$$\begin{aligned} & (X-\lambda)^k \mid P \quad \text{et} \quad (X-\lambda)^{k+1} \nmid P, \\ \iff \quad & \exists Q \in \mathbf{K}[X],\ (X-\lambda)^k Q = P, \quad Q(\lambda) \neq 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, l'ordre d'une racine est la plus grande puissance k telle que P soit factorisable par $(X-\lambda)^k$ dans $\mathbf{K}[X]$. On note $k = \mathrm{Mult}_\lambda(P)$.

Preuve Montrons l'équivalence des deux propositions.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que : $\exists Q \in \mathbf{K}[X]$, $(X-\lambda)^k Q = P$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. Alors $(X-\lambda)^k \mid P$. Supposons par l'absurde que $(X-\lambda)^{k+1} \mid P$, alors il existe $\widetilde{Q} \in \mathbf{K}[X]$ tel que $(X-\lambda)^{k+1}\widetilde{Q} = P$. Alors :

$$(X-\lambda)^k \left((X-\lambda)\widetilde{Q}\right) = P = (X-\lambda)^k Q \quad \Longrightarrow \quad (X-\lambda)^k \left((X-\lambda)\widetilde{Q} - Q\right) = 0.$$

Donc : $\quad (X-\lambda)\widetilde{Q} = Q \quad$ et $\quad Q(\lambda) = 0$ — contradiction.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Notons $Q \in \mathbf{K}[X]$, $(X-\lambda)^k Q = P$, montrons que $Q(\lambda) \neq 0$. Si ce n'était pas le cas, *i.e.* si $Q(\lambda) = 0$, alors il existerait $\widetilde{Q} \in \mathbf{K}[X]$ tel que $Q = (X-\lambda)\widetilde{Q}$, donc $(X-\lambda)^k Q = (X-\lambda)^{k+1}\widetilde{Q} = P$ — contradiction.

Définition/Proposition ALG.2.2 | Multiplicité « au moins »

Soient $P \in \mathbf{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbf{K}$. On dit que λ est une racine de *multiplicité au moins* k) de P si elle est de multiplicité $\ell \geqslant k$, *i.e.* si l'une des propositions ci-dessous est vérifiée :

$$(X-\lambda)^k \mid P \quad \iff \quad \exists Q \in \mathbf{K}[X],\ (X-\lambda)^k Q = P.$$

Si l'on considère $P = X^3$, on voit que 0 est une racine de multicplicité 3. Alors :

$$P(0) = P'(0) = P''(0), \quad \text{alors que} \quad P'''(0) = 6 \neq 0.$$

Ce fait s'étend à n'importe quel polynôme et caractérise même les racines multiples.

Proposition ALG.2.10 | Caractérisation à l'aide du polynôme dérivé

Soient $P \in \mathbf{K}[X]$, $\boxed{P \neq 0_{\mathbf{K}[X]}}$, et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ est une racine d'ordre } k \in \mathbf{N} \text{ de P} \\ \iff \quad & \text{pour tout } i \in [\![0\,,\,k-\boxed{1}]\!], \quad P^{(i)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\lambda) \neq 0. \end{aligned}$$

Preuve Nous admettons cette proposition.

Exemple 4 — Notons $P = X^7 - 3X^5 + 2X^4 - X^3$, alors 0 est racine de multiplicité trois. ✎ *En effet,* $P(0) = 0$ *et* $P' = 7X^6 - 15X^4 + 8X^3 - 3X^2$, $P'' = 42X^5 - 45X^3 + 24X^2 - 6X$, $P''' = 210X^4 - 135X^2 + 48X - 6$, *donc* $P'(0) = P''(0) = 0$ *mais* $P'''(0) = -6 \neq 0$.

Exemple 5 — Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. $P' = P - \frac{X^n}{n!}$, ✎ *Par linéarité de la dérivation, nous avons* $P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = P - \frac{X^n}{n!}$.

[7] Pourquoi supposer P non nul? Étant donné que $(X-\lambda)^k$ divise P pour tout k, toutes les racines de 0 serait de multiplicité « infinie ».

2. on déduit que les racines de P sont simples. *Soit $\alpha \in \boldsymbol{R}$ une racine de* P*, alors si α était une racine multiple, nous aurions $\mathrm{P}'(\alpha) = 0 = 0 - \frac{\alpha^n}{n!}$ d'après la première question, donc $\alpha = 0$, or 0 n'est pas racine de* P*. D'où une contradiction et la non-existence d'une racine multiple pour* P.

Exemple 6 — Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathrm{P} = (\mathrm{X}^2 - 1)^n$. Calculs $\mathrm{P}^{(\ell)}(\pm 1)$ pour tout $\ell \geqslant 0$.

Nous verrons dans la pratique comment factoriser un polynôme, mais avant définissons deux notions.

Définition ALG.2.7 | Polynôme scindé/irréductible

- Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$ est dit *scindé sur* $\boldsymbol{K}$ s'il s'écrit sous la forme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \alpha \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $m_i = \mathrm{Mult}_{\lambda_i}(\mathrm{P})$, $m_1 + \ldots + m_r = \deg \mathrm{P}$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on dit que P est *scindé sur* $\boldsymbol{R}$ si $\lambda_i \in \mathbf{R}$ pour tout i.[8]

- Un polynôme est dit *irréductible*, s'il ne peut pas être factorisé en produit de polynômes de degrés strictement inférieurs au sien.

3.2. Existence de racines & Comptage

On termine à présent le chapitre par probablement l'argument qui revient le plus souvent dans les exercices : le comptage des racines et la comparaison au degré.

Théorème ALG.2.1 | Comptage de racines

Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$. Alors :

1. si $\mathrm{P} \neq 0_{\mathbf{K}[\mathrm{X}]}$ $\implies$ P possède au plus $\deg \mathrm{P}$ racines comptées avec multiplicité.
2. P possède au moins $\deg \mathrm{P} + 1$ racines $\implies$ $\mathrm{P} = 0_{\mathbf{K}[\mathrm{X}]}$.

Preuve Commençons par **2.**. Si P possède au moins $\deg \mathrm{P} + 1$, alors il existe un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$ tel que $(\mathrm{X} - \alpha_1) \ldots (\mathrm{X} - \alpha_p)\mathrm{Q} = \mathrm{P}$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{K}$ distincts deux à deux et $p = \deg \mathrm{P} + 1$. Donc en passant au degré, nous avons $p + \deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$ donc on aurait $\deg \mathrm{P} + 1 \geqslant \deg \mathrm{P}$ — contradiction puisque $\deg \mathrm{P} \neq -\infty$. Pour **1.**, contraposer **2.**.

Corollaire ALG.2.1 | Polynôme s'annulant sur un ensemble inifini

Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{D}$ un sous-ensemble infini de $\mathbf{K}$. Alors :

$$\mathrm{P} \text{ est nul sur } \mathscr{D} \quad \implies \quad \mathrm{P} = 0_{\mathbf{K}[\mathrm{X}]}.$$

Preuve Puisque P est nul sur $\mathscr{D}$, il possède une infinité de racines donc *a fortiori* en possède plus que son degré. Il est donc nul.

Attention

Ces résultats sont caractéristiques des polynômes, pas question de les utiliser pour d'autres fonctions. Par exemple, cos et sin s'annulent une infinité de fois et ne sont pourtant pas identiquement nulles.

[8] Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on a seulement $\lambda_i \in \mathbf{C}$ si on écrit «scindé» tout court.

Méthode — Montrer qu'un polynôme est nul

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

1. montrer que tous ses coefficients sont nuls,
2. montrer qu'il admet plus de racines que son degré (en particulier s'il en admet une infinité).

Le plus souvent, on utilise **2** pour en déduire la nullité de tous les coefficients.

Méthode — Montrer que deux polynômes sont égaux

Pour montrer que deux polynômes sont égaux, on peut au choix :

1. montrer que leurs coefficients sont identiques,
2. montrer que la différence admet plus de racines que son degré (en particulier si elle en admet une infinité).

Exemple 7 — Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$. A-t-on $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ dans les cas suivants ?

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$? *Le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ possède alors tous les réels comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $\mathrm{P}-\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.*
2. $\forall x \in]a, b[, \quad a < b, \quad \mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$? La différence $b-a$ est-elle importante ? *Le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ possède alors tous éléments de $]a, b[$ comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $\mathrm{P}-\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$. La différence $b-a$ (i.e. la longueur de l'intervalle) n'est pas importante étant donné que $]a, b[$ est toujours un ensemble infini.*

Exemple 8 — Il n'existe pas de polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\mathrm{P}(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$. *Supposons qu'un tel polynôme existe. Alors $\mathrm{P}^3(n) - (n^2+1) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc le polynôme $\mathrm{P}^3 - \mathrm{X}^2 - 1$ possède tous les entiers comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Ainsi, $\mathrm{P}^3 - \mathrm{X}^2 - 1 = 0$ et $\mathrm{P}^3 = \mathrm{X}^2 + 1$. En passant au degré on trouve $3 \deg \mathrm{P} = 2$ si $\mathrm{P} \neq 0$ donc c'est une contradiction. Mais $\mathrm{P} = 0$ ne convient pas non plus car $0 \neq \sqrt[3]{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Il n'existe donc pas de polynôme comme annoncé.*

Exemple 9 — *La conjugaison n'est pas polynomiale* Il n'existe pas de polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$: $\mathrm{P}(z) = \overline{z}$. *Supposons qu'un tel polynôme existe. Alors $\mathrm{P}(x) - x = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Donc le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{X}$ possède tous les réels comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Ainsi, $\mathrm{P}-\mathrm{X} = 0$ i.e. $\mathrm{P} = \mathrm{X}$. On aurait alors :*

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{P}(z) = z = \overline{z}.$$

Ce qui est clairement une contradiction, car il existe des complexes non réels.

Théorème ALG.2.2 | D'Alembert-Gauß

Tout polynôme non constant de $\mathbf{K}[\mathrm{X}]$ possède au moins une racine dans $\mathbf{C}$. En particulier, tout polynôme non constant de $\mathbf{K}[\mathrm{X}]$ est scindé sur $\mathbf{C}$.

Attention

C'est faux sur $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$, par exemple X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, mais il est scindé sur $\mathbf{C}$.

Preuve Ce résultat est admis. La plupart des preuves sont difficiles et dépassent largement les programmes de CPGE.

Le Théorème ALG.2.2 a donc pour conséquence que tout polynôme est scindé sur $\mathbf{C}$. Comment obtenir une telle décomposition ? Et sur $\mathbf{R}$? Commençons par un lemme.

Lemme ALG.2.1 | Structure des racines d'un polynôme à coefficients réels

Soit $\mathrm{P} \in \boxed{\mathbf{R}}[\mathrm{X}]$. Les racines de P sont conjuguées. [9]

Preuve Montrons ceci par exemple avec les polynômes dérivés. Notons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $n = \deg \mathrm{P}$, $a_k \in \mathbf{R}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors soit $\lambda \in \mathbf{K}$ une racine de

[9] On peut montrer de plus que les multiplicités sont les mêmes

P *i.e.* telle que $\mathrm{P}(\lambda) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\lambda) = 0 &\iff \overline{\mathrm{P}(\lambda)} = 0 \\
&\iff \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k} = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \lambda^k} = 0 \quad \textit{propriété de la conjugaison} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\lambda}^k = 0 \quad a_k \in \mathbf{R} \textit{ pour tout } k \\
&\iff \mathrm{P}\left(\overline{\lambda}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Théorème ALG.2.3 | Forme des polynômes irréductibles

1. **(Dans $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$)** Les polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$ sont les polynômes de degré inférieur ou égal à un.
2. **(Dans $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$)** Les polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ sont les polynômes de degré inférieur ou égal à un, ou de degré deux à discriminant strictement négatif.

Preuve

1. Tout polynôme possède une racine complexe. Donc tout polynôme de degré supérieur à deux est factorisable par un polynôme de degré strictement inférieur au sien (un polynôme de degré 1).
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme irréductible. Alors s'il est de degré supérieur à trois, d'après D'Alembert-Gauß, il existe une racine $\lambda \in \mathbf{C}$. Mais alors d'après le lemme qui précède, $\overline{\lambda}$ est aussi racine, donc $(\mathrm{X}-\lambda)(\mathrm{X}-\overline{\lambda}) \mid \mathrm{P}$. Or,

$$(\mathrm{X}-\lambda)(\mathrm{X}-\overline{\lambda}) = \mathrm{X}^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda)\,\mathrm{X} + |\lambda|^2 \in \mathbf{R}[\mathrm{X}].$$

Donc P n'est pas irréductible sur $\mathbf{R}$ puisqu'on l'a factorisé par un polynôme de degré strictement inférieur au sien. Donc nécessairement :
- soit P est de degré 1, dans ce cas il est irréductible.
- Soit P est de degré 2, et irréductible si et seulement si il n'a pas de racine réelle, donc si et seulement si son discriminant est strictement négatif.

Factorisation de polynômes. Tout polynôme s'écrit comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$, mais sur $\mathbf{R}$ également. L'énoncé de ce résultat n'est pas au programme, mais vous devez savoir comment obtenir une telle décomposition. Revoyons les méthodes avant de faire des exemples.

Méthode Factorisation d'un polynôme

Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$. Pour transformer P en un produit de polynômes de degré 1 ou 2, on :
1. cherche une racine $\lambda \in \mathbf{K}$.
2. On écrit P sous la forme $(\mathrm{X}-\lambda) \times \mathrm{Q} = \mathrm{P}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$.
3. On recommence le processus avec Q.

En résumé : cela revient à chercher les racines de P.

Méthode Lien entre la factorisation sur C et R

Pour décomposer un polynôme en produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$, on peut déjà le décomposer dans $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ (en cherchant ses racines), puis on regroupe les racines complexes conjuguées entre elles.

Exemple 10 — Factoriser $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 - 16\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 15$. *On pourra commencer par chercher une racine évidente* *On constate que* $\mathrm{P}(-1) = 0 = \mathrm{P}(1)$, *donc il existe* $a, b \in \mathbf{R}$ *tels que* $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b) = (\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b)$. *On peut ensuite identifier les coefficients, par exemple le terme constant et le terme d'ordre trois, on obtient alors comme conditions* $\begin{cases} 15 &= -b, \\ -2 &= a, \end{cases}$ *ce qui fournit ensuite* $\begin{cases} b &= -15, \\ a &= -2. \end{cases}$ *Donc* $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 15) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-5)(\mathrm{X}+3)$. *À la dernière étape on peut par exemple chercher les racines à l'aide du discriminant.*

Exemple 11 — Factoriser

1. $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\theta + 1$ avec $\theta \in]0, \pi[$ sur $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$. Que dire sur $\mathbf{R}$? *Calculons pour commencer le discriminant* Δ *: nous avons* $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$. *Nous avons donc deux racines complexes conjuguées* $\frac{2\cos\theta \pm 2\mathrm{i}\,|\sin\theta|}{2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$. *Donc la décomposition dans* $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ *est :*

$$\boxed{\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\theta + 1 = \left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{X} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right).}$$

Le polynôme est irréductible sur $\mathbf{R}$ *donc est déjà factorisé au maximum.*

2. X^4+1 dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$. *Commençons par chercher les racines de* X^4+1 *en utilisant les techniques du Chapter ALG.1 : on utilise la forme trigonométrique de* $X = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \geqslant 0, \theta \in [0, 2\pi[$. *Nous avons*

$$\begin{aligned} X^4+1=0 &\iff X^4 = -1 = e^{i\pi} = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4, \\ &\iff \rho^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi}, \\ &\iff \rho^4 = 1, \quad 4\theta = \pi \quad [2\pi], \\ &\iff \rho = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Donc :

$$X^4+1=0 \iff X \in \left\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, -e^{\frac{i\pi}{4}}, -e^{\frac{3i\pi}{4}}\right\}.$$

Ainsi, la décomposition du polynôme dans $\mathbf{C}[X]$ *est :*

$$X^4+1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{i\pi}{4}}}\right).$$

On regroupe ensuite les racines avec leur conjugué pour obtenir celle dans $\boldsymbol{R}[X]$ *:*

$$\begin{aligned} X^4+1 &= \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{i\pi}{4}}}\right) \\ &= (X^2 - 2\cos(\pi/4)+1)(X^2 - 2\cos(3\pi/4)+1) \\ &= \boxed{(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).} \end{aligned}$$

3.3. Cas du second degré

Considérons un trinôme aX^2+bX+c avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en effet, mettons le trinôme sous forme canonique. Notons $\delta \in \mathbf{C}$ une racine complexe de $\Delta = b^2-4ac$:

- si $\Delta \geqslant 0$, $\delta = \sqrt{\Delta}$ convient car $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = \Delta$.
- Si $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ convient car $\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2 = -(-\Delta) = \Delta$.

$$\begin{aligned} aX^2+bX+c &= a\left[\left(X^2+\frac{b}{a}X\right)+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}(b^2-4ac)\right] \\ &= a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

forme canonique

On reconnaît alors une identité remarquable du type « a^2-b^2 ». On écrit alors :

$$aX^2+bX+c = a\left(X - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(X - \frac{-b-\delta}{2a}\right).$$

On a trouvé les racines du trinôme, ce qui nous mène tout droit au théorème suivant.

Théorème ALG.2.4 | Solutions d'une équation du second degré

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

1. On appelle *discriminant* du trinôme az^2+bz+c le réel $\Delta = b^2-4ac$.
2. Soit δ **une** racine carrée de Δ (*i.e.* $\delta = \sqrt{\Delta}$ si $\Delta \geqslant 0$ et $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$). Alors les solutions de l'équation sont :

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

De plus, l'équation admet deux racines distinctes si $\Delta \neq 0$ et une seule racine si $\Delta = 0$.

Exemple 12 — Résoudre les équations :

1. $z^2+2z+4=0$,
2. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. On a $\Delta = 4 - 16 = -12$. On cherche ensuite une racine carrée complexe δ i.e. un élément $\delta \in \mathbf{C}$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$. Puisque $-12 = (4\mathrm{i})^2$ on choisit $\delta = 4\mathrm{i}$. Ainsi les solutions sont

$$\frac{-2 \pm (4\mathrm{i})}{2} = \boxed{-1 \pm 2\mathrm{i}}.$$

*Pour **2.**, on a $\Delta = -4\sin^2\theta$. Nous avons plusieurs cas :*

- *si $\theta = \pi$: alors $\Delta = 0$ et on a une seule racine double $\boxed{\cos\theta}$.*
- *si $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, comme nous avons $\Delta = (2\mathrm{i}\sin\theta)^2$, nous obtenons une racine carrée $\delta = 2\mathrm{i}\sin\theta$. D'où les racines $\frac{2\cos\theta \pm 2\mathrm{i}\sin\theta}{2}.\boxed{= \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}}$.*

Notez que le second cas est inclus dans le premier.

RELATIONS COEFFICIENTS/RACINES Les relations coefficients/racines relient, comme leur nom l'indique, les coefficients d'un polynôme aux racines. Inutile en revanche d'espérer trouver les racines par cette méthode puisque elles sont solution d'un système linéaire, comme le montre la proposition qui suit.

Proposition ALG.2.11

Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$, avec $a \in \mathbf{K}^\star, b, c \in \mathbf{K}$. Notons x_1, x_2 les deux racines de P complexes conjuguées.[10] Alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve

- **(Première méthode : sans utiliser l'expression des racines.)** Par définition d'une racine, nous avons $\mathrm{P} = a(\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)$. En développant, on obtient $\mathrm{P} = a(\mathrm{X}^2 - (x_1 + x_2)\mathrm{X} + x_1 x_2)$. Par identification on obtient immédiatement :
$$a(x_1 + x_2) = b, \quad a x_1 x_2 = c,$$
ce qui en divisant par a donne les relations de l'énoncé.
- **(Seconde méthode : en utilisant l'expression des racines, si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ uniquement.)** Notons δ une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors $x_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$. On obtient alors :
$$x_1 + x_2 = \frac{(-b+\delta) + (-b-\delta)}{2a} = \frac{-b}{a},$$
$$x_1 x_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \times \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

[10] Cela inclut tous les cas, y compris celui de racines doubles réelles

Remarque 3.1 — Et pour un degré quelconque

- Dans le TD, nous établirons les mêmes relations mais pour le degré trois, mais en utilisant la première méthode car nous ne connaissons pas d'expression explicite des racines. [11]
- Il est complètement illusoire d'espérer calculer, de manière générale, les racines d'un polynôme à l'aide des relations coefficients/racines : pour le degré $n \in \mathbf{N}^\star$, nous avons un système de n équations, mais absolument pas linéaire.

Une conséquence de la preuve du théorème précédent est le corollaire qui suit, qui est en quelque sorte une réciproque des relations coefficients/racines : si l'on se fixe $s, p \in \mathbf{K}$ alors il est possible de trouver un polynôme dont les racines ont pour somme s et produit p.

Corollaire ALG.2.2 | Quantités de somme et produit fixés

Soients $s, p \in \mathbf{K}$. Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= s, \\ x_1 x_2 &= p, \end{cases} \iff x_1, x_2 \quad \text{sont les racines de} \quad \mathrm{X}^2 - s\mathrm{X} + p.$$

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Déjà montré : conséquence des relations coefficients/racines (avec $a = 1$).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\begin{cases} x_1 + x_2 &= s, \\ x_1 x_2 &= p. \end{cases}$ Alors notons $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - s\mathrm{X} + p$. On a par hypothèse $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - (x_1 + x_2)\mathrm{X} + x_1 x_2 = (\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)$, autrement dit x_1, x_2 sont les deux racines de P.

[11] Mais de telles formules existent, dues à CARDAN.

Méthode Système à somme et produit fixés

Ainsi, pour résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= s, \\ x_1 x_2 &= p \end{cases}$$

en $(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2$, il suffit de chercher les racines de $\mathrm{X}^2 - s\mathrm{X} + p$ à l'aide du discriminant.

Exemple 13 — Résoudre le système $\begin{cases} x + y &= 1 \\ xy &= -1 \end{cases}$ sans substitution. *(x, y) sont solutions du système si et seulement si x, y sont les racines de $\mathrm{X}^2 - 1\mathrm{X} + (-1) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$. Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$. Donc $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Exemple 14 — Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2, \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{2xy}{x+y}\right). \end{array} \right.$ Déterminer $f(\mathbf{R}^2)$. *Par définition, $(x', y') \in f(\mathbf{R}^2)$ si et seulement si, il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, tel que :*

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} &= x', \\ \frac{2xy}{x+y} &= y' \end{cases}.$$

*Il s'agit donc de résoudre le système — non linéaire ! — précédent en (x, y), et éventuellement de trouver une condition sur (x', y') pour avoir l'existence d'une solution. L'ensemble image sera alors l'ensemble des couples (x', y') pour lesquels le système admet **au moins** une solution.*

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} &= x', \\ \frac{2xy}{x+y} &= y' \end{cases} \iff \begin{cases} x + y &= 2x', \\ 2xy &= 2x'y' \end{cases} \iff \begin{cases} x + y &= 2x', \\ xy &= x'y' \end{cases}$$

$$\iff x, y \text{ sont racines de } \mathrm{X}^2 - (2x')\mathrm{X} + x'y'$$

Or, le discriminant de ce trinôme est $4x'^2 - 4x'y' = 4x'(x' - y')$. Donc $(x', y') \in f(\mathbf{R}^2)$ si et seulement si $\Delta = 4x'(x' - y') \geqslant 0$, donc en conclusion

$$\boxed{f(\mathbf{R}^2) = \left\{(x', y') \in \mathbf{R}^2,\ x'(x' - y') \geqslant 0\right\}}.$$

4. EXERCICES

Exercice ALG.2.1 | **Vrai ou Faux ?**

1. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\deg(-P) = \deg P$.
2. Pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]$, $\deg(P-Q) \leqslant \deg P - \deg Q$.
3. Un polynôme constant est de degré nul.
4. Le polynôme $X-2$ divise $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 7X + 6$.
5. Le polynôme $X^{17} + X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$.
6. Si $z \in \mathbf{C}$ est une racine de multiplicité n d'un polynôme P, alors $P^{(n)}(z) = 0$.

4.1. Généralités, Racines, Factorisation

Exercice ALG.2.2 | **Polynôme des différences finies** Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Exprimer le degré de $P(X+1) - P(X)$ en fonction de celui de P.

Solution (exercice ALG.2.2)

Soit $n \geqslant 0$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{K}$. Alors

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(X+1)^k - X^k \right].$$

Dès lors, cherchons le degré de $(X+1)^n - X^n$, qui est égale à degré de $P(X+1) - P(X)$. D'après le formule du binôme

$$(X+1)^n - X^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{\ell}{n} X^\ell - X^n,$$

les termes d'ordre n étant identiques, nous avons une simplification si $n \geqslant 1$:

$$(X+1)^n - X^n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{\ell}{n} X^\ell,$$

et $\binom{n-1}{n} \neq 0$. Ainsi, le polynôme $P(X+1) - P(X)$ est de degré

- $\boxed{k-1 \text{ si } k \geqslant 1.}$
- $\boxed{\text{Si } k = 0 \text{ ou } -\infty, \text{ alors } P(X+1) - P(X) = 0 \text{ donc il est de degré } -\infty.}$
-

Exercice ALG.2.3 | Quel est l'ordre de multiplicité de 1 dans $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?

Solution (exercice ALG.2.3)

Calculons les dérivées successives de P.

$$\begin{aligned} P(1) &= 0, \\ P'(X) &= n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2), \\ P'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Pour pouvoir redériver, nous avons besoin de distinguer des cas sur n.

- Si $n = 0$, alors $P_0 = 0$, donc 1 est racine de multiplicité zéro (convention).
- Si $n \geqslant 1$, $P_n''(X) = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1} = n(n+1)(n+2)X^{n-1}(X-1)$. Donc 1 est racine de multiplicité 1 de P'' et donc $P''(1) = 0$ mais $P'''''''(1) \neq 0$. On déduit alors que $\boxed{1 \text{ est racine de multiplicité 3 de } P_n.}$

Exercice ALG.2.4 | **Factorisation** Déterminer pour chaque exemple si Q est factorisable par P, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.

- $P = X - 1$ et $Q = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$,
- $P = X - 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + X + 1$,
- $P = X^2$ et $Q = (X+1)^n - nX - 1$ avec $n \in \mathbf{N}$.

Solution (exercice ALG.2.4)

On commence par vérifier si les racines du diviseur testé sont bien des racines du polynôme P.

- $Q(1) = 1-2+3-2 = 0$, donc 1 est racine de P, et $\boxed{\text{P divise Q.}}$ On cherche R sous la forme $R = X^2 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, donc tel que :

$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X-1)(X^2 + aX + b),$$

donc en développant :

$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = X^3 + X^2(a-1) + X(b-a) - b,$$

on peut ensuite identifier coefficient par coefficient.

$$-2 = a-1, \quad 3 = b-a, \quad -b = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 2, \quad a = -1.$$

Donc $\boxed{R = X^2 - X + 2.}$

- $Q(2) = 2^4 - 3.8 + 2 + 1 = -8 + 3 = 5 \neq 0$, donc $\boxed{\text{P ne divise pas Q.}}$
- Pour savoir si P divise Q, il s'agit de regarder si 0 est une racine de multiplicité 2 de Q.

$$Q(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Et $Q'(X) = n(X+1)^{n-1} - n$, $Q'(0) = n - n = 0$ dès que $n \geqslant 1$, puis $Q''(X) = n(n-1)X^{n-2}$, $Q''(0) = 0$ dès que $n \geqslant 2$.

— si $n = 0$: $Q = 1 + 1 = 2$ donc $\boxed{\text{P ne divise pas Q.}}$

— Si $n = 1$: $Q = (X+1) - X - 1 = 0$ donc $\boxed{\text{P ne divise pas Q.}}$

— Si $n \geqslant 2$, alors d'après les calculs précédents $\boxed{\text{P divise Q.}}$

Exercice ALG.2.5 | Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $1 + j + j^2$, que dire de j^3 ? Montrer que $j^2 = \bar{j}$.
2. Montrer que : $\quad P = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} X^k$.
3. Montrer que P est divisible par $(X-j)^2$, puis que P est divisible par $\left(X - \bar{j}\right)^2$.
4. Factoriser P en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Solution (exercice ALG.2.5)

1. $1 + j + j^2 = 0$ (somme géométrique), et $j^3 = 1$. Par ailleurs $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3} - 2i\pi} = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = \bar{j}$.
2. D'après la formule du binôme, on a : $\quad P = \sum_{k=0}^{7} \binom{n}{k} X^k - X^7 - 1 = \boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \binom{n}{k} X^k}$. Le coefficient dominant est donc $\binom{7}{6} = 7$. Le degré est donc 6.
3. Il s'agit de montrer que $P(j) = P'(j) = 0$ — cela signifie que j est une racine de multiplicité au moins égale à deux. On a :

$$\begin{aligned} P(j) &= (1+j)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -j^14 - j^7 - 1 = -j^2 - j - 1 = 0,\\ P'(j) &= 7(1+j)^6 - 7j^6 = 7(-j^2)^6 - 7 = 7 - 7 = 0. \end{aligned}$$

Dès lors $\boxed{(X-j)^2 \mid P}$. Puisque $P \in \mathbf{R}[X]$, on sait d'après le cours que $\bar{j}$ est également une racine de P et de même multiplicité. Donc $\boxed{\bar{j} \text{ est une racine de multiplicité au moins deux.}}$

4. Nous avons déjà deux racines, chacune de multiplicité au moins deux. Or P est de degré six, il en manque donc deux. Constatons que $0, -1$ sont deux racines évidentes. Or, le coefficient dominant de P est 7, donc

$$\boxed{P = 7(X-j)^2(X-\bar{j})^2 X(X+1).}$$

C'est la décomposition en irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$. Pour obtenir des facteurs réels, on regroupe les parties complexes avec leur version conjuguée.

$$\begin{aligned} P &= 7(X-j)^2(X-\bar{j})^2 X(X+1)\\ &= 7(X^2 - 2\operatorname{Re}(j)X + |j|^2)^2 X(X+1)\\ &= \boxed{7(X^2 + X + 1)^2 X(X+1).} \end{aligned}$$

Exercice ALG.2.6 | Pour tout entier $p \in [\![0\,,\,n]\!]$, on considère les polynômes :

$$T_p = X^p(1-X)^p, \quad L_p = \frac{1}{p!}\left(T_p\right)^{(p)}$$

où $\left(\mathrm{T}_p\right)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de T_p. Fixons un entier $p \in \mathbf{N}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_p.
2. Notons L_p sous la forme $\mathrm{L}_p = \sum_{k=0}^{p} a_{k,p}\mathrm{X}^k$. Établir que :
$$\forall k \in [\![0\,,\,p]\!] \quad a_{k,p} = (-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}.$$
3. Déterminer une relation entre $a_{k+1,p}$ et $a_{k,p}$ pour $k \in [\![0\,,\,p-1]\!]$. Préciser la valeur de $a_{0,p}$.
4. En vous appuyant sur la question 3, écrire une fonction informatique qui prend en argument un entier naturel p et renvoie la liste des coefficients $a_{0,p}, a_{1,p}, \cdots, a_{p,p}$ de L_p.
Tester cette fonction dans le cas où $p \in \{0,1,2\}$.

Exercice ALG.2.7 | Relations coefficients/racines pour l'ordre trois.

1. Soit le polynôme $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$ supposé scindé, avec $a \neq 0$ et de racines x, y, z. Exprimer $\sigma_1 \underset{\textbf{(défi.)}}{=} x+y+z$, $\sigma_2 \underset{\textbf{(défi.)}}{=} xy+xz+yz$ et $\sigma_3 \underset{\textbf{(défi.)}}{=} xyz$ en fonction de a, b, c, d. *Il existe des relations similaires pour les autres degrés, appelées relations coefficients/racines.*
2. **(Application à la résolution d'un système non linéaire)** Résoudre dans $\mathbf{C}^3$ les systèmes : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 2,\\ x^2+y^2+z^2 &=& 2,\\ xyz &=& 0.\end{array}\right.$

Solution (exercice ALG.2.7)

1. Par définition d'une racine, $\mathrm{P} = a(\mathrm{X}-x)(\mathrm{X}-y)(\mathrm{X}-z)$. Développons ce produit :
$$\begin{aligned}\mathrm{P} &= a(\mathrm{X}-x)(\mathrm{X}-y)(\mathrm{X}-z)\\ &= a(\mathrm{X}^2-(x+y)\mathrm{X}+xy)(\mathrm{X}-z)\\ &= a(\mathrm{X}^3-(x+y)\mathrm{X}^2+xy\mathrm{X}-z\mathrm{X}^2+z(x+y)\mathrm{X}-xyz)\\ &= a\mathrm{X}^3-a(x+y+z)\mathrm{X}^2+a(xy+zx+zy)\mathrm{X}-axyz.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on trouve : $\boxed{-a\sigma_1 = b, \quad a\sigma_2 = c \quad \text{et} \quad d = -a\sigma_3}$.
De manière équivalente :
$$\sigma_1 = -\frac{b}{a}, \quad \sigma_2 = \frac{c}{a}, \quad \sigma_3 = -\frac{d}{a}.$$

2. Notons $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois fonctions de x, y, z définies dans l'énoncé. Constatons que $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)(x+y+z) - 2(xy+xz+yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Alors :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 2,\\ x^2+y^2+z^2 &=& 2,\\ xyz &=& 0.\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \sigma_1 &=& 2,\\ \sigma_1^2-2\sigma_2 &=& 2,\\ \sigma_3 &=& 0.\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \sigma_1 &=& 2,\\ \sigma_2 &=& 1,\\ \sigma_3 &=& 0.\end{array}\right.$$
$$\iff x, y, z \text{sont les racines de}$$
$$\mathrm{X}^3-\sigma_1\mathrm{X}^2+\sigma_2\mathrm{X}-\sigma_3 = \mathrm{X}^3-2\mathrm{X}^2+2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+2).$$

Les racines de ce polynôme sont composées de 0 et des racines de $\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+2$ (ce dernier polynôme est de dscriminant $4-8=-4=(2\mathrm{i})^2$). Donc :
$$\boxed{x, y, z \in \ \{0, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}}.$$

4.2. Équations fonctionnelles polynomiales

Exercice ALG.2.8 | Résoudre dans l'ensemble des fonctions polynômiales l'équation $\mathrm{P}\circ\mathrm{P} = \mathrm{P}$.

Solution (exercice ALG.2.8)

On commence par regarder le degré d'une éventuelle fonction solution. On constate que nécessairement $(\deg \mathrm{P})^2 = \deg \mathrm{P}$. Ainsi $\deg \mathrm{P} \in \{0,1\}$. Les polynômes constants sont tous solutions. Si P est de degré 1, il s'écrit a priori sous la forme $P = \alpha X + \beta$ et α, β vérifient pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta = \alpha x + \beta.$$

Donc

$$\alpha^2 X + \alpha\beta + \beta = \alpha X + \beta.$$

Et $\alpha \in \{0, 1\}$. Le cas $\alpha = 0$ a déjà été traité, sinon $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Donc X est aussi solution. Mais

$$j\sqrt[3]{-q} \times j^2\sqrt[3]{-q} = \sqrt[3]{-q},$$

donc le polynôme $X^3 + p$ satisfait la condition.

Exercice ALG.2.9 |

1. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifiant : $(P')^2 = 4P$. Montrer que si P n'est pas constant alors $\deg P = 2$.
2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$.

Solution (exercice ALG.2.9)

1. Supposons P non constant, *i.e.* $n = \deg P \geqslant 1$. Alors en passant au degré dans l'hypothèse vérifiée par P, nous obtenons
$$2(n-1) = n, \quad \boxed{n = 2}.$$
2. Le seul polynôme constant solution est le polynôme nul. Supposons que $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. Alors
$$\begin{aligned}(P')^2 = 4P &\iff (2aX+b)^2 = 4(aX^2+bX+c),\\ &\iff 4a^2X^2 + 4aX + b^2 = 4(aX^2+bX+c),\\ &\iff a^2 = a,\ a = b,\ b^2 = c.\end{aligned}$$
Donc :
   - soit $a = 0$, auquel cas $b = 0 = c$, donc $P = 0$ - ceci est exclu.
   - Soit $a \neq 0$, et donc $a = 1$, ce qui libre $b = 1$ puis $c = 1$. Donc $P = X^2 + X + 1$.

   L'ensemble des polynômes solution est donc $\boxed{\{0, X^2 + X + 1\}}$.

4.3. Familles classiques

Exercice ALG.2.10 | **Autour des polynômes d'Hermite** On considère la suite (H_n) de polynômes, telle que $H_0(X) = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$H_{n+1} = H_n' - 2XH_n.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_n \in \mathbf{R}[X]$, et donner H_1, H_2.
2. Déterminer le degré de H_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Déterminer le coefficient dominant de H_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Solution (exercice ALG.2.10)

1. Le fait que $H_n \in \mathbf{R}[X]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ est une récurrence évidente puisque la dérivée d'un polynôme à coefficients réels est encore à coefficients réels. De plus, $H_1 = 1' - 2X1 = -2X$, puis $H_2 = (-2) - 2X(-2X) = 4X^2 - 2 = \boxed{2(2X^2-1)}$.
2. Déterminons le degré de H_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, alors notant $d_n = \deg P_n$, on a en passant au degré puisque le degré de XH_n est nécessairement strictement supérieur à celui de H_n' :
$$d_{n+1} = d_n + 1, \quad d_0 = 0.$$
Donc $\boxed{d_n = n \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.}$
3. Notons a_n le coefficient dominant de P_n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. Pour la même raison qu'à la question précédente, le coefficient dominant de $H_n' - 2XH_n$ est égal à celui de $-2XH_n$. On obtient alors :
$$a_{n+1} = (-2)a_n.$$
Donc $\boxed{a_n = (-2)^n a_0 = (-2)^n \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.}$