Chapitre ALG.1.

Nombres complexes & Trigonométrie

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de revoir certaines propriétés de première année sur les nombres complexes. Quelques compléments seront présentés en fin de chapitre, notamment sur les solutions de l'équation $z^n = 1$ avec $n \in \mathbf{N}$ appelées *Racines n-ièmes de l'unité*.

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XV ieme siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de Cardan, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle «sophistiqué». C'est Raphaël Bombelli qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors impossibles avant de leur donner le nom d'imaginaires.

— Le saviez-vous ?

1. DÉFINITION DE C

On souhaite construire un ensemble de nombres, appelé ensemble des *nombres complexes* dans la suite, dans lequel certaines équations admettent une solution (alors que ce n'est pas le cas dans $\mathbf{R}$) comme par exemple

$$x^2+1=0. \tag{1.1}$$

Même si nous n'insisterons pas trop là-dessus : il ne suffit pas de prétendre son existence pour qu'il existe, *i.e.* la phrase « soit $\mathbf{C}$ un ensemble contenant $\mathbf{R}$ et possédant un élément i tel que $\mathrm{i}^2=-1$ » n'a aucune légitimité mathématique. Un *principe de construction* en Mathématiques — par exemple de construction d'ensemble ici — consiste en la démarche suivante : on part d'un ensemble déjà connu, $\mathbf{R}$ en l'occurence (mais attention, cet ensemble aussi on ne vous l'a jamais construit!) et on en définit un autre possédant les propriétés souhaitées. C'est ce qui est fait dans le paragraphe ci-après. Dans le suivant, nous oublierons déjà le fait que les éléments de $\mathbf{C}$ peuvent être vus comme des coupes $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, et nous reprenons la notation $x+\mathrm{i}\,y$ habituelle.

Principe de construction de $\mathbf{C}$ comme $\mathbf{R}^2$ muni de deux lois. [H.P] Rappelons que $\mathbf{R}^2=\{(x,y),\ x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$, c'est un ensemble bien défini que nous pouvons utiliser pour construire $\mathbf{C}$. Alors on note $\mathbf{C}$ l'ensemble $\mathbf{R}^2$ muni des lois + et × suivantes :

1. **(Somme de nombres complexes)** $\forall(x,y,x',y')\in\mathbf{R}^4,\quad (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$,
2. **(Produit de nombres complexes)** $\forall(x,y,x',y')\in\mathbf{R}^4,\quad (x,y).(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$.[1]

Les éléments de $\mathbf{C}$ sont plutôt représentés de la manière suivante : l'élément (x,y) est noté $x+\mathrm{i}.y$, et les assertions précédentes deviennent :

1. **(Somme de nombres complexes)** $\forall(x,y,x',y')\in\mathbf{R}^4,\quad (x+\mathrm{i}\,y)+(x'+\mathrm{i}\,y')=(x+x')+\mathrm{i}\,(y+y')$,
2. **(Produit de nombres complexes)** $\forall(x,y,x',y')\in\mathbf{R}^4,\quad (x+\mathrm{i}\,y).(x'+\mathrm{i}\,y')=xx'-yy'+\mathrm{i}\,(xy'+x'y)$,

[1] Les coordonnées du couple correspondent aux parties réelles et imaginaires de $(x+\mathrm{i}\,y)(x'+\mathrm{i}\,y')$ avec la règle de calcul $\mathrm{i}^2=-1$

impliquant en particulier que $\mathrm{i}^2=(0,1).(0,1)=(-1,0)$ en faisant $y=1$, $y'=1$, $x=0$ et $x'=0$ dans les définitions de loi produit précédentes, *i.e.* en notation complexe

$$\mathrm{i}^2=-1.$$

On a donc construit un élément noté i et un ensemble $\mathbf{C}$, où cet élément i est une solution dans $\mathbf{C}$ de $x^2+1=0$. C'est ce qu'on voulait. Classiquement on exige certaines propriétés supplémentaire sur les lois +, × (associativité, inverse, *etc.*) qui sont vérifiées ici.

Les lois précédentes permettent d'additionner et de multiplier deux complexes. On peut aussi multiplier tout complexe $(x,y)=x+\mathrm{i}\,y$ par $\lambda\in\mathbf{R}$ (*resp.* $\mathbf{C}$) :

$$\lambda.(x+\mathrm{i}\,y)=(\lambda+\mathrm{i}\,0)(x+\mathrm{i}\,y)=(\lambda x)+\mathrm{i}\,(\lambda y),\quad \lambda\in\mathbf{R}\quad (\textit{resp.}\,\mathbf{C}).$$

En particulier, on peut montrer que cette opération externe $\mathbf{R}\times\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$ (*resp.* $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$) définit une structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ (*resp.* $\mathbf{C}$-espace vectoriel), voir le Chapter ALG.3.

Définition ALG.1.1 | Définition d'un nombre complexe

- Les éléments de $\mathbf{C}$ sont appelés *nombres complexes*. Si $z\in\mathbf{C}$, alors $z=x+\mathrm{i}\,y$ avec $x\in\mathbf{R}$ et $y\in\mathbf{R}$. On appellera *partie réelle* de z le réel x (noté $\mathrm{Re}\,(z)$), et y la partie imaginaire (notée $\mathrm{Im}\,(z)$).
- L'écriture $z=x+\mathrm{i}\,y$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z et elle est unique.
  Si $y=0$, on dit que x est réel. Si $x=0$, on dit que z est *imaginaire pur* (ensemble noté $i\mathbf{R}$).

Méthode Unicité de l'écriture algébrique et identification

Une reformulation de l'unicité de l'écriture $z=x+\mathrm{i}\,y$ est la suivante :

$$x+\mathrm{i}\,y=x'+\mathrm{i}\,y'\quad\Longleftrightarrow\quad x=x',\quad y=y',\quad (x,y,x',y')\in\mathbf{R}^4.$$

On peut donc *identifier* partie réelle et partie imaginaire.

Attention

La partie imaginaire d'un nombre complexe est, par définition, une quantité **réelle**.

Remarque 1.1 — On a l'inclusion immédiate suivante :

$$\mathbf{R} \times \{0\} \subset \mathbf{C}.$$

Mais[2] comme $\mathbf{R} \times \{0\}$ peut être *identifié à* $\mathbf{R}$ (grâce à la bijection $x \in \mathbf{R} \longmapsto (x,0) \in \mathbf{R} \times \{0\}$), on note en général

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Définition ALG.1.2 | Complexe conjugué

Si $z \in \mathbf{C}$, on appelle *conjugué de* $z = x + \mathrm{i}\,y$ le complexe $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$.

La construction précédente de $\mathbf{C}$ nous permet d'assimiler tout complexe à un unique point de $\mathbf{R}^2 = \{(x,y),\ x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$. Ceci n'est pas surprenant : les points géométriques de $\mathbf{R}^2$ possèdent deux coordonnées, et les complexes sont caractérisés par deux scalaires : partie réelle et partie imaginaire. Ce constat nous mène tout droit à la définition suivante.

Définition ALG.1.3 | Affixe

Soit $\mathrm{M} = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, l'élément $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbf{C}$ est appelé *affixe* de M.
Soit $u = (x,y)$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$, l'élément $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbf{C}$ est appelé *affixe* de u.

La notion d'affixe permet donc de relier la géométrie du plan dans $\mathbf{R}^2$ aux complexes; on pourra donc se servir largement des complexes pour traiter des problèmes de géométrie.

Proposition ALG.1.1 | Quelques propriétés des complexes

Soient $z, z' \in \mathbf{C}$.

1. **(Existence d'un élément inverse)** Si $z \neq 0$, alors z est inversible dans $\mathbf{C}$ *i.e.* il existe $z' \in \mathbf{C}$ tel que $zz' = z'z = 1$.
2. **($\boxed{\mathbf{R}}$-linéarité de la partie réelle/imaginaire)** pour tous $\boxed{\lambda \in \mathbf{R}}$ et $z \in \mathbf{C}$, alors
$$\mathrm{Re}\left(\lambda z\right) = \lambda\,\mathrm{Re}\left(z\right), \quad \mathrm{Im}\left(\lambda z\right) = \lambda\,\mathrm{Im}\left(z\right).$$
3. **(Conjugué d'une somme/d'un produit)**
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$
4. **(Partie réelle/imaginaire en fonction du conjugué)**
$$\mathrm{Re}\left(z\right) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}\left(z\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}).$$
5. $z \in \mathbf{R} \iff \overline{z} = z$ et $z \in i\mathbf{R} \iff \overline{z} = -z$.

[2] *i.e.* l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle

Preuve

1. On anticipe légèrement sur la définition qui suit, si $z = x + \mathrm{i}\,y \neq 0$ alors $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. On vérifie aisément que z' défini par $z' = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ est un inverse pour le complexe z.
2. **($\boxed{\mathbf{R}}$-linéarité de la partie réelle/imaginaire)** soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $z \in \mathbf{C}$, alors $\mathrm{Re}\left(\lambda z\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda(x + \mathrm{i}\,y)\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda x + \mathrm{i}\,\lambda y\right) = \lambda x = \lambda\,\mathrm{Re}\left(z\right)$ et de la même manière $\mathrm{Im}\left(\lambda z\right) = \lambda\,\mathrm{Im}\left(z\right)$.
3. **(Conjugué d'une somme)** le conjugué de $z + z' = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y')$ avec $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$, $(x, x', y, y') \in \mathbf{R}^4$ est $(x + x') - \mathrm{i}\,(y + y') = (x - \mathrm{i}\,y) + (x' - \mathrm{i}\,y')$ c'est donc aussi la somme des conjugués.
4. **(Partie réelle/imaginaire en fonction du conjugué)** calcul explicite direct : en sommant un complexe et son conjugué on fait disparaitre la partie réelle, de-même pour la partie imaginaire.
5. Par exemple pour caractériser les réels, avec les mêmes notations que précédemment : $z = \overline{z}$ si et seulement si $x = x$ et $y = -y$ donc si et seulement si $y = 0$.

Définition ALG.1.4 | Complexe inverse

Si $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbf{C}^\star$, alors on définit[3] le complexe $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}\,y}$ comme étant :

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Méthode — Expression conjuguée

Dans la preuve précédente on a utilisé une technique classique pour obtenir l'inverse d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On peut la résumer comme suit :

$$\frac{1}{x+\mathrm{i}\,y} = \frac{x-\mathrm{i}\,y}{(x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y)} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

2. FORME EXPONENTIELLE

Nous avons vu que $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^2$ sont deux ensembles très proches, et même en bijection. De la même manière qu'un point de $\mathbf{R}^2$ peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes et polaires, un complexe peut être écrit en forme algébrique ou comme nous allons le voir de suite sous *forme trigonométrique*.

2.1. Module

Soient $z \in \mathbf{C}$, $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Remarquons que :

$$z\overline{z} = (x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y) = x^2+y^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, la quantité $z\overline{z}$ est réelle positive, on peut donc considérer sa racine carrée.

[3] Il s'agit bien d'une définition, bien entendu inspirée de la technique de l'« expression conjuguée »

Définition ALG.1.5 | Module

On appelle *module* de z le réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$, que l'on note $|z|$.

Pour $z \in \mathbf{R}$, on retrouve la valeur absolue : $z = x \in \mathbf{R}$, $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$. Notons aussi au passage la factorisation suivante :

$$x^2+y^2 = (x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y).$$

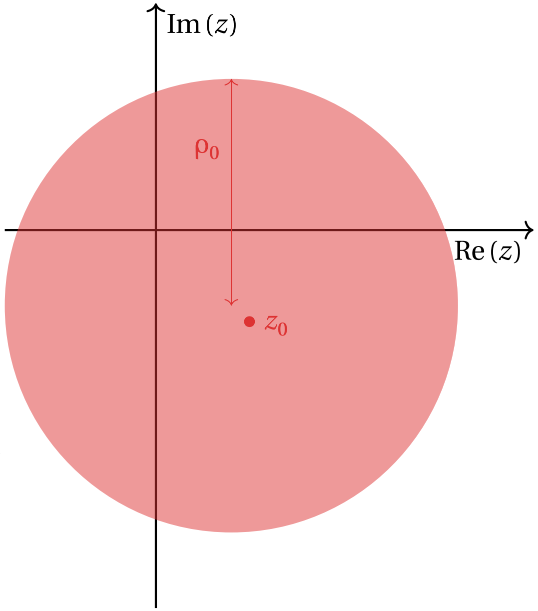
Remarque 2.1 — Interprétation géométrique du module Soient M_0 un point d'affixe z_0 et $\rho_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Alors l'ensemble des points $\mathrm{M}(z) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$|z - z_0| = \rho_0$$

est le *cercle de centre* M_0 *et de rayon* ρ. De même,

$$\{z \in \mathbf{C},\ |z - z_0| \leqslant \rho_0\}$$

est le *disque de centre* M_0 *et de rayon* ρ_0. En particulier, prenant $z_0 = 0$ on obtient $|z| = \mathrm{d}(\mathrm{O}, \mathrm{M}(z))$, c'est donc la distance entre $\mathrm{M}(z)$ et l'origine.



Proposition ALG.1.2 | Propriétés du module

Soient $z, z' \in \mathbf{C}$.

1. **(Multiplicativité du module)** $|zz'| = |z|.|z'|$. De plus si $z \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

2. **(Développement du module au carré)**

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$

3. **(Expression du produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^2$)** Notons $u = (x, y), u' = (x', y')$, avec $(x, x', y, y') \in \mathbf{R}^4$ tel que $z = x + iy, z' = x' + iy'$,

$$\langle u | u' \rangle = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right).$$

Preuve Calculs directs.

Nous rappelons également sans démonstration l'inégalité triangulaire vue en première année.

Théorème ALG.1.1 | Inégalité triangulaire

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

De plus, l'égalité est réalisée si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$. On dit aussi que z et z' sont *positivement liés.*

2. **(Version généralisée)** Soit $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de complexes. Alors :

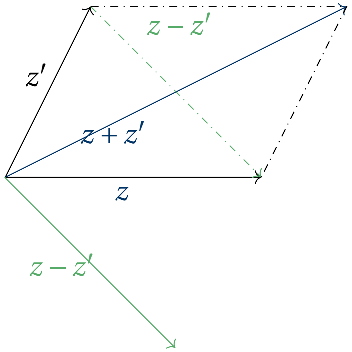
$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Proposition ALG.1.3 | Identité du parallélogramme

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, alors :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

L'interprétation géométrique est la suivante : la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est la somme des carrés des longueurs des côtés. Ce résultat peut se retrouver avec le théorème de Pythagore dans le cas d'un rectangle.



Preuve

Dans les résultats qui précèdent, nous avons souvent eu besoin de développer des modules de somme au carré. Cette formule de développement doit être bien comprise et mémorisée, elle résumée dans la méthode ci-après.

Méthode Développement d'une norme de somme au carré

Soit $|z + z'|^2$ avec $z, z' \in \mathbf{C}$.

1. Écrire la quantité en fonction du conjugué : $|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')}$.
2. Développer.

En revanche, on oublie de suite le développement suivant.

Attention

On oublie la formule *archi*-fausse suivante :

$$|z+z'|^2 \boxed{\neq} |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|.$$

L'objectif est à présent d'arriver à la définition de la forme exponentielle d'un nombre complexe, on commence pour cela par définir :

- l'exponentielle d'un imaginaire pur,
- puis l'exponentielle générale d'un nombre complexe.

2.2. Exponentielle imaginaire

Notation Modulo

Soient $x, y, z \in \mathbf{C}$, alors « $x \equiv y\ [z]$ » signifie $x = y + kz$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$.

Définition ALG.1.6 | Nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre complexe de forme algébrique

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Ce nombre est appelé *exponentielle imaginaire* de $\theta \in \mathbf{R}$. On note de plus $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

Attention

Le complexe j utilisé par les physiciens (pour éviter les confusions avec l'intensité électrique) est le complexe i de ce chapitre.

Pour l'instant, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ n'est donc qu'une notation ! Les propriétés de cette notation, qui permettront d'effectuer des calculs, sont données dans la proposition suivante. Par exemple, la quantité $\mathrm{e}^{1+3\mathrm{i}}$ n'est pas encore définie. Mais si l'on note tout ceci avec une exponentielle c'est qu'elle va sûrement hériter des mêmes propriétés que l'exponentielle réelle connue depuis le lycée. Les voici.

Proposition ALG.1.4 | Propriétés de l'exponentielle imaginaire

Soient $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$ deux réels. Alors :

1. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$, $\quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ \theta = 2k\pi$.
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = i$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.
4. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta \equiv \theta'\ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi$.
5. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$, on a : $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}$,
6. **(Formule de Moivre)** $\quad \forall\theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$.

Preuve Voir le cours de première année.

Les formules ci-après paraissent anecdotiques au premier abord, mais elles seront d'intérêt capital pour toutes les applications des nombres complexes en trigonométrie.

Proposition ALG.1.5 | Formules d'Euler

$$\forall\theta \in \mathbf{R}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right).$$

Preuve Immédiate en utilisant les propriétés de parité de cos et sin.

Proposition ALG.1.6 | Relèvement

Tout complexe $z \in \mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$ peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbf{R}$. Autrement dit, l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}\right. \quad \text{est surjective.}$$

Preuve Admis.

2.3. Exponentielle générale e^z et forme exponentielle

Nous avons vu dans la partie précédente que $e^{i\theta}$ est le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$. Il est de module un. Maintenant nous allons chercher à exprimer les autres nombres complexes en fonction de cette exponentielle.

Définition ALG.1.7 | Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe **non nul**.
Alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. Un tel réel θ est appelé *un argument* de z et il est noté $\operatorname{Arg}(z)$. L'ensemble des arguments de z est alors $\theta + 2\pi\mathbf{Z} = \{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, on note cela

$$\operatorname{Arg}(z) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

On utilise en général pas le signe « = » à cause de la non-unicité de l'argument.

Définition ALG.1.8 | Forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture

$$z = |z|\, e^{i\operatorname{Arg}(z)}$$

est appelée *forme exponentielle* (ou *forme trigonométrique*) de z.

Avant de poursuivre, on introduit un complexe relativement usuel donné sous forme exponentielle, noté j[4], qui interviendra dans une prochaine section.

Notation Complexe j

On note généralement $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition ALG.1.7 | Propriétés de j

- $j^3 = 1, \quad \bar{j} = j^2$,
- $1 + j + j^2 = 0$.

[4] attention, il ne s'agit pas « du j » utilisé par les physiciens, qui quant à lui désigne notre i — eh oui, la vie est mal faite !

Preuve

-
-

Méthode Mettre sous forme exponentielle un nombre complexe

Soit $z \neq 0$.

1. Calculer $|z|$, puis $\frac{z}{|z|}$.
2. Chercher $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, *i.e.* tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

La forme exponentielle est alors : $z = |z|\, e^{i\theta}$. Il arrive parfois que l'angle θ

Méthode Technique de l'angle moitié (forme trigonométrique d'une somme d'exponentielles imaginaires)

Soient deux nombres complexes z, z' de module un donnés sous forme trigonométrique : $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ avec $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi[^2$. Alors la forme trigonométrique de $z + z'$ s'obtient par le calcul suivant :

$$z + z' = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)$$
$$= 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).$$

La méthode s'adapte à $z - z'$ en faisant apparaitre un sinus. On obtient alors facilement module et argument :

$$|z+z'| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|, \quad \mathrm{Arg}\,(z+z') \equiv \frac{\theta+\theta'}{2} \quad [2\pi]\,.$$

Exemple 1 — Déterminer module et argument de $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0,\pi[$. Que dire si $\theta \in [\pi, 2\pi[$? *On met en facteur l'angle moitié, i.e.* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0+\theta}{2}}$. *Nous avons alors :*

$$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{0+\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0+\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

Alors $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *puisque* $\theta \in [0,\pi[$. *Donc la forme trigonométrique de* $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *est*

$$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \boxed{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}.$$

Si $\theta \in [\pi, 2\pi[$, *alors* $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. *Donc la forme exponentielle est :*

$$\begin{aligned} 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \boxed{\left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{2}}\right)}. \end{aligned}$$

Passons à quelques propriétés de l'argument d'un nombre complexe, qui découlent des propriétés déjà établies sur l'exponentielle imaginaire.

Proposition ALG.1.8 | Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux complexes non nuls. Alors :

1. $\mathrm{Arg}(zz') \equiv \mathrm{Arg}\,(z) + \mathrm{Arg}\,(z') \quad [2\pi]$,
2. $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \mathrm{Arg}\,(z) - \mathrm{Arg}\,(z') \quad [2\pi]$,
3. $\mathrm{Arg}(\overline{z}) \equiv -\mathrm{Arg}\,(z) \quad [2\pi]$.

Preuve Découlent essentiellement des propriétés établies sur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

Proposition ALG.1.9 | Caractérisation de l'égalité de nombres complexes

Soient z, z' deux nombres complexes. Alors :

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) &= \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) &= \mathrm{Im}\,(z') \end{cases} \iff \begin{cases} |z| &= |z'| \\ \mathrm{Arg}\,(z) &\equiv \mathrm{Arg}\,(z') \quad [2\pi]\,. \end{cases}$$

Remarque 2.2 — Comment choisir la forme à utiliser ? Lorsque l'on cherche à démontrer un résultat sur des nombres complexes, il ne faut **pas** systématiquement l'écrire sous forme algébrique :

$$z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

Cette forme est adaptée aux problèmes «additifs», où ce qui intervient est plutôt des sommes (ou plus généralemnt des combinaisons linéaires) de complexes. Les problèmes « multiplicatifs » se résolvent mieux en utilisant la forme exponentielle lorsque $z \neq 0$:

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)}.$$

Définition ALG.1.9 | Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z \in \mathbf{C}$. On définit l'*exponentielle* de z comme étant le complexe noté e^z suivant :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Remarque 2.3 — Attention à bien comprendre la nature des exponentielles ci-dessus. Comme $\mathrm{Re}(z) \in \mathbf{R}$, la première est l'exponentielle réelle définie au lycée comme unique solution de l'équation différentielle $y' = y, y(0) = 1$. La seconde, en revanche, a été définie dans la sous-section 2.2.

En tenant compte des propriétés de l'exponentielle réelle d'une part, et de l'exponentielle imaginaire d'autre part, on obtient la proposition suivante.

Proposition ALG.1.10 | Propriétés de l'exponentielle complexe

1. Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, on a : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}.\mathrm{e}^{z'}$, $\mathrm{e}^{z-z'} = \frac{\mathrm{e}^{z}}{\mathrm{e}^{z'}}$.
2. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a : $\mathrm{e}^{z} = 1 \iff z \in 2\mathrm{i}\pi\mathbf{Z}$.
3. Enfin, tout complexe non nul $Z \in \mathbf{C}^*$ peut s'écrire sous la forme $Z = \mathrm{e}^{z}$ pour un certain $z \in \mathbf{C}$. Autrement dit, l'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{z} \end{array}\right.$ est surjective.

Attention Non-existence d'un logarithme complexe

La dernière assertion ne dit pas que $z \longmapsto \mathrm{e}^{z}$ est une bijection, nous n'avons donc pas construit de logarithme complexe.[5]

Preuve

Exemple 2 — Soit $z \in \mathbf{C}$.

1. Calculer module, argument, partie réelle et partie imaginaire de e^{z}.
2. Déterminer ensuite l'ensemble $\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{e}^{z} = 1\}$. Existe-t-il un logarithme complexe, *i.e.* $\exp : z \in \mathbf{C} \longmapsto \mathrm{e}^{z}$ est-elle une bijection ?

[5] Il en existe en fait une infinité, mais cela dépasse largement le cadre de notre programme.

On résume les différentes propriétés, avantages et inconvénients de chacune des deux formes. La forme exponentielle est donc

	Forme cartésienne	Forme exponentielle
Lien	$x = r + \mathrm{i}\,y$	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
Égalité	$z = z' \iff x = x',\ y = y'$	$z = z' \iff r = r',\ \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$
Somme	$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y')$	$\bar{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$
Produit	$z \times z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}\,(xy' + x'y)$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$
Puissance	$\cdots$	$z \times z' = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
Inverse	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}$	$z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$
Quotient	$\cdots$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$.

2.4. Complément – racines n-ièmes d'un complexe [H.P]

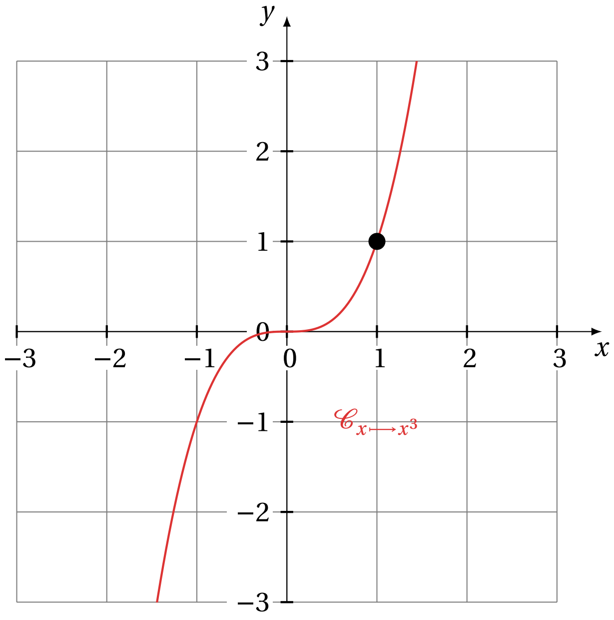
Cette sous-section porte le label [H.P] , cependant elle est très classique, et tombe régulièrement dans les sujets d'écrits.

De manière générale, on appelle «racine n-ième» d'un objet mathématique une quantité qui élevée à la puissance n donne cet objet (l'objet en question peut être un réel, un complexe ou même une matrice).

Regardons pour commencer un exemple. Notons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et considérons l'équation $z^3 = 1$ avec $z \in \mathbf{K}$.

1. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, l'équation n'admet qu'une solution : 1.
2. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on voit que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/3}$ convient, mais aussi $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,\pi/3}$ – et en fait nous allons montrer que ce sont les seules.

On constate que : l'ensemble des racines cubiques complexes de 1 contient l'ensemble des racines cubiques réelles de 1, et il y en a systématiquement au moins autant dans $\mathbf{C}$ que dans $\mathbf{R}$.



Passons à présent au cas général.

Définition ALG.1.10 | Racines n-ième

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbf{C}$. On appelle *racine n-ième* de α tout complexe $z \in \mathbf{C}$ tel que $z^n = \alpha$, *i.e.* une racine du polynôme $X^n - \alpha$.

- On note $\mathbf{U}_n(\alpha)$ l'ensemble des racines de $X^n - \alpha$. Si $\alpha = 1$, on parle de *racine n-ième de l'unité, i.e.* les racines de $X^n - 1$. On notera $\mathbf{U}_n$ l'ensemble de ces complexes.
- Si $n = 2$, on parle de *racine carrée* de α, pour $n = 3$ de *racine cubique*.

Il s'agit d'un problème multiplicatif (avec des puissances), donc la bonne forme à adopter est la forme exponentielle, nous allons très largement nous en servir dans la suite.

Notation

- Les notations $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt[n]{\alpha}$ sont réservées à $\alpha \in \mathbf{R}_+$ (ou bien $\alpha \in \mathbf{R}$ si n est impair).
- Les notations $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt[n]{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ sont **interdites** (elles n'ont aucun sens car il n'y a pas unicité).

Que nous donne la théorie des polynômes ? Le polynôme $X^n - \alpha$ étant de degré n, nous savons qu'il possède au plus n racines (voir le Chapter ALG.2 pour plus de détails). On peut même encore préciser : comme $(X^n - \alpha)' = nX^{n-1}$ et que 0 n'est pas racine, on sait que toutes les racines de $X^n - \alpha$ sont simples. En conclusion : nous avons alors accès au nombre de racines n-ièmes de l'unité

$$\boxed{\# \mathbf{U}_n = n}.$$

On va donc déterminer à présent explicitement les racines d'un complexe α.

Théorème ALG.1.2 | Racines n-ième d'un complexe α [H.P]

Soient $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbf{C}^*$ un complexe non nul, $\rho = |\alpha|$ et θ un argument de α. L'ensemble des racines n-ièmes complexes de α est

$$\mathbf{U}_n(\alpha) = \left\{ \underbrace{\boxed{\rho^{\frac{1}{n}} . e^{i\frac{\theta}{n}}}}_{\text{une racine } n\text{-ième de } \alpha} \times e^{\frac{2i\pi}{n}k},\ k \in [\![0\,,\,n-1]\!] \right\}.$$

En faisant $\alpha = 1$ (*i.e.* $\rho = 1, \theta = 0$) dans l'énoncé précédent, nous déduisons le corollaire ci-après.

Corollaire ALG.1.1 | Racines n-ième de l'unité [H.P]

Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (*i.e.* de 1) est :

$$\mathbf{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi}{n}k},\ k \in [\![0\,,\,n-1]\!] \right\}.$$

En particulier :

$$\mathbf{U}_2 = \{1, -1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_3 = \left\{1, j, j^2\right\} = \left\{1, j, \bar{j}\right\}.$$

On retrouve bien entendu le fait qu'il y a n racines n-ièmes, que ce soit pour un complexe non nul ou bien 1.

Attention

Les calculs doivent être refaits à chaque fois pour le n considéré, et vous ne pouvez pas vous servir de ce théorème tel quel.

Méthode — Calculs de racines n-ième de complexes

On cherche donc les solutions de $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ il n'y a que zéro comme solution).

1. Calculer la forme trigonométrique de $\alpha = \rho e^{i\theta}$.
2. Chercher z sous la forme $z = \rho' e^{i\theta'}$.
3. En remplaçant, on obtient comme conditions $(\rho')^n = \rho$ et $n\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Résoudre ces deux équations puis conclure.

Dans la pratique, la méthode sous-entend que l'on est capable de trouver une racine n-ième de α.

Preuve *(Point clef — **Chercher les solutions sous forme exponentielle**)*

Exemple 3 — *Structure géométrique*

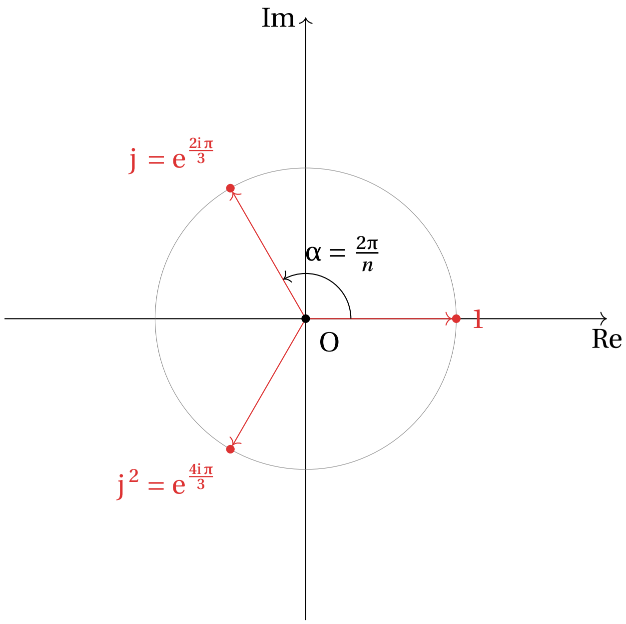
1. Déterminer $\mathbf{U}_4$. *On refera le calcul, puis on contrôlera le résultat avec l'énoncé précédent.*

2. Dessiner les points géométriques d'affixes les éléments de $\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$ et $\mathbf{U}_4$. Que remarque-t-on ?

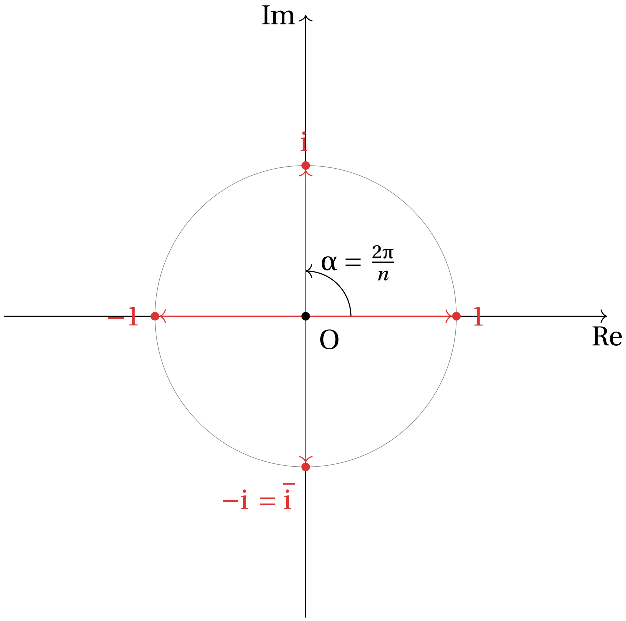
3. Déterminer les racines quatrièmes de -16.

4. Déterminer les racines cubiques de $1+\mathrm{i}$.

Visualisation graphique des racines de l'unité On propose deux situations, celui des racines troisièmes et quatrièmes.



(a) Racines cubiques



(b) Racines quatrièmes

3. TRIGONOMÉTRIE & APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

Les applications sont très nombreuses, nous ne précisions ici qu'une infime partie d'entre elles. Notamment celles en trigonométrie, ceci est dû à l'exponentielle complexe qui fournit un pont entre les deux domaines. Ces applications trigonométriques ont été largement utilisées dans de nombres disciplines, notamment en physique pour l'étude de circuits électriques en régime sinusoïdal forcé.

3.1. En trigonométrie

3.1.1. Formulaire

On rappelle dans cette sous-section les formules principales de trigonométrie à très bien connaître, ainsi qu'une roue de secours pour certaines d'entre elles faisant intervenir les nombres complexes. Les définition de cos, sin, tan étant supposées connues.

Proposition ALG.1.11

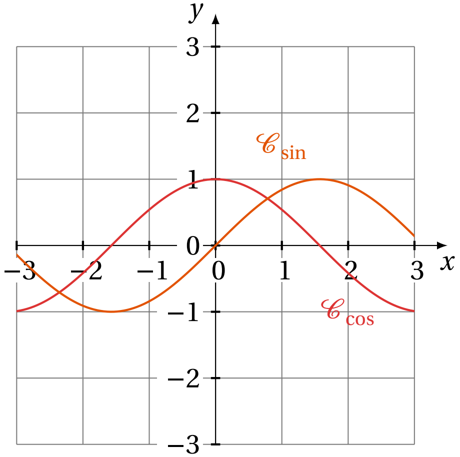
Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}$ et $2\pi-$périodiques. La fonction sinus est impaire, et la fonction cosinus est paire. De plus :

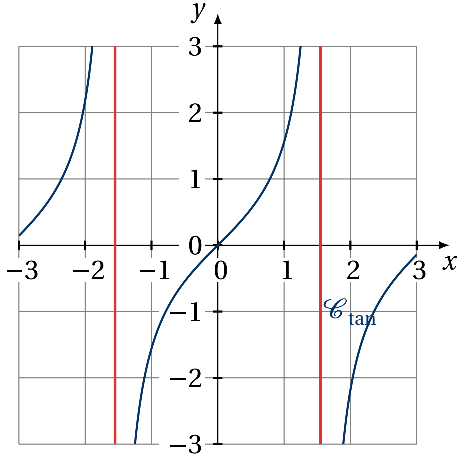
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Proposition ALG.1.12

La fonction tangente est définie et dérivable sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ et est $\pi-$périodique. La fonction tangente est impaire. De plus,

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$





Par simple lecture graphique sur le cercle trigonométrique (*cf.* le cours de 1ère année), nous déduisons les résultats ci-après.

Proposition ALG.1.13 | Résolution d'équations

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
$$\cos(x) = \cos(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + 2k\pi) \quad \text{ou} \quad (x = -y + 2k\pi).$$
2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
$$\sin(x) = \sin(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + 2k\pi) \quad \text{ou} \quad (x = \pi - y + 2k\pi).$$
3. Soit $(x, y) \in \mathscr{D}_{\tan}^2$,
$$\tan(x) = \tan(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ (x = y + k\pi).$$

Exemple 4 — Résoudre $\sin x = \cos x$ en $x \in \mathbf{R}$.

Proposition ALG.1.14 | Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition ALG.1.15 | Formules d'addition

Soient $x, y \in \mathbf{R}$.
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$.

En cas de trou de mémoire sur l'une des formules ci-après, toujours refaire un dessin de cercle trigonométrique.

Corollaire ALG.1.2 | Formules de transformation d'angles

Soit $x \in \mathbf{R}$.

- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Et enfin, les cas particuliers $x = y$ dans les formules d'addition fournissent les formules dites de duplication.

Corollaire ALG.1.3 | Formules de duplication / anti-linéarisation

Soit $x \in \mathbf{R}$.
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Ou encore, de manière équivalente, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire ALG.1.4 | Formules de linéarisation

Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors :
- $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Une application importante de ces formules est le calcul d'intégrales de la forme $\int_a^b \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a < b$ deux réels. Des exemples seront faits dans le Chapter ANA.11. On obtient immédiatement le corollaire ci-après.

Une dernière conséquence des formules d'addition est la transformation d'expressions trigonométriques en cos ou sin.

Méthode Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée »

Soient $a, b, x \in \mathbf{R}$. On souhaite transformer l'expression $\mathrm{E}(x) = a\cos x + b\sin x$ en $\rho\cos(x+\varphi)$, avec $\rho \in \mathbf{R}^+, \varphi \in \mathbf{R}$.

1. Mettre $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ en facteur, de sorte que
$$\mathrm{E}(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$
2. Comme $\left(\frac{a}{\rho}, -\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle unité, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(-\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \qquad -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$
3. Alors $\mathrm{E}(x) = \cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi = \cos(x+\varphi)$.

Une méthode analogue existe si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Remarque 3.1 — Interprétation La somme deux signaux sinusoïdaux est encore un signal sinusoïdal.

Exemple 5 — Écrire sous forme d'un sinus puis d'un cosinus l'expression $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbf{R}$.

3.2. Techniques calculatoires

Les nombres complexes, grâce à l'exponentielle complexe, fournissent une méthode beaucoup plus efficace que les formules précédentes pour linéariser et anti-linéariser des expressions trigonométriques compliquées. Rappelons la méthode.

Méthode — Linéarisation & Antilinéarisation avec des complexes

1. **(Pour linéariser $\cos^k\theta, \sin^k\theta$)** écrire
$$\cos^k\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^k, \quad \sin^k\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^k,$$
puis développer avec le binôme, regrouper les termes avec leur conjugué, utiliser les formules d'EULER.
2. **(Pour antilinéariser $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$)** écrire
$$\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^k\right),$$
$$\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{ik\theta}\right) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^k\right),$$
puis développer avec le binôme et calculer les parties réelles et imaginaires.

Exemple 6 — *Linéarisation* Soit $x \in \mathbf{R}$. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^3 x$ en utilisant les nombres complexes

Exemple 7 — *Anti-Linéarisation* Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, en utilisant les nombres complexes.

Les complexes peuvent rendre de multiples services en trigonométrie, y compris les calculs de sommes de fonctions trigonométriques, comme le montrent les exemples ci-après.

Méthode Calculs de sommes trigonométriques

1. Écrire $\cos, \sin$ comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\dots)$, *i.e.* : $\operatorname{Re}\left(\sum \dots\right) = \sum \operatorname{Re}(\dots)$, $\operatorname{Im}\left(\sum \dots\right) = \sum \operatorname{Im}(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

Exemple 8 — Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$ les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Exemple 9 — Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos x \neq$

0.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right)}{(\cos x)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k}\right) && \text{$(\cos x)^k$ \textit{est réel}} \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right) && \text{\textit{la partie réelle est linéaire}} \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}\right) && \text{\textit{somme de termes d'une suite géométrique, car $\cos x \neq e^{ix}$ pour les x qui nous intéressent}} \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{\frac{\cos x - e^{ix}}{\cos x}}\right) && \text{\textit{réduction au même dénominateur}} \\
&= \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}}\right) && \frac{1}{\cos^n(x)} \in \boldsymbol{R} \\
&= \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\cos^{n+1} x - (\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x)}{\cos x - (\cos x + i\sin x)}\right) && \text{\textit{forme algébrique des nombres complexes}} \\
&= \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{Re}\left(\frac{(\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x) - i\sin(n+1)x}{-i\sin x}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}}.
\end{aligned}
$$

4. EXERCICES

Exercice ALG.1.1 | Vrai ou Faux ?

1. Soit $z \in \mathbf{C}$, la partie imaginaire de $\mathrm{i}\, z$ est égale à celle de z.
2. Soient $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Alors $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2|$.
3. Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors le conjugué de e^z est $\mathrm{e}^{\overline{z}}$.

4.1. Généralités

Exercice ALG.1.2 | Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right)$. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{1}{1 + \mathrm{i} \tan\theta}$.

Solution (exercice ALG.1.2)

Il s'agit de trouver une forme exponentielle pour $1 + \mathrm{i}\tan\theta$. Nous avons $1 + \mathrm{i}\tan\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} + \frac{\mathrm{i}\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right)$. Or, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$, donc

$$1 + \mathrm{i}\tan\theta = \frac{1}{|\cos\theta|}\left(|\cos\theta| + \mathrm{i}\,|\cos\theta|\tan\theta\right).$$

- si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{i}\tan\theta &= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + \mathrm{i}\cos\theta\tan\theta\right) \\ &= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right) = \boxed{\frac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}. \end{aligned}$$

En passant à l'inverse, on déduit alors :

$$\boxed{\left|\frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\theta}\right| = \cos\theta, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\theta}\right) = -\theta \quad [2\pi].}$$

- si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right[$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{i}\tan\theta &= -\frac{1}{\cos\theta}\left(-\cos\theta - \mathrm{i}\cos\theta\tan\theta\right) \\ &= -\frac{1}{\cos\theta}\left(\cos(\theta+\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\pi)\right) = \boxed{-\frac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}}. \end{aligned}$$

En passant à l'inverse, on déduit alors :

$$\boxed{\left|\frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\theta}\right| = -\cos\theta, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\theta}\right) = -\theta - \pi \quad [2\pi].}$$

Attention à ne pas simplifier le signe moins dans ce second cas, $1/\cos\theta$ *étant négatif ce n'est pas le module.*

Exercice ALG.1.3 | Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et un argument de : $\alpha = (1 + \cos x + \mathrm{i}\ \sin x)^n$ et $\beta = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$.

Solution (exercice ALG.1.3)

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-\pi, \pi[$. Il s'agit de déterminer les formes exponentielles des deux complexes.

$$\begin{aligned} 1 + \cos x + \mathrm{i}\sin x &= 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{formules d'Euler.} \end{aligned}$$

technique de l'angle moitié

Attention, ici nous n'obtenons pas forcément le module et l'argument, cela dépend du signe de $2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Mais comme $x \in]-\pi, \pi[$, alors $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0$, on déduit alors la forme trigonométrique de α :

$$\alpha = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}.$$

$\boxed{\text{L'argument est donc } 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\text{, et un module est } \frac{nx}{2}.}$ Pour le second, on met sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned}\beta^n &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n \\ &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= \boxed{2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{12}}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le module est } 2^{\frac{n}{2}}\text{, un argument est } \frac{n\pi}{12}.}$

Exercice ALG.1.4 | Soient A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre [AB] si et seulement si : $2z\overline{z}-(\overline{a}+\overline{b})z-(a+b)\overline{z}+a\overline{b}+\overline{a}b=0$.

Solution (exercice ALG.1.4)

L'appartenance au cercle en question s'exprime à l'aide de l'affixe du centre et d'un module. L'affixe du centre du cercle est $\frac{a+b}{2}$, et la distance d'un point M(z) au centre est

$$\left|z-\frac{a+b}{2}\right|.$$

Ainsi, la condition d'appartenance au cercle est la suivante :

$$\begin{aligned}M(z)\in\Gamma &\iff \left|z-\frac{a+b}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2} \\ &\iff \left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2 = \frac{|b-a|^2}{4} \quad \text{élévation au carré} \\ &\iff \left(z-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{1}{4}(b-a)\overline{(b-a)} \\ &\iff (2z-a+b)\overline{(2z-a+b)} = (b-a)\overline{(b-a)} \\ &\iff (2z-a-b)(2\overline{z}-\overline{a}-\overline{b}) = (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) \\ &\iff 4|z|^2-2z\overline{a}b-2z\overline{b}-2a\overline{z}+|a|^2+a\overline{b}-2b\overline{z}+b\overline{a}+|b|^2 \\ &\quad = |b|^2+|a|^2-b\overline{a}-\overline{b}a.\end{aligned}$$

En simplifiant et en divisant par deux, on trouve la condition de l'énoncé :

$$\boxed{2z\overline{z}-(\overline{a}+\overline{b})z-(a+b)\overline{z}+a\overline{b}+\overline{a}b=0}.$$

4.2. Résolution d'équations & Racines

Exercice ALG.1.5 | Résoudre dans **C** l'équation : $z^6+1=i\sqrt{3}$.

Solution (exercice ALG.1.5)

On cherche z sous la forme exponentielle $z=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho\geqslant 0$ et $\theta\in[0,2\pi[$. On a

$$\begin{aligned}z^6+1=i\sqrt{3} &\iff \rho^6e^{6i\theta}=-1+i\sqrt{3} \\ &\iff \rho^6e^{6i\theta}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\iff \rho^6e^{6i\theta}=2e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &\iff \rho^6=2,\quad 6\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}, \\ &\iff \rho=\sqrt[6]{2},\quad \theta=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},\quad k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left\{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}},\ k\in\mathbf{Z}\right\}.}$ *On peut aussi ne garder que les six premières valeurs de k*

Exercice ALG.1.6 | **Autour des racines 7-ièmes** Soient $u=e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S=u+u^2+u^4$ et $T=u^3+u^5+u^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués, et que Im (S) $\geqslant 0$.
2. Calculer S + T et ST.

3. En déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad \sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solution (exercice ALG.1.6)

1. Constatons que $\overline{u}=\overline{e^{i\frac{2\pi}{7}}}=e^{-i\frac{2\pi}{7}}=e^{-i\frac{2\pi}{7}+2i\pi}=e^{i\frac{12\pi}{7}}=u^6$. De-même :

$$\overline{u^2}=\overline{u}^2=(u^6)^2=u^{12}=u^7u^5=1.u^5=u^5,$$

et

$$\overline{u^4}=\overline{u}^4=(u^6)^4=u^{24}=u^{3\times7}u^3=(u^7)^3u^5=1.u^5.$$

Les termes de S, T sont donc conjuguées dans le même ordre, et par propriété de la conjugaison, on obtient $\boxed{\overline{S}=T.}$ La deuxième partie est plus technique, on utilise la formule de Moivre, puis on calcule les puissances :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}(S)\\
&=\operatorname{Im}\left(\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)\right.\\
&\left.+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^2+\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^4\right)\\
&=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)\\
&=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)-4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)
\end{aligned}$$

La partie imaginaire est donc du signe de la parenthèse car $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\geqslant 0$, et elle vaut

$$\begin{aligned}
&1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)-4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\\
&=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)\\
&=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)2\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\geqslant 0
\end{aligned}$$

puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\geqslant 0$. Donc finalement $\boxed{\operatorname{Im}(S)\geqslant 0.}$

2.

$$S+T+1=\sum_{k=0}^{6}u^k=\frac{1-u^7}{1-u}=\frac{1-1}{1-u}=\quad\Longrightarrow\quad\boxed{S+T=-1}$$

Puis

$$\begin{aligned}
ST&=(u+u^2+u^4)(u^3+u^5+u^6)\\
&=u^4+u^6+u^7+u^5+u^7+u^8+u^7+u^9+u^{10}\\
&=u^4+u^6+1+u^5+1+u+1+u^2+u^3,\quad\text{en utilisant } u^7=1,\\
&=2+(S+T)=2+(-1)\boxed{=1.}
\end{aligned}$$

3. Constatons que

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=\operatorname{Re}(S)\quad\text{et}\quad\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\operatorname{Im}(S).$$

Or, $T=\overline{S}$ et $S+T=-1$ donc $S+\overline{S}=-1=2\operatorname{Re}(S)=-1$, donc $\boxed{\operatorname{Re}(S)=-\frac{1}{2}}$.
De plus, $ST=S\overline{S}=|S|^2=1$, donc S est de module un. Or, $\operatorname{Re}(S)^2+\operatorname{Im}(S)^2=1$, donc $\operatorname{Im}(S)^2=1-\operatorname{Re}(S)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, on déduit que :

$$\operatorname{Im}(S)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice ALG.1.7 | Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{C}$:

1. $e^z=-7$.
2. $e^{2z}=-8+8i$.
3. $i+e^{z+2}=\sqrt{3}$.

Solution (exercice ALG.1.7)

Notons $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbf{R}$ dans tout l'exercice. Rappelons que $e^z=e^xe^{iy}$. Alors on résout

1.

$$\begin{aligned} e^z = -7 \quad &\iff \quad e^x e^{iy} = 7e^{i\pi} \\ &\iff \quad e^x = 7, \quad y = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ &\iff \quad x = \ln 7, \quad y = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les complexes de $\boxed{\{\ln 7 + i(2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}}$.

2.

$$\begin{aligned} e^z = -8+8i \quad &\iff \quad e^x e^{iy} = 8\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &\iff \quad e^x = 8\sqrt{2}, \quad y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ &\iff \quad x = \ln(8\sqrt{2}) = \frac{7}{2}\ln 2, \quad y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les complexes de $\boxed{\left\{\frac{7}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}\right\}}$.

3.

$$\begin{aligned} i + e^{z+2} = \sqrt{3} \quad &\iff \quad e^{(x+2)+iy} = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ &\iff \quad e^{(x+2)+iy} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ &\iff \quad e^{x+2} = 2, \quad y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ &\iff \quad x = \ln 2 - 2, \quad y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les complexes de $\boxed{\left\{\ln 2 - 2 + i\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}\right\}}$.

Exercice ALG.1.8 | Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

Solution (exercice ALG.1.8)

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $z^k - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1$. Mettons l'angle moitié en facteur. Il vient alors :

$$\begin{aligned} z^k - 1 &= e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right), \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\pi\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Mais comme $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$, $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$. Donc :

$$\boxed{|z^k - 1| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad \operatorname{Arg}\left(z^k - 1\right) = \pi\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2}\right).}$$

2. $$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right| \\ &= 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{\frac{ni\pi}{n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) \\ &= 4\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right) \\ &= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right) \\ &= \boxed{\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}}. \end{aligned}$$

linéarité de la partie imaginaire

somme géométrique, $e^{i\pi}n \neq 1$

$e^{i\pi} = -1$

angle moitié

Exercice ALG.1.9 | Soit $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ fixé. On veut résoudre l'équation :

$$\text{(E)} \quad (1+iz)^3(1-i\tan\varphi) = (1-iz)^3(1+i\tan\varphi).$$

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $|1-iz| = |1+iz|$. En déduire que z est réel.
2. Posons $z = \tan\theta$. Justifier ce changement d'inconnue, puis résoudre (E).

Solution (exercice ALG.1.9)

1. Soit z une solution, alors passons au module : $|1+iz|^3\frac{1}{|\cos\varphi|} = |1-iz|^3\frac{1}{|\cos\varphi|}$ puisque $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. Donc en multipliant par $|\cos\varphi|$ et en utilisant la positivité des modules, on obtient : $\boxed{|1+iz| = |1-iz|.}$ Élevons ceci au carré, on a alors :

$$\begin{aligned} &|1+iz| = |1-iz| \\ \iff\ & |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\ \iff\ & (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \\ \iff\ & 1-i\bar{z}+iz+|z|^2 = 1-iz+i\bar{z}+|z|^2. \\ \iff\ & z=\bar{z}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z \in \mathbf{R}.}$

2. La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbf{R}$ et nous avons montré que z est réel. Posons dès lors, puisque $z\in\mathbf{R}$, $z=\tan\theta$ et résolvons l'équation ci-dessous en $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(1+i\tan\theta)^3(1-i\tan\varphi) = (1-i\tan\theta)^3(1+i\tan\varphi).$$

Elle est équivalente à

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^3 = \frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi},$$

ou encore, en multipliant par $\cos\theta$, $\cos\varphi$, au numérateur et dénominateur,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\right)^3 = e^{6i\theta} \\ &= \frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi} \end{aligned}$$

Donc on est amené à résoudre en $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$e^{6i\theta} = e^{2i\varphi}.$$

D'où $6\theta = 2\varphi+2k\pi$ avec $k\in\mathbf{Z}$, *i.e.* $\theta = \frac{\varphi+k\pi}{3}$. On ne garde ensuite que les solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{\tan\left(\frac{\varphi+k\pi}{3}\right),\ \frac{\varphi+k\pi}{3}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right\}}.$$

Exercice ALG.1.10 | **Autour des racines 7-ièmes** Soient $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués, et que $\mathrm{Im}(S) \geqslant 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST.
3. En déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solution (exercice ALG.1.10)

1. Constatons que $\overline{u} = \overline{e^{i\frac{2\pi}{7}}} = e^{-i\frac{2\pi}{7}} = e^{-i\frac{2\pi}{7}+2i\pi} = e^{i\frac{12\pi}{7}} = u^6$. De-même :

$$\overline{u^2} = \overline{u}^2 = (u^6)^2 = u^{12} = u^7 u^5 = 1.u^5 = u^5,$$

et

$$\overline{u^4} = \overline{u}^4 = (u^6)^4 = u^{24} = u^{3\times 7} u^3 = (u^7)^3 u^5 = 1.u^5.$$

Les termes de S, T sont donc conjuguées dans le même ordre, et par propriété de la conjugaison, on obtient $\boxed{\overline{S} = T.}$ La deuxième partie est plus technique, on utilise la formule de Moivre, puis on calcule les puissances :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(S)\\
&= \mathrm{Im}\Bigg(\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)\\
&+ \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^4\Bigg)\\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi}{7}\right)\\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)
\end{aligned}$$

La partie imaginaire est donc du signe de la parenthèse car $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geqslant 0$, et elle vaut

$$\begin{aligned}
&1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\\
&= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\left(1 + \cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)\\
&= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)2\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geqslant 0
\end{aligned}$$

puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geqslant 0$. Donc finalement $\boxed{\mathrm{Im}(S) \geqslant 0.}$

2. $$S + T + 1 = \sum_{k=0}^{6} u^k = \frac{1-u^7}{1-u} = \frac{1-1}{1-u} = \quad \Longrightarrow \quad \boxed{S + T = -1}$$

Puis

$$\begin{aligned}
ST &= (u + u^2 + u^4)(u^3 + u^5 + u^6)\\
&= u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10}\\
&= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3, \quad \text{en utilisant } u^7 = 1,\\
&= 2 + (S + T) = 2 + (-1)\boxed{= 1.}
\end{aligned}$$

3. Constatons que

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = \mathrm{Re}(S) \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \mathrm{Im}(S).$$

Or, $T = \overline{S}$ et $S + T = -1$ donc $S + \overline{S} = -1 = 2\,\mathrm{Re}(S) = -1$, donc $\boxed{\mathrm{Re}(S) = -\frac{1}{2}}$.
De plus, $ST = S\overline{S} = |S|^2 = 1$, donc S est de module un. Or, $\mathrm{Re}(S)^2 + \mathrm{Im}(S)^2 = 1$, donc $\mathrm{Im}(S)^2 = 1 - \mathrm{Re}(S)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, on déduit que :

$$\mathrm{Im}(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.3. Trigonométrie

Exercice ALG.1.11 | À l'aide des nombres complexes, établir que pour tous $(x,y)\in\mathbf{R}^2$:

1. $\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
2. $\sin(x)-\sin(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Solution (exercice ALG.1.11)

$$\begin{aligned}\cos x+\cos y &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}+e^{iy}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}}+e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\\ &= \boxed{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}.\end{aligned}$$

De-même :

$$\begin{aligned}\sin x-\sin y &= \mathrm{Im}\left(e^{ix}-e^{iy}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}}-e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\\ &= \boxed{2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Exercice ALG.1.12 | Soient $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ et $x\in\mathbf{R}$. Calculer : $\sum_{p=0}^{n}\cos^2(px)$.

Solution (exercice ALG.1.12)

En utilisant les formules d'Euler, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\cos^2(px) &= \frac14\sum_{p=0}^{n}\left(e^{ipx}+e^{-ipx}\right)^2\\ &= \frac14\sum_{p=0}^{n}\left(e^{2ipx}+e^{-2ipx}+2\right)\\ &= \frac14\left(\sum_{p=0}^{n}e^{2ipx}+\sum_{p=0}^{n}e^{-2ipx}+(n+1)\right)\\ &= \begin{cases}\frac14\left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}+\frac{1-e^{-2i(n+1)x}}{1-e^{-2ix}}+2(n+1)\right) & \text{si } x\notin\mathbf{Z},\\ \boxed{\frac{3(n+1)}{4}} & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Or, par propriété de la conjugaison, on constate que :

$$\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}=\overline{\left(\frac{1-e^{-2i(n+1)x}}{1-e^{-2ix}}\right)}.$$

Donc, si $x\notin\mathbf{N}$, on peut finir le calcul en utilisant la technique de l'angle moitié

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\cos^2(px) &= \frac14\left(2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}\right)+2(n+1)\right)\\ &= \frac12\left(\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}}{e^{ix}}\frac{-2\cos((n+1)x)}{-2\cos(x)}\right)+(n+1)\right)\\ &= \boxed{\frac12\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\cos((n+1)x)}{\cos(x)}+(n+1)\right)}.\end{aligned}$$

Exercice ALG.1.13 | Soient $n\in\mathbf{N}$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$. Calculer :

1. $C=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\alpha+k\beta)$,
2. $S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(\alpha+k\beta)$.

Solution (exercice ALG.1.13)

Commençons par calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+k\beta)},$$

il suffira ensuite de calculer la partie réelle et imaginaire.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+k\beta)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)^k && \textit{binôme} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)^n && \textit{angle moitié} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} \left(2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\right)^n, \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha + n\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

On déduit alors les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+k\beta)}\right) \\
&= \boxed{2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right),} \\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+k\beta)}\right) \\
&= \boxed{2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$