Chapitre ALG.3.

Espaces Vectoriels

Résumé & Plan

Beaucoup de notions ci-dessous ont déjà été exposées en première année pour l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Vous aviez constaté que l'on pouvait additionner des vecteurs, les multiplier par élément de $\mathbf{K}$ et donc plus généralement réaliser des combinaisons linéaires entre eux. Nous allons plus généralement réaliser ce type d'opérations sur des polynômes, des suites, des fonctions ... tous ces ensembles munis des lois d'addition et de multiplication de $\mathbf{K}$ seront aussi appelés des *espaces-vectoriels.*
Nous allons considérer pour terminer des applications entre les espaces vectoriels, qui seront des applications entre les deux ensembles sous-jacents et vérifiant une propriété *ad hoc* dite de *linéarité.* Ces applications seront aussi des applications en tant qu'ensembles : il est donc important de revoir le chapitre de première année traitant du sujet (notion d'injectivité, surjectivité, bijectivité, d'application réciproque *etc.*).

> *Le travail est l'activité vitale propre au travailleur, l'expression personnelle de sa vie.*
>
> — **Emmanuel Kant**

Commençons par introduire une notation, qui nous servira dans la plupart des chapitres d'Algèbre qui suivront.

Notation Ensemble des applications

Soient E, F deux ensembles. On notera E^{F} (ou $\mathscr{F}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$) l'ensemble des applications de F dans E.

Exemple 1 — Par exemple, $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ (*resp.* $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$) désigne l'ensemble des suites à valeurs complexes (*resp.* à valeurs réelles). Et $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^2}$ l'ensemble des fonctions de deux variables à valeurs réelles.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble K désignera R ou C. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir K sont vrais que K soit R ou C.

Intérêt des raisonnements algébriques Ce chapitre — ainsi que quelques autres pendant l'année — s'inscrit dans le domaine de l'*Algèbre* en Mathématiques, dont la vocation principale est l'étude d'ensembles munis de lois, et la recherche d'un cadre commun à plusieurs objets mathématiques. Une fois ce cadre dégagé (voir la Définition ALG.3.1 ci-dessous) nous l'étudierons en détail. Tous les résultats établis dans cette étude se transmettront donc automatiquement aux objets qui vérifient la Définition ALG.3.1.

Comment mémoriser facilement les définitions ? 🎉 Gardez à l'esprit que toutes les notions qui vont être présentées, quoique abstraites à première vue, sont des généralisations de quelque chose de concret que vous connaissez déjà (vecteurs, repères, coordonnées, …).

1. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

En première année, vous aviez vu des opérations sur les éléments de $\mathbf{K}^n$ avec $n \geqslant 1$ un entier, plus précisément :

- vous savez additionner deux vecteurs : si $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n), \mathrm{Y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$, alors on pose :

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{K}^n.$$

  C'est l'addition « coordonnée par coordonnée », on l'appelle la *loi interne*.
- Vous savez multiplier un vecteur par un scalaire : si $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n, \lambda \in \mathbf{K}$, alors on pose :

$$\lambda \cdot \mathrm{X} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbf{K}^n.$$

  C'est la multiplication « coordonnée par coordonnée », on l'appelle la *loi externe*.

De manière plus général on sait réaliser ce type d'opérations sur des fonctions, des polynômes, des complexes, des suites, *etc.* tous ces ensembles munis de ces lois seront qualifiés d'espaces-vectoriels, dont voici la définition.

1.1. Généralités

Définition ALG.3.1 | Espace vectoriel

On appelle ***K**-espace vectoriel* (ou *espace vectoriel sur **K***) tout triplet $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ où :

1. $(\mathrm{E}, +)$ est un *groupe commutatif* *i.e.* :

(i) $+$ est une *loi interne* :

$$+ \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E, \\ (x,y) & \longrightarrow & x+y. \end{array} \right.$$

(ii) $+$ est *associative* : $\forall x,y,z \in E, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$,

(iii) **(Existence d'un élément neutre 0_E pour $+$:)** $\forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x$,

(iv) tout élément de E est inversible pour $+$: $\forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad x+y = y+x = 0_E$. L'élément y inverse de x sera noté $-x$.

(v) La loi $+$ est *commutative*, *i.e.* $\forall x, y \in E, \quad x+y = y+x$.

2. La loi $\cdot$ est une *loi de externe*

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longrightarrow & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

telle que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et tout $(x,y) \in E^2$ on ait les *règles de calcul suivantes* entre $+$ et $\cdot$:

(i) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,

(ii) $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

(iii) $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$,

(iv) $1 \cdot x = x$.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés les *scalaires*, les éléments de E sont les *vecteurs*, $\mathbf{K}$ est le *corps de base*, la loi $+$ est appelée *addition* et la loi $\cdot$ est appelée *multiplication par un scalaire*. L'élément neutre de E pour la loi $+$ est appelé *vecteur nul*, et on le notera 0_E comme précédemment, ou simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Toutes les propriétés précédentes sont des règles de calcul dans E, et sont comparables aux règles habituelles sur les nombres réels que vous utilisez depuis l'école primaire. Rassurez-vous, nous n'aurons pas la plupart du temps à vérifier l'ensemble des axiomes pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, nous aurons la notion de sous-espace vectoriel qui nous permettra de gagner en efficacité.

Attention

Dans un espace vectoriel, vous pouvez multiplier les vecteurs $x \in E$ par des **scalaires** $\lambda \in \mathbf{K}$, **mais pas** multiplier deux vecteurs $x, y \in E$ entre eux, en règle générale.[1]

PREMIERS EXEMPLES. Donnons sans plus tarder quelques exemples d'espaces vectoriels. La vérification complète des axiomes ne présente aucune difficulté et est laissée au lecteur, seuls quelques-uns seront précisés.

Exemple 2 — ***Cas de*** $E = \mathbf{K}^n$ ***– Uplets*** Soient $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors on définit :

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \qquad \lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. L'élément 0_E est ici le n-uplet nul $0_E = (0, \dots, 0)$, l'élément opposé pour $+$ de $X = (x_1, \dots, x_n)$ est $-X = (-x_1, \dots, -x_n)$ car $X + (-X) = 0_E$.

Exemple 3 — ***Cas de*** $E = \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ***avec*** $n, p \in \mathbf{N}^\star$ ***– Matrices*** Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbf{K}^n$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors on définit :

$$A + B = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, \qquad \lambda A = \left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. L'élément 0_E est ici la matrice nulle de format $n \times p$ $0_E = (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, l'élément opposé pour $+$ de $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est $-A = A = \left(-a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ car $A + (-A) = 0_E$.

Exemple 4 — ***Cas de*** $E = \mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ ***– Suites*** Soient $(u_n), (v_n) \in E$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors on définit :

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \qquad \lambda (u_n) = (\lambda u_n).$$

[1] Même si dans certains espaces vectoriels c'est possible, par exemple il est possible de multiplier deux polynômes ou deux matrices compatibles entre elles.

Le triplet $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. L'élément 0_E est ici la suite nulle $0_E = (0)$, l'élément opposé pour $+$ de (u_n) est $(-u_n)$ car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n + (-u_n) = 0$.

Exemple 5 — ***Cas des polynômes*** Nous avons défini dans le Chapter ALG.2 deux lois $+,.$ sur les polynômes. Le triplet $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. L'élément 0_E est ici le polynôme nul $0_E = 0$, l'élément opposé pour $+$ de P est $-P$ car $P + (-P) = 0$.

Exemple 6 — ***Cas de*** $E = \mathscr{F}(\mathbf{K},\mathbf{K})$ ***– Fonctions*** Soient $f, g \in E$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors on définit :

$$f+g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x), \end{array} \right. \qquad \lambda f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ x & \longmapsto & \lambda.f(x). \end{array} \right.$$

Le triplet $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. L'élément 0_E est ici la fonction nulle $0_E : x \in \mathbf{K} \longmapsto 0$, l'élément opposé pour $+$ de f est $-f : x \in \mathbf{K} \longmapsto -f(x)$ car pour tout $x \in \mathbf{K}$, $f(x) + (-f(x)) = 0$.

L'Exemple 6 peut se généraliser en la proposition suivante : l'espace de départ peut être un ensemble général F et l'ensemble d'arrivée un espace vectoriel E.

Proposition ALG.3.1 | Espaces de fonctions

Soient F un ensemble non vide et $\boxed{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\boxed{E}^F$ des applications de F dans E, muni des lois :

1. $\forall (f,g) \in (\mathscr{F}(F,E))^2, \quad (f+g) \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E, \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x), \end{array} \right.$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall f \in \mathscr{F}(F,E), \quad (\lambda \cdot f) \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array} \right.$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Son élément neutre est donc $0_{\mathscr{F}(F,E)}$, *i.e.* la fonction nulle $\left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array} \right.$.

Preuve Vérifier les différents axiomes.

Remarque 1.1 — Il faut bien comprendre que dans la Proposition ALG.3.1, il est nécessaire que **l'espace d'arrivée** soit un espace vectoriel pour donner un sens à $f(x) + g(x)$, $\lambda f(x)$ pour tout $x \in F$, $(f,g) \in \mathscr{F}(F,E)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. En revanche, on voit bien que ce n'est pas indispensable pour l'espace de départ.

À propos du corps de base. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on constate que l'on peut voir un $\mathbf{C}$-espace vectoriel comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Proposition ALG.3.2 | Restriction du cors de base

Tout $\mathbf{C}$-espace vectoriel est *a fortiori* un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.[2]

Preuve *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Il suffit de restreindre la loi externe*

$$\cdot : \mathbf{C} \times E \longrightarrow E, \quad \text{à} \quad \cdot|_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}} : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E,$$

et on vérifie ensuite facilement que cette restriction définit une $\mathbf{R}$-loi externe sur E. La loi $+$ est inchangée.

Produit cartésien d'espaces vectoriels. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. On rappelle que l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ est appelé le *produit cartésien* des E_i, $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, et ses éléments sont notés $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. En d'autres termes :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

[2] De manière plus informelle : si on sait multiplier un vecteur par un complexe, on sait en particulier le multiplier par un réel.

Proposition ALG.3.3 | Produit cartésien

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On munit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ de deux lois $+$ et . de la manière suivante :

1. **(Addition coordonnée par coordonnée)**
$$+ \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E, \\ ((x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n). \end{array} \right.$$
2. **(Multiplication coordonnée par coordonnée par un scalaire)**
$$. \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E, \\ (\lambda, (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (\lambda.y_1, \ldots, \lambda.y_n). \end{array} \right.$$

Alors :

$(E_1 \times \ldots \times E_n, +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel,[3] avec pour élément neutre
$$0_{E_1 \times \ldots \times E_n} = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n}).$$
Autrement dit, le neutre du produit cartésien est le n-uplet des neutres.

Preuve Simple vérification de tous les axiomes.

La proposition précédente généralise alors l'Exemple 2, lorsque

$$E_1 = \cdots = E_n = \mathbf{K}.$$

RÈGLES DE CALCULS SECONDAIRES. De la définition d'un espace vectoriel découlent directement d'autres propriétés.

Proposition ALG.3.4 | Autres règles de calcul

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a :

1. **(Développement d'une expression)** $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x, \quad \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y,$
2. **(Multiplication par zéro)** $0_{\mathbf{K}} \cdot x = 0_E, \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E,$
3. **(Multiplication par l'opposé)** $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x),$
4. **(Produit nul)** $\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbf{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E).$

Remarque 1.2 — La dernière assertion n'a *a priori* rien d'évident, d'ailleurs elle est même fausse pour d'autres ensembles que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, mais dans notre cadre (*cf.* début de chapitre) ce sera toujours le cas.

[3] On retrouve que $\mathbf{K}^n$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Preuve Par exemple, pour **4)** :

- si $\lambda \neq 0_{\mathbf{K}}$, *alors on peut multiplier l'hypothèse par $\frac{1}{\lambda}$ à gauche :*
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} 0_E = 0_E$$
d'où $x = 0_E$,
- sinon $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$.

Nous admettons le reste dont la preuve ne présente pas de difficulté.

Corollaire ALG.3.1

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Alors si E n'est pas $\{0_E\}$, il n'est jamais de cardinal fini.

Preuve Par définition d'un espace vectoriel, E est stable par multiplication par un scalaire. Donc si $x \neq 0_E$ est dans E,

$$D_x \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \{\lambda x, \lambda \in \mathbf{K}\} \subset E,$$

mais tous les éléments de D_x sont distincts (car sinon il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda x = \mu x$, ce qui implique d'après la propriété précédente que $\lambda = \mu$ puisque x est non nul). Donc D_x n'est pas un ensemble fini et E non plus.

Attention

On n'écriera donc jamais # E pour E un espace vectoriel non réduit à son élément neutre.

Maintenant que le cadre est posé, regardons ce que l'on peut faire avec les vecteurs, *i.e.* les éléments d'un espace vectoriel. En combinant les deux lois définies plus haut (additive et scalaire-multiplicative), on arrive directement à la notion de combinaison linéaire présentée ci-après.

1.2. Combinaisons linéaires & Sous-espaces vectoriels

Définition ALG.3.2 | Combinaison linéaire de vecteurs

Soit E un **K**-espace vectoriel.

1. **(Famille finie)** Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, ..., x_n tout vecteur $x \in$ E s'écrivant sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\lambda_k} x_k \quad \text{où pour tout } k \in [\![1\,,\,n]\!], \text{ on a } \lambda_k \in \boxed{\mathbf{K}}.$$

Si **K** = **C**, alors on appelle ***R**-combinaison linéaire* tout vecteur x s'écrivant sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\lambda_k} x_k \quad \text{où pour tout } k \in [\![1\,,\,n]\!], \text{ on a } \lambda_k \in \boxed{\mathbf{R}}.$$

2. **(Famille quelconque)** Soit $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble quelconque. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ toute combinaison linéaire **finie** de ces vecteurs.
Si **K** = **C**, alors on appelle ***R**-combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ toute **R**-combinaison linéaire **finie** de ces vecteurs.

Notation

On note généralement :
- $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, ou plus simplement $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté,
- $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille quelconque de vecteurs, ou plus simplement $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Les ensembles de **R**-combinaisons linéaires seront notées $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(\dots)$.

Proposition ALG.3.5

Soit E un **C**-espace vectoriel, et $x_1, \dots, x_n \in$ E Alors :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(x_1, \dots, x_n).$$

Les **R**-combinaisons linéaires sont des **C**-combinaisons linéaires.[4]

Preuve

Méthode — Montrer l'appartenance « à un Vect »

Pour montrer que $x \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires, tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. En particulier, si $\mathrm{E} = \mathbf{K}^n$, on tombe sur la résolution d'un système linéaire.

Exemple 7 — *Est-on combinaison linéaire de ?*

1. **(Dans $\mathbf{R}^2$)** Est-ce que le vecteur $u = (3,3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $a = (1,1)$, $b = (1,0)$ et $c = (0,1)$? Y a-t-il unicité de l'écriture de u comme combinaison linéaire de a, b et c ?

[4] Rien d'étonnant à cela, un réel est un complexe !

2. **(Dans $\mathbf{R}^3$)** Le vecteur $u = (-1,2,2)$ de $\mathbf{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $a = (1,1,0)$, $b = (-2,1,3)$ et $c = (1,0,-1)$?

3. **(Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$)** La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$) La fonction $x \longmapsto \cos^2 x$ est-elle combinaison linéaire de $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \cos(2x)$?

5. (Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star}$) La suite $(1)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est-elle combinaison linéaire de $(n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$?

6. (Dans $\mathbf{R}[X]$) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Peut-on avoir $P \in \mathrm{Vect}(1, P')$?

Attention Identification

On retiendra du premier exemple qu'*a priori* on ne peut pas identifier de manière systématique[5] :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right) \quad \not\Rightarrow \quad (\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k).$$

Exemple 8 — Toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire de 1, X, X^2, ..., X^n, puisqu'il peut être écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbf{K}$. On peut donc résumer cela en :

$$\text{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \mathbf{K}_n[X].$$

Sous-espaces vectoriels. La structure de sous-espace vectoriel aura un intérêt pour justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel. En effet, nous allons voir que si un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, alors ce sous-ensemble sera aussi un espace vectoriel (et il est plus facile de vérifier la propriété de sous-espace vectoriel que d'espace vectoriel).

[5] Nous appellerons plus tard *famille libre* toute famille où c'est le cas.

Définition ALG.3.3 | Sous-espace vectoriel

On appelle *sous-espace vectoriel* d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tout ensemble F tel que :
- $F \subset E$,
- $0_E \in F$,
- F est *stable par combinaison linéaire :* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Voici la proposition principale, qui nous permettra de vérifier facilement que des ensembles sont des espaces vectoriels.

Proposition ALG.3.6

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$. Alors :

$$(F, +, .)^{6} \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel.}$$

Preuve Simple vérification des axiomes de la Définition ALG.3.1.

Méthode Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel, on peut montrer qu'il n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. En
- vérifiant qu'il ne contient pas le neutre dudit ensemble de référence.
- Ou, on montre qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire.

Remarque 1.3 — Économie de rédaction L'énorme intérêt de la notion de sous-espace vectoriel réside dans la proposition précédente : une économie dans la rédaction. En effet, il nous suffira de vérifier qu'une structure est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel du cours (fait que vous avez le droit d'utiliser sans argument supplémentaire), pour justifier la structure espace vectoriel. Ce qui semble beaucoup plus rapide que la vérification complète de la Définition ALG.3.1.

Avant de regarder quelques exemples, commençons par montrer une propriété très utile dans la pratique : « les Vect » sont des sous-espaces vectoriels !

[6] De manière plus rigoureuse, il faudrait noter $\left(F, +|_{F\times F}, \cdot|_{\mathbf{K}\times F}\right)$ au lieu de $(F, +, .)$, puisque les ensembles de départ ne sont pas les mêmes pour les deux lois.

Définition/Proposition ALG.3.1 | Un «Vect» est un espace vectoriel.

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble. Alors :

Vect $(x_i)_{i\in I}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $(x_i)_{i\in I}$.[7]

Lorsque la famille est réduite à un unique vecteur $u \in E$, on appelle Vect(u) *la droite vectorielle* engendrée par u.

Méthode Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Deux options possibles.

1. Justifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbf{K}^n$, de polynômes, de fonctions, de suites ...) **ou**
2. Montrer que l'ensemble s'écrit comme Vect d'une famille.

Preuve *(dans le cas d'une famille finie de deux vecteurs)* Faisons la preuve dans le cas d'une famille de deux vecteurs (les autres cas ne présentent pas de difficulté supplémentaire). Soient $x_1, x_2 \in E$, montrons que $F = \text{Vect}(x_1, x_2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x_1, x_2.

- Montrons que Vect (x_1, x_2) est un sous-espace vectoriel de E contenant x_1, x_2.

- Montrons que Vect (x_1, x_2) est le plus petit sous-espace vectoriel vérifiant cette propriété, *i.e.* soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $x_1, x_2 \in F$ et montrons que Vect $(x_1, x_2) \subset F$.

[7] Et c'est donc en particulier un espace vectoriel.

Exemple 9 — *dans K^n*

1. Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E admet toujours comme sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E lui-même.
2. L'ensemble $F = \left\{\lambda(2,3) = (2\lambda, 3\lambda) \in \mathbf{R}^2,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}(2,3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(2,3)$.[8]
3. L'ensemble $F = \left\{\lambda(1,2,0) = (\lambda, 2\lambda, 0) \in \mathbf{R}^3,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}(1,2,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(1,2,0)$.
4. L'ensemble $F = \left\{\lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^3,\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ appelé *plan vectoriel de vecteurs directeurs* $(1,2,0)$ et $(1,0,1)$.
   - **(1ère méthode : avec la définition)**

[8] Mais la Définition/Proposition ALG.3.1 généralise cela.

- **(2ème méthode : c'est un** Vect**)** $F = \text{Vect}((1,2,0),(1,0,1))$.

5. L'ensemble $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{K}^4,\ x+y+z+t=0, x-y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^4$. Montrons qu'il s'agit d'un Vect.

Exemple 10 — ***dans des espaces de fonctions***

1. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ des fonctions $\mathscr{C}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$.
   - *l'inclusion $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ est évidente car une fonction $\mathscr{C}^n$ est en particulier une fonction,*
   - *la fonction nulle est de classe $\mathscr{C}^n$,*
   - *une combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^n$ est $\mathscr{C}^n$ d'après le cours de première année.*

2. L'ensemble $F = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 3f(x)\right\}$[9] est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
   - **(1ère méthode : avec la définition)**
   - **(2ème méthode : c'est un** Vect**)**

3. L'ensemble $F = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\quad f'(x) = 3f(x)^2\right\}$[10] est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$? *Indication : Commencer par trouver une fonction non nulle dans cet ensemble.*

[9] on reconnaît ici l'ensemble des fonctions solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Nous systématiserons la propriété d'espace vectoriel dans le Chapter ANA.9

[10] La présence d'un carré vous guide sur la réponse : non.

4. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire homogène** sur un intervalle I (du premier ou du second ordre) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbf{K})$[11]. Nous le montrerons dans le Chapter ANA.9 de révisions.
5. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \mathscr{P}$ des fonctions paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Nous le montrerons dans le Chapter ANA.7 de révisions.
6. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathrm{E},\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

[11]Ceci généralise donc l'exemple précédent

Exemple 11 — *dans des espaces de suites*

1. Notons F l'ensemble des suites réelles convergentes, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{ (u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
   - **(1ère méthode : avec la définition)**

- **(2ème méthode : c'est un** Vect**)**

3. L'ensemble $F = \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ u_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Peut-on remplacer $(1)_n$ (dans le o(.)) par une autre suite ?

4. L'ensemble des suites vérifiant une **relation de récurrence linéaire** est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Nous le montrerons dans le Chapter ANA.9 de révisions.

Exemple 12 — *dans des espaces de matrices colonnes* L'ensemble des solutions d'un système **linéaire homogène** à coefficients dans $\mathbf{K}$ et à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$. Notons $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice du système homogène $AX = 0$.

Exemple 13 — *dans des espaces de polynômes*

1. Soit $n \geqslant 1$. Alors $\mathbf{K}_n[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n — est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. *En effet, par définition d'un polynôme,* $\mathbf{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$.

2. Soit $n \geqslant 1$. En revanche $\mathbf{K}_{=n}[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré n — n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. Pourquoi ? $\mathbf{K}_{=n}[X]$ *ne contient pas le polynôme nul, qui est de degré* $-\infty$.

Intersection & Réunion d'espaces vectoriels.

Proposition ALG.3.7

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.
2. Une réunion de sous-espaces vectoriels de E **n'est en général pas** un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

1. Considérons, pour simplifier la rédaction, une famille finie $F_1, \dots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.

Cas particulier : description des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$. De façon générale, il existe principalement trois types de description des sous-espaces de $\mathbf{K}^n$, que nous avons déjà rencontrées dans des précédents exemples. Vous devez savoir passer de l'une à l'autre. Par exemple, la droite D de $\mathbf{R}^2$ dirigée par $(1,1)$ peut s'écrire :

- comme un Vect, c'est $F = \mathrm{Vect}(1,1) = \{(\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}\}$. On parle aussi de *forme paramétrique*.
- Ou à l'aide d'une ou plusieurs équations cartésiennes, ici $F = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y = x\right\}$. On parle de *forme cartésienne*.

Nous allons avoir comment faire pour, de manière générale, passer d'une forme à une autre. On pourrait montrer de manière générale que tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ peut être exprimé avec l'une ou l'autre des descriptions, mais nous nous contenterons d'exemples.

Méthode — Lien entre paramétrisation & équations cartésiennes

- **Paramétrisation → Équations implicites / cartésiennes :** Résolution d'un système en les paramètres de la forme paramétrique (généralement notés $\lambda, \mu, \nu, \dots$). Le système présentera alors une condition de compatibilité qui sera l'équation cartésienne cherchée.
- **Équations implicites / cartésiennes → Paramétrisation :** Résolution du système linéaire en les inconnues (généralement notées $x, y, z, \dots$), l'ensemble des solutions correspond alors à la forme paramétrique cherchée.

Attention

Cette méthode doit être parfaitement maitrisée.

Exemple 14 — Reprenons les deux espaces vectoriels définis plus haut, qui sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbf{R}^4$.

1. $F = \text{Vect}(X, Y) \subset \mathbf{K}^4$ où $X = (1, 2, 1, 1)$ et $Y = (0, 1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations caractérisant F.

2. $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4, \quad x + y + z + t = 0 \text{ et } x = y\right\} \subset \mathbf{K}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G.

D'autres exemples seront traités en TD.

2. FAMILLES DE VECTEURS

Notation Famille/Ensemble ?

Soit E un ensemble et $x_1, ..., x_n \in E$ avec $n \in \mathbf{N}$. Rappelons les deux notations suivantes :

1. $(x_1, \dots, x_n)$ désigne le n-uplet $x_1, \dots, x_n$ donc *a priori*

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \neq (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n).$$

   On parle de *famille*, l'ordre des éléments a une importance.
2. $\{x_1, \dots, x_n\}$ désigne l'ensemble formé des éléments $x_1, \dots, x_n$ donc *a priori*

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} = \{x_2, x_1, x_3, \dots, x_n\}.$$

   On parle d'*ensemble*, et dans ce cas l'ordre des éléments n'a aucune importance.

L'objectif de cette section est cette fois-ci d'abstraire la notion de repère du plan *i.e.* la faculté de *caractériser*, et de manière unique, les vecteurs par des coordonnées, sauf que maintenant nos vecteurs peuvent être des polynômes, des fonctions, des suites *etc.*...

Le vocabulaire général pour les espaces vectoriels est plutôt le suivant :

- les repères seront appelés des *bases*,
- et le nombre d'éléments d'un repère sera appelé la *dimension*. Nous allons donc également devoir justifier que toutes les bases ont même cardinal afin que la définition soit bien posée.

2.1. Famille libre

Définition ALG.3.4 | Famille libre/liée

1. **(Famille finie)** Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On dit que $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une *famille libre* de vecteurs de E, ou que les vecteurs x_1, ..., x_n sont *linéairement indépendants*, si :

$$\forall (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in \mathbf{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \quad\Longrightarrow\quad \forall k\in [\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k = 0\right].$$

2. **(Famille quelconque)** Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E indexée par un ensemble I. On dit que $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre dans E si toute sous-famille **finie** est libre. Si ce n'est pas le cas, on dit que la famille est liée.
   - Dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, un couple (u, v) de vecteurs liés est un couple de vecteurs *colinéaires*.
   - Dans un $\mathbf{R}^3$, un triplet (u, v, w) de vecteurs liés est un triplet de vecteurs *coplanaires*.

Remarque 2.1 — Lien avec l'identification Quitte à remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ pour tout i dans la définition, nous pouvons aussi dire que : $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E si l'on peut identifier deux combinaisons linéaires

$$\forall (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (\mu_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in \mathbf{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \quad\Longrightarrow\quad \forall k\in [\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k = \mu_k\right].$$

Remarque 2.2 — Négation de la liberté

$$\exists (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in \mathbf{K}^n,\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}, \text{ mais } \quad \exists k\in [\![1\,,\,n]\!],\ \lambda_k\neq 0.$$

Cela signifie donc qu'il existe une combinaisaon linéaire nulle (des vecteurs $x_1, \dots, x_n$) dont tous les coefficients ne sont pas nuls.

Méthode Montrer la liberté/liaison d'une famille

1. Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre, on écrit :
   «Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbf{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}$. Alors [...] donc les λ_k sont tous nuls.» En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :
   - Dans $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$: on arrive à la résolution d'un système linéaire.
   - Dans $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).
2. Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est liée, on écrit :
   «[...]. Posons alors $\lambda_1 = ...$, ..., $\lambda_n = ...$: on a alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}$, mais les λ_k ne sont pas tous nuls.»

Exemple 15 —

1. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (0,1,1)$ et $x_3 = (1,0,1)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle libre ?

2. Montrons que $(\cos, \sin)$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

- **(1ère méthode : en évaluant en plusieurs x)**

- **(2ème méthode : avec des développements limités)**

3. Montrons que $(1, (2^n)_n, (3^n)_n)$ est libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Généraliser.

- **(1ère méthode : en évaluant en plusieurs n)**

- **(2ème méthode : avec des limites)**

Attention **Égalité à zéro dans un espace vectoriel de fonctions**

L'égalité $\lambda\cos + \mu\sin = 0_{\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})}$, signifie que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},} \quad \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) = 0,$$

puisque la fonction $0_{\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})}$ est la fonction nulle. Le quantificateur « $\forall$ » est ici fondamental pour démontrer la liberté, attention aux oublis ou aux mélanges dans votre rédaction. La même remarque s'applique aussi aux suites.

Plus généralement, nous avons :

Égalité	**Signification**
Pour des uplets : $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$	$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i = y_i$,
Pour des suites : $(u_n) = (v_n)$	$\forall n, \quad u_n = v_n$.
Pour des polynômes : $\sum_{k=1}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} b_k X^k$	$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad a_k = b_k$,
Pour des fonctions : $f = g$	$\forall x, \quad f(x) = g(x)$.

Cadre

Dans la suite sur les familles libres nous travaillerons uniquement avec des familles finies, même si l'ensemble des résultats s'adaptent aux familles quelconques.

Proposition ALG.3.8 | Propriétés des familles liées

Soit $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

1. Si l'un des vecteurs x_{k_0} est nul, alors la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée.
2. Si l'un des vecteurs x_{k_0} apparaît plus d'une fois dans la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, alors celle-ci est liée.

Preuve

1. Supposons pour simplifier que $k_0 = 1$, donc que $x_0 = 0$. Alors

$$1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0,$$

il s'agit donc d'une combinaison linéaire nulle, mais dont tous les coefficients ne sont pas nuls (le premier). La famille est donc liée.

2. Supposons pour simplifier que $k_0 = 1$, et que $x_0 = x_1$. Alors

$$1 \cdot x_0 + (-1) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0,$$

il s'agit donc d'une combinaison linéaire nulle, mais dont tous les coefficients ne sont pas nuls (les deux premiers). La famille est donc liée.

Proposition ALG.3.9 | Caractérisation des familles liées

Soit $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Alors :

$(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée,

$\iff$ un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, *i.e.* $\exists k_0 \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \exists (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{K}^n, \quad x_{k_0} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq k_0}} \lambda_k x_k$.

Preuve

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

FAMILLE ÉCHELONNÉE DE POLYNÔMES. Passons à un exemple fondamental de famille libre de polynômes, celles où les degrés ont une forme particulière.

Définition ALG.3.5 | Famille échelonnée de polynômes

Une famille de polynômes est une *famille échelonnée* si les degrés des polynômes sont deux à deux distincts.

Exemple 16 — Les familles ci-dessous sont-elles échelonnées ?

1. $(X^2, X-1, 10)$,
2. $\left(X(X-1)(X-2), X, (X+1)^4 - X^4\right)$.

On en vient maintenant à la propriété principale de ces familles.

Théorème ALG.3.1 | Familles échelonnées de polynômes

Toute famille finie de polynômes de degrés échelonnés non nuls de $\mathbf{K}[X]$ est libre.

Attention

La réciproque est fausse : il existe des familles libres non échelonnées de polynômes.[12]

[12] Consulter l'Exemple 17 pour un contre-exemple.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur le nombre de polynômes**)*

■ **Initialisation.** Soit (P_0) une famille d'un polynôme, avec $P_0 \neq 0$ (la famille est bien entendu échelonnée), et libre car $P_0 \neq 0$.

■ **Hérédité.** Supposons le théorème établi pour une famille de $n \in \mathbf{N}^\star$ polynômes échelonnée. Et soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille échelonnée de $n+1$ polynômes non nuls. Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que

$$\deg P_0 < \cdots < \deg P_n.$$

Exemple 17 — Montrer que la famille $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$. Est-elle échelonnée ?

2.2. Familles génératrices

Définition ALG.3.6 | Famille génératrice

Soit F un sous-espace vectoriel d'un **K**-espace vectoriel E. On appelle *famille génératrice de* F toute famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, où I est un ensemble, de vecteurs de F telle que

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in\mathrm{I}}\,.$$

Autrement dit, tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire **finie** d'éléments de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$. On dit aussi que F *est engendré par les* x_i pour $i\in\mathrm{I}$.

Définition ALG.3.7 | Dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel d'un **K**-espace vectoriel E. On dit que F est de *dimension finie* s'il existe une famille finie engendrant F.

Ainsi, pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie on exhibe une famille génératrice finie.

Attention

Nous n'avons pas encore défini ce qu'est la dimension d'un espace de dimension finie, seulement la propriété de « dimension finie.

Méthode Montrer qu'une famille est génératrice

Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ [13] de vecteurs de F est une famille génératrice de F, on écrit :

« Soit $x\in\mathrm{F}$. Alors cherchons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. [...] On a donc déterminé des λ_i qui conviennent, la famille est génératrice. »

En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :

- Dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$: on résout un système linéaire.
- Dans $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).

Exemple 18 —

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbf{R}^2$. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ suivants $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (1,2)$ et $x_3 = (1,3)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$?

2. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Donnons une famille génératrice de $\mathrm{F} = \{y\in\mathrm{E},\ y' = 2y\}$.

[13] adapter la méthode pour une famille quelconque $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$

3. Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Donnons une famille génératrice de $F = \{(u_n) \in E,\ \forall n \in \mathbf{N},\quad u_{n+1} = 5u_n\}$.

2.3. Base

Nous arrivons à une notion qui généralise les repères que vous connaissez depuis que vous avez fait de la géométrie analytique (*i.e.* avec des coordonnées) en fin de collège.

Définition ALG.3.8 | Base
Soit E un **K**-espace vectoriel. On appelle *base* de E toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E.

Rappelons que :

- le caractère générateur garantit l'existence d'une combinaison linéaire,
- le caractère libre garantit l'unicité des coefficients.

Une base garantira donc l'existence et l'unicité des coefficients, c'est ce que nous précisons maintenant.

Définition/Proposition ALG.3.2 | Base et décomposition en coordonnées. Coordonnées d'un vecteur.

- Une famille finie $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E est une base de E **si et seulement si** tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des x_k.
- Si $x \in E$, notons $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$
Alors, pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, la constante λ_k s'appelle **la** k-ième coordonnée de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve

En Mathématiques, l'adjectif *canonique* après « base » signifie parfois « la plus simple ».

Définition/Proposition ALG.3.3 | Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[x]$

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

- **(Dans $\mathbf{K}^n$)** Notons

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

La famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbf{K}^n$, appelée *base canonique de* $\boldsymbol{K}^n$.

- **(Dans $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$)** La famille $\left(\mathrm{X}^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{X}^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$, appelée *base canonique de* $\boldsymbol{K}_n[\mathrm{X}]$.

Preuve Faisons la preuve pour $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$, elle est similaire pour $\mathbf{K}^n$.

Exemple 19 —

1. Montrer que la famille $((1, 1), (1, -2))$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

2. Montrer que la famille $(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}, \mathrm{X}^2 + 1, \mathrm{X} + 1)$[14] est une base de $\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$.

[14] Attention, elle n'est pas échelonnée

3. On note $E = \left\{ y \in \mathscr{C}^2,\ y'' - 3y' + 2y = 0 \right\}$. Déterminer une base de E.

4. On note $E = \left\{ (u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \right\}$. Déterminer une base de E.

2.4. Extraction & Complétion

Il est possible de construire des bases à l'aide de familles libres (en complétant), et de familles génératrices (en extrayant). Nous allons établir deux faits principaux :

1. toute famille libre peut être complétée en une base (de-même, toute famille génératrice peut être diminuée en une base),
2. toutes les bases ont même cardinal ; cet entier, nous allons l'appeler la *dimension*.

Proposition ALG.3.10 | Augmentation d'une famille libre finie

Soient $\mathscr{L} = (\ell_1, ..., \ell_n)$ une famille libre d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, et $\ell_{n+1} \in$ E.
Si $\ell_{n+1} \notin \operatorname{Vect} \mathscr{L}$, alors :

$$\mathscr{L}' = (\ell_1, ..., \ell_n, \ell_{n+1}) \text{ est encore une famille libre.}$$

Preuve

Exemple 20 — Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $\mathscr{L} = (\ell_1, \ell_2) = ((2,1,0),(1,-1,0))$. Que dire de $\ell_3 = (2,3,1)$?

Proposition ALG.3.11 | Diminution d'une famille génératrice finie

Soit $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_{n+1})$ une famille génératrice d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.[15]
Si $g_{n+1} \in \operatorname{Vect}(g_1, ..., g_n)$, alors :

$$\mathscr{G}' = (g_1, ..., g_n) \text{ est encore une famille génératrice de E.}$$

Preuve Par hypothèse, il existe des constantes $\mu_1, \dots, \mu_n$ telles que :

$$g_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i. \quad (\star)$$

Soit donc $x \in$ E. Puisque $\mathscr{G}$ est génératrice de E, choisissons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i + \lambda_{n+1} g_{n+1},$$

ainsi en remplaçant g_{n+1} par $(\star)$, on trouve :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1}\mu_i g_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_{n+1}\mu_i) g_i.$$

Ceci prouve que x est combinaison linéaire de $g_1, \dots, g_n$ donc que $\mathscr{G}'$ est génératrice.

Les propriétés précédentes nous apprennent donc que :

- l'on peut augmenter une famille libre finie (en une nouvelle famille libre) en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ceux de la famille.
- D'autre part, on peut diminuer une famille génératrice finie (en une nouvelle famille génératrice) en retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

[15] Dit autrement, l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Exemple 21 — On considère le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ suivant $E = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3)$, où $g_1 = (2,1,3)$, $g_2 = (1,0,1)$. Que dire de $g_3 = (1,1,2)$? <u>*Indication :*</u> *On pourra remarquer que* $g_3 = g_1 - g_2$.

Algorithme de la base incomplète.

Théorème ALG.3.2 | Algorithme de la base incomplète

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$, $\mathscr{L} = (\ell_1, ..., \ell_p)$ une famille libre finie de E et $\mathscr{G} = (g_1, ..., g_q)$ une famille génératrice finie de E. Alors il existe une base de la forme

$$\mathscr{B} = (\underbrace{\ell_1, ..., \ell_p}_{\text{proviennent de } \mathscr{L}}, \underbrace{\ell_{p+1}, ..., \ell_n}_{\text{proviennent de } \mathscr{G}}).$$

Le théorème nous apprend donc que l'on peut compléter une famille libre finie en une base en ajoutant des vecteurs puisés dans une famille génératrice finie.

La preuve ci-dessous fournit en outre un algorithme pour construire une base comme *supra*[16]. Si $E = \{0_E\}$ alors E ne possède aucune famille libre, le résultat précédent ne s'applique donc pas.

Preuve

1. **Construction algorithmique de la base $\mathscr{B}$–** ce théorème repose sur un algorithme simple et fondamental dit de la base incomplète. Nous allons compléter peu à peu la famille libre $\mathscr{L} = (\ell_1, ..., \ell_p)$ à l'aide de certains vecteurs parmi $\mathscr{G} = (g_1, ..., g_q)$ en prenant soin de conserver la liberté à chaque ajout.
   - Commençons par considérer $\mathscr{B} = \mathscr{L}$.
   - Ensuite, pour $k \in [\![1, q]\!]$, si $(\mathscr{B}, g_k)$ est encore libre on modifie $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} \longleftarrow (\mathscr{B}, g_k)$ où $(\mathscr{B}, g_k)$ désigne la famille $\mathscr{B}$ augmentée de g_k. Sinon nous ne faisons rien.

   Puisque k par k la famille est libre, la base $\mathscr{B}$ obtenue à l'arrivée est encore libre.
2. **La famille $\mathscr{B}$ ainsi construite convient–** en effet, nous savons déjà que $\mathscr{B}$ est une famille libre, il reste donc à montrer qu'elle est génératrice.

   Or, par hypothèse, la famille $\mathscr{G}$ génère E donc il suffit de montrer que chaque g_i pour $i \in [\![1, q]\!]$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$ notés ℓ_i avec $i \in [\![1, n]\!]$.
   Soit donc $i \in [\![1, q]\!]$. Si $g_i \in \mathscr{B}$ alors évidemment il est combinaison linéaire de lui-même.
   Sinon, $g_i \notin \mathscr{B}$, cela signifie qu'à l'étape $k = i$ de l'algorithme nous n'avons pas ajouté g_i dans la famille $\mathscr{B}$ parce qu'il était combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$. C'est donc terminé.

Théorème ALG.3.3 | Base incomplète/extraite

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$.
1. **(Théorème de la base incomplète)** Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base de E.
2. **(Théorème de la base extraite)** De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base de E. En particulier, E admet une base.

Preuve
1. Si E est de dimension finie, alors E possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. Ainsi, si $\mathscr{L}$ est une famille libre finie, nous pouvons lui appliquer l'algorithme de la base incomplète donné par le Théorème ALG.3.2 précédent.
2. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Puisque $E \neq \{0_E\}$, nous pouvons choisir un élément $x \neq 0_E$ dans E. Il suffit alors d'appliquer le Théorème ALG.3.2 précédent à la famille $(x) \cup \mathscr{G}$, qui donne le résultat.

Exemple 22 — La famille $((1,-5,7)(2,6,8))$ est une base de $F = \mathrm{Vect}((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1))$.

[16] algorithme assez peu utilisé dans la pratique

Exemple 23 — On considère la famille de $\mathbf{R}^4$ suivante :

$$\mathscr{G} = ((1,0,2,1),(2,1,3,2),(1,1,1,1),(0,1,-1,-1),(2,0,4,3)).$$

Déterminons une base de $\operatorname{Vect}\mathscr{G}$, extraite de $\mathscr{G}$.

3. DIMENSION

3.1. Généralités

Nous admettons dans cette dernière section ce résultat, appelé aussi *lemme de* STEINITZ dont la preuve est technique, et qui permet de comparer le nombre d'éléments d'une famille libre par rapport au nombre d'éléments d'une famille génératrice.

Lemme ALG.3.1 | de STEINITZ

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$, $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors :

$$\# \mathscr{L} \leqslant \# \mathscr{G}.$$

Preuve Admis.

Définition/Proposition ALG.3.4 | Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- si $E \neq \{0_E\}$: toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, on l'ap-

pelle la *dimension* de E, et est notée $\dim E$,
- si $E = \{0_E\}$, on pose comme convention : $\dim \{0_E\} = \dim E = 0$.

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on notera $\dim_{\mathbf{R}} E$ la dimension de E vu comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et $\dim_{\mathbf{C}} E = \dim E$ vu comme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Preuve Montrons que dans le cas $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases ont même nombre d'éléments. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E ayant respectivement n et n' éléments.

Définition ALG.3.9 | Droite, Plan & Hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E est appelé :
- *droite vectorielle* si $\dim F = 1$,
- *plan vectoriel* si $\dim F = 2$,
- *hyperplan* si $\dim E \geqslant 1$ et $\dim F = \dim E - 1$.

Attention Confusion cardinal/dimension

Ne pas confondre les notions de cardinal et de dimension ! Une famille a un certain cardinal mais pas de dimension, et par contre un espace vectoriel (de dimension finie) a une dimension mais est toujours de cardinal infini[17] lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (sauf $\{0\}$). En revanche, on a toujours que si $\mathscr{B}$ est une base de E

$$\dim E = \# \mathscr{B}.$$

Exemple 24 —

1. $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^n = n$ (notamment $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K} = 1$).
2. $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^2 = 2$, mais $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^2 = 4$. Pourquoi ?
3. $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n[X] = n + \boxed{1}$.
4. Dans $E = \mathbf{K}^n$, tout sous-espace défini par une équation linéaire *non triviale*.

$$F = \left\{(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in E,\ a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\right\} \quad \text{(où les } a_k \in \mathbf{K} \text{ ne sont pas tous nuls)},$$

est un hyperplan. Pour le prouver, il suffit d'en obtenir une famille génératrice.

[17] En effet, si $x \in E$ est non nul, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est un ensemble de cardinal infini. Car si ce n'est pas le cas il existerait $\lambda \neq \lambda' \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda x = \lambda' x \implies \lambda = \lambda'$ puisque $x \neq 0_E$ — contradiction.

5. L'ensemble des solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène normalisée d'ordre un est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension un. Nous le reverrons dans le Chapter ANA.9. Par exemple, déterminer la dimension de $\left\{y \in \mathscr{D}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ y' = 2y\right\}$.

6. L'ensemble des solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension deux. Nous le reverrons dans le Chapter ANA.10. Par exemple, déterminer la dimension de $\left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 3u_n\right\}$.

Enfin, un résultat fondamental qui nous permet de gagner du temps en pratique : lorsque le nombre d'éléments d'une famille est égal à la dimension de l'espace en question (encore faut-il la connaître, on ne l'utilisera donc que dans ce cas), il suffit de prouver le caractère générateur **OU** libre.

Théorème ALG.3.4

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** $n \neq 0$ et $\mathscr{F}$ une famille finie telle que $\# \mathscr{F} = \dim \mathrm{E}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ est une base de E} &\iff \mathscr{F} \text{ est une famille libre de E} \\ &\iff \mathscr{F} \text{ est une famille génératrice de E.} \end{aligned}$$

Remarque 3.1 — Et en général, on préfère souvent montrer qu'une famille est libre... c'est souvent plus rapide.

Preuve Dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, si une famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs est libre (*resp.* génératrice), on peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète (*resp.* en extraire une base d'après le théorème de la base extraite).
Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on a en fait ajouté (*resp.* ôté) aucun vecteur à $\mathscr{B}$. Conclusion : $\mathscr{B}$ était une base dès le départ.

Exemple 25 —

1. La famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

2. Pour $a \in \mathbf{K}$. La famille de polynômes $\mathscr{F} = \left(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3\right)$ est une base de $\mathbf{K}_3[X]$. Déterminer les coordonnées d'un polynôme dans cette base.

3.2. Sous-espaces et dimension

Proposition ALG.3.12

Soient E un **K**-espace vectoriel de **dimension finie** et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

- F est de dimension finie, et : $\dim F \leqslant \dim E$.
- $\dim F = \dim E \iff F = E$.

Preuve Admise.

3.3. Rang

Définition ALG.3.10 | Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille finie d'un **K**-espace vectoriel E. On appelle *rang sur **K** de la famille* $(x_1, \dots, x_n)$, et on note $\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_n)$, la dimension sur **K** de $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_n) = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_n).$$

Notation

On notera plus simplement $\mathrm{Rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ lorsque le contexte est clair.

Exemple 26 —

1. Dans $\mathbf{K}[X]$, on a : $\mathrm{Rg}(1, X, X^2, X^3) = 4$.
2. Dans $\mathbf{K}[X]$, on a : $\mathrm{Rg}(0_{\mathbf{K}[X]}, X, 2X, 3X) = 1$.
3. Dans $\mathbf{R}^3$, on a : $\mathrm{Rg}((1,1,0),(0,0,1)) = 2$.
4. Dans $\mathbf{R}^3$, on a : $\mathrm{Rg}((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)) = 2$.
5. Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, calculer : $\mathrm{Rg}\left((2^n), (n2^n)\right)$.

4. APPLICATIONS LINÉAIRES

Les espaces vectoriels sont en particulier des ensembles, on peut donc tout à fait considérer des applications entre eux. Mais pour pouvoir faire des calculs, il faut que notre définition tienne compte des opérations $+,.$. On va donc supposer qu'une *application linéaire* transforme les sommes en sommes et les produits avec un scalaire en produits.

Avant de passer à la définition, souvenez-vous que vous connaissez déjà des exemples d'applications linéaires. En l'occurence celles vues en troisième : en effet, si $E = F = \mathbf{R}$ dans les définitions *infra*, alors $x \in E \longmapsto Kx \in F$ sera une application linéaire au sens de la définition qui suit, pour tout $K \in \mathbf{R}$.

4.1. Généralités

Définition ALG.3.11 | Application linéaire

Soient $(E, +_E, ._E)$ et $(F, +_F, ._F)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On appelle *application* $\boxed{\mathbf{K}}$*-linéaire* (parfois aussi *morphisme linéaire*) de E dans F toute application $u : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \boxed{\mathbf{K}}^2, \quad u(\lambda ._E x +_E \mu ._E y) = \lambda ._F u(x) +_F \mu ._F u(y).$$

- Lorsque $u(E) \subset E$, *i.e.* pour tout $x \in E$, $u(x) \in E$, on dit que u est un *endomorphisme*.[18]
- Si $F = \mathbf{K}$ alors on dit que u est une *forme linéaire* sur E.

[18] Provient du grec *endon* qui signifie « à l'intérieur », que vous connaissez déjà des S.V.T. *via* le qualificatif « endogène ».

Notation

On note :
- $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications K-linéaires de E dans F, ou plus simplement $\mathscr{L}(E, F)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- On note parfois $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E, \mathbf{K}) = \mathbf{E}^\star$ l'ensemble des formes linéaires, cet ensemble est appelé *espace dual* de E.

Remarque 4.1 — De façon équivalente,[19] l'application $u : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si elle est compatible avec la somme et la multiplication par un scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad u(x +_E y) = u(x) +_F u(y),$$
$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall x \in E, \quad u(\lambda ._E x) = \lambda ._F u(x).$$

Remarque 4.2 — Abus de notation Puisqu'il s'agit de notre définition initiale, nous notons très correctement en indices les espaces vectoriels auxquels sont attachées les opérations $+_E, ._E, +_F, ._F$ .... À partir de maintenant, nous noterons simplement $+,.$. Ainsi, avec cet abus, la définition *supra* se réecrit plus simplement :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad u(\lambda . x + \mu y) = \lambda . u(x) + \mu . u(y).$$

Proposition ALG.3.13 | Le neutre est envoyé sur le neutre

Soient $(E, +_E, ._E)$ et $(F, +_F, ._F)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application *linéaire*. Alors :

$$u(0_E) = 0_F.$$

Preuve Faire simplement $\lambda = \mu = 0$ et $x = y = 0_E$ dans la définition d'une application linéaire.

[19] Mais il est plus rapide de vérifier la définition

Méthode Montrer qu'une application n'est pas linéaire

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, on peut :

- vérifier si l'égalité $u(0_E) = 0_F$ est vérifiée.
- Si c'est le cas, on cherche s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $x, y \in E$ tels que : $u(\lambda.x + \mu y) \neq \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.

Exemple 27 — ***Contre...*** Les applications ci-après ne sont pas linéaires.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2, \\ (x, \ldots, z) & \longmapsto & (x+y+z+1, z), \end{array} \right.$

2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x, y, z) & \longmapsto & x^2 + y + z. \end{array} \right.$

Commençons par quelques premiers exemples.

Exemple 28 — ***avec des uplets*** Les applications suivantes sont linéaires.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x-2y+z, 2x+3y-5z, x+y+z) \end{array} \right. .$

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. $\pi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, une forme linéaire sur $\mathbf{K}^n$ appelée *i-ème projection canonique.*

Plus généralement, l'application qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans une base fixée est toujours linéaire, nous le montrerons dans la proposition qui suit.

3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. $\mu \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbf{K}^n$ appelée *moyenne* en statistiques.

Exemple 29 — *Avec des polynômes, suites, ...* Les applications suivantes sont linéaires :

1. $D \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X], \\ P & \longmapsto & P(X^2+1), \end{array} \right.$

2. $\varphi \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array} \right.$

3. $\psi \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^3, \\ f & \longmapsto & (f(0), f(1), f(2)). \end{array} \right.$

4. $\delta \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}. \end{array} \right.$

Définition/Proposition ALG.3.5 | Identité et homothétie

- $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E, appelé *endomorphisme identité* (ou *endomorphisme identique*).
- Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, l'application $\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est un endomorphisme de E appelé *homothétie* de *rapport* λ.

Preuve

Proposition ALG.3.14 | Dépendance linéaire des coordonnées d'un vecteur

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $n \geqslant 1$. Si $x \in \mathrm{E}$, notons $\lambda_i(x)$ la i-ème coordonnée de x dans la base $\mathscr{B}$ avec $i \in [\![1\,,\,n]\!]$. Alors l'application

$$\pi_i^{\mathscr{B}} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_i(x) \end{array} \right. \quad \text{est une forme inéaire.}$$

Preuve Supposons pour simplifier que $n = 2$. La preuve pour n quelconque est identique.

Proposition ALG.3.15 | Opérations sur les applications linéaires

Soient E, F et G des **K**-espaces vectoriels.

1. **(Combinaison linéaire)** Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ et $(u,v) \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})^2$. Alors $\lambda u + \mu v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Ces opérations définissent une structure de **K**-espace vectoriel $\left(\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(\mathrm{E},\mathrm{F}),+,.\right)$.
2. **(Composition)** Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors :
$$v \circ u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G}).$$
3. **(Restriction)** Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors l'application
$$u|_{\mathrm{V}} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$
est appelée *application restreinte*[20] *de u à* V. C'est une application linéaire de V dans F.

Preuve

1.

4.2. Structure de K-espace vectoriel sur $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et puissances

2.

[20] Puisqu'une application est déterminée par : un ensemble de déparrt et d'arrivée, et une opération d'association, il est important d'introduire une autre notation pour la restriction. Nous avons changé l'ensemble de départ ici.

3. Évident.

Attention

Même si $u|_{\mathrm{V}}$ et u coïncident sur V, en tant qu'application elles sont différentes (puisque leur espace de départ n'est pas le même).

Exemple 30 — On considère les applications :

$$u \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad v \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array} \right.$$

Calculons $u \circ v$ et $v \circ u$. Que constate-t-on ?

Attention

En général, on note plutôt uv pour des applications linéaires au lieu de $u \circ v$. Mais soyez méfiant vis-à-vis de cette notation, cela ne désigne en aucun cas l'application produit $x \longmapsto u(x)v(x)$ qui n'a même aucun sens ici.[21]

Puissances d'un endomorphisme On se place désormais dans le cas d'endomorphismes, *i.e.* lorsque E = F.

Définition ALG.3.12 | Puissances

Soit E un **K**-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors on définit par récurrence l'endomorphisme f^k pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \\ \forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f. \end{cases}$$

Remarque 4.3 — On suppose que f est un **endo**morphisme, tout simplement pour que les composées aient un sens. On pourrait faire sans cette hypothèse et supposer plus généralement que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$ si $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$.

Exemple 31 —

1. On considère à nouveau

$$u \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x). \end{array} \right.$$

Calculer les puissances de u.

[21] Pourquoi ? Nous l'avons déjà vu : nous ne pouvons pas multiplier deux vecteurs entre eux.

2. On considère

$$T \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1). \end{array} \right.$$

Calculer les puissances de T.

4.3. Image & Noyau

La notion d'image d'application a déjà été rencontrée en première année, elle est donc toujours en vigueur pour des applications en particulier linéaires, et fortement reliée à la surjectivité. Nous allons voir que l'injectivité peut dans le cas d'applications linéaires être reformulée à l'aide de ce que nous appellerons le *noyau* ; mais bien entendu il est toujours possible de recourir à la définition basique vue l'année dernière. C'est-à-dire *une application* $u : E \longrightarrow F$ *entre deux ensembles* E *et* F *est injective si*

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad u(x) = u(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Définition/Proposition ALG.3.6 | Image directe d'un espace vectoriel

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors :

- l'ensemble $u(V) = \{u(x),\ x \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé *image directe de* V *par* u.
- On appelle *image de* u, et on note $\operatorname{Im} u$, l'image directe de E — l'ensemble de départ — par l'application u :

$$\operatorname{Im} u = u(E).$$

C'est le sous-espace vectoriel <u>**de**</u> F constitué des vecteurs qui sont l'image d'un vecteur de E par u. En d'autres termes, pour $y \in F$:

$$y \in \operatorname{Im} u \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in E, \quad y = u(x).$$

Preuve Montrons que $u(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Attention

Il est complètement faux de se passer de la linéarité dans l'énoncé précédent. Par exemple, $u : x \in \mathbf{R} \longrightarrow 1+x$ n'est pas une application linéaire (zéro n'est pas envoyé sur zéro), et $u(\{0\}) = \{1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de **R** puisqu'il ne contient pas zéro.

Passons maintenant à la définition du noyau. Reprenons la définition de l'injectivité rappelée plus haut :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad u(x) = u(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Puisque u est linéaire, elle est équivalente à :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad u(x-x') = 0_F \quad \Longrightarrow \quad x - x' = 0_E.$$

Par conséquent, une application injective linéaire vérifie (en renommant $y = x - x'$) :

$$\forall y \in \mathrm{E}, \quad u(y) = 0_\mathrm{F} \quad \Longrightarrow \quad y = 0_\mathrm{E}.$$

Autrement dit, le seul vecteur y vérifiant $u(y) = 0_\mathrm{E}$ est le vecteur nul. Cela nous incite alors à considérer l'ensemble des vecteurs qui s'envoient sur 0_F : nous appellerons cet ensemble le *noyau* de u.

Définition/Proposition ALG.3.7 | Noyau

On appelle *noyau* de u, et on le note $\operatorname{Ker} u$, l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} u = \{x \in \mathrm{E},\ u(x) = 0_\mathrm{F}\}.$$

C'est le sous-espace vectoriel **de** E constitué des vecteurs ayant 0_F pour image par u. Donc, pour $x \in \mathrm{E}$:

$$x \in \operatorname{Ker} u \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) = 0_\mathrm{F}.$$

Preuve Montrons que $\operatorname{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Résumé Qui est dans quoi ?

On retient donc :
- le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ,
- l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.

Exemple 32 — Soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Alors, on a :

- $\operatorname{Im}(0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})}) = \{0_\mathrm{F}\}$, $\operatorname{Ker}(0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})}) = \mathrm{E}$,
- $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{E}$, $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}$.

Proposition ALG.3.16 | Caractérisation de la surjectivité/injectivité pour les applications linéaires

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors :

- u est injective $\iff$ $\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathrm{E}}\}$,
- u est surjective $\iff$ $\operatorname{Im} u = \mathrm{F}$.

Preuve

- $\Longrightarrow$

  $\Longleftarrow$

- Pour la surjectivité, il n'y a rien à faire, c'est une conséquence du cours de 1ère année.

Attention

Notez bien que dans la preuve précédente, la linéarité fut **fondamentale** pour écrire pour tous $x, x' \in \mathrm{E}$:

$$u(x) = u(x') \iff u(x - x') = 0_{\mathrm{F}} \iff x - x' \in \operatorname{Ker} u.$$

Pas question donc de calculer des noyaux pour montrer qu'une application **NON** linéaire est injective. Par exemple, il est clair que $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2 \in \mathbf{R}$ n'est pas injective et pourtant son « noyau » est réduit à zéro.

Une dernière proposition avant de regarder des exemples.

Proposition ALG.3.17 | Image directe d'un « Vect »

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

$$u\left(\operatorname{Vect}(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) = \operatorname{Vect}(u(x_k))_{1\leqslant k\leqslant n}.$$

En particulier, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice finie de E, alors :
$(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$, et est donc de dimension finie.

Méthode Image d'une application si une famille génératrice de l'espace de départ est connue

1. On commence par chercher une famille génératrice $\mathscr{G}$ de l'ensemble de départ E.
2. On calcule les images de chacun des vecteurs de $\mathscr{G}$.
3. Si l'on souhaite une base, on cherche à extraire une sous-famille libre.

Preuve *(Point clef — **Exploiter la linéarité de** u)*
On a :

$$\begin{aligned} y \in u\left(\operatorname{Vect}(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) &\iff \text{il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ y = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \\ &\underset{\text{linéarité}}{\iff} \text{il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ y = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \\ &\iff y \in \operatorname{Vect}(u(x_k))_{1\leqslant k\leqslant n}. \end{aligned}$$

Déterminons l'imagede

Exemple 33 — Déterminer une base de l'image de

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z). \end{array} \right.$$

Passons à présent à des exemples de calculs de noyaux et d'images.

Exemple 34 — Pour les applications ci-dessous, déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ en exhibant une famille génératrice. *On admettra les linéarités dans cet exemple.*

1. $u \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array} \right. .$

2. $v \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, y, -x+y). \end{array} \right.$

3. $\mathrm{D} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

4. $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (a u_n) \end{array} \right.$ où $a \in \mathbf{R}$.

5. $\mathrm{T} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbf{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1). \end{array} \right.$

4.4. Isomorphismes

Définition ALG.3.13 | Isomorphisme, Automorphisme

- On appelle *isomorphisme* entre deux espaces vectoriels E et F toute application linéaire bijective de E dans F, dans ce cas on dit que E et F sont isomorphes.
- On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E, c'est donc un isomorphisme de E dans E.

Définition ALG.3.14 | Groupe linéaire GL(E)

Soit E un **K**-espace vectoriel, l'ensemble des automorphismes linéaires de E est noté GL(E), et appelé *groupe linéaire sur* E.

Résumé

- **morphisme** = application linéaire,
- **endomorphisme** = application linéaire + entre mêmes espaces,
- **isomorphisme** = application linéaire + bijective,
- **automorphisme** = application linéaire + bijective + entre mêmes espaces.

Une application bijective $u \in \mathscr{F}(E, F)$ (*i.e.* injective et surjective de E dans F) possède (voir cours de 1ère année) une application inverse $u^{-1} \in \mathscr{F}(F, E)$, *i.e.* satisfaisant :

$$u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F, \qquad u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Si celle de départ est linéaire, on montre que l'inverse l'est aussi comme le précise la Proposition ALG.3.18.

Proposition ALG.3.18 | Linéarité de l'inverse

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si u est un isomorphisme, alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ est un isomorphisme.

Preuve Il suffit de montrer que u^{-1} est linéaire elle aussi. En effet, soient $y, y' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, alors :

$$\begin{aligned} & u^{-1}(\lambda y + \mu y') \\ &= u^{-1}(\lambda u(u^{-1}(y)) + \mu u(u^{-1}(y'))) && u^{-1} \circ u = \mathrm{Id} \\ &= u^{-1} \circ u(\lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y')) && u \textit{ linéaire} \\ &= \lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y'). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité prouve bien la linéarité de u^{-1}.

Proposition ALG.3.19 | Composée d'isomorphisme = isomorphisme

Soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux isomorphismes de **K**-espaces vectoriels. Alors :

- $v \circ u$ est un isomorphisme de E dans G,
- et : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.[22]

Preuve

[22] Attention, l'ordre est inversé.

4.5. Cas particulier de la dimension finie

4.5.1. Rang d'une application linéaire

Définition ALG.3.15 | Rang d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que u est *de rang fini* si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie. On appelle alors *rang de* u sur $\mathbf{K}$, et on note $\operatorname{Rg}_{\mathbf{K}}(u)$, la dimension de $\operatorname{Im} u$ sur $\mathbf{K}$:

$$\operatorname{Rg}_{\mathbf{K}}(u) = \dim_{\mathbf{K}}(\operatorname{Im} u)$$

Notation

On notera plus simplement $\operatorname{Rg}(u) = \dim \operatorname{Im} u$ lorsque le contexte est clair.

La notion de rang décrite ici est fortement reliée à la notion de rang d'une famille de vecteurs définie précédemment. Le lien entre les deux apparaît avec le théorème suivant, qui pourra aussi s'écrire ultérieurement avec des matrices.

Théorème ALG.3.5 | Lien entre les notions de rang

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $\mathscr{B} = (x_1, ..., x_n)$ une famille génératrice de E et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, u est de rang fini et :

$$\operatorname{Rg}(u) = \operatorname{Rg}(u(\mathscr{B})) \quad \left(= \dim \operatorname{Vect}\left(u(x_1), ..., u(x_n)\right)\right).$$

Notez bien que le membre de gauche du théorème précédent est la notion de rang d'application que l'on vient de définir, les deux membres de droite correspondent à la notion de rang d'une famille de vecteurs définie début de ce chapitre, comme dimension « du vect ».

Preuve Notons $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice finie de E. Alors, nous avons déjà établi que :

$$u(E) = \operatorname{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Il suffit alors de passer à la dimension :

$$\left(\operatorname{Rg}(u) = \right) \dim(u(E)) = \dim \operatorname{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Proposition ALG.3.20 | Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

Soient E, E′, F et F′ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $v \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini, $u \in \mathscr{L}(E', E)$ et $w \in \mathscr{L}(F, F')$ deux **isomorphismes**. Alors $v \circ u$ et $w \circ v$ sont de rangs finis et :

$$\operatorname{Rg}(v) = \operatorname{Rg}(v \circ u) = \operatorname{Rg}(w \circ v).$$

En d'autres termes, le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.

Preuve Admis.

Théorème ALG.3.6 | Théorème du rang

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors u est de rang fini et

$$\dim E = \operatorname{Rg}(u) + \dim \operatorname{Ker} u$$

Attention

Bien mettre la dimension de l'espace de **départ** dans le membre de droite.

Preuve Notons $n = \dim E$.

1. **(Complétion d'une base de** $\operatorname{Ker} u$**)** D'après le théorème de la base incomplète, notant $e_1, \dots, e_p$ une base de $\operatorname{Ker} u$, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ des éléments de E tels que $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. Notons par ailleurs $S = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ l'espace vectoriel engendré pas les vecteurs qui complètent.
2. **(Il suffit de montrer que** $v = u|_S \in \mathscr{L}(S, \operatorname{Im} u)$ **est un isomorphisme.)** En effet, si c'est le cas, on a alors $\dim S = \dim F$, mais comme $\dim S + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$, le résultat s'en suivra.
Il est immédiat que $v = u|_S \in \mathscr{L}(S, \operatorname{Im} u)$, montrons donc le caractère bijectif. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$, *i.e.* $x \in S$ et $x \in \operatorname{Ker} u$, or puisque $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique couple $(x_K, x_S) \in \operatorname{Ker} u \times S$ tel que $x = x_K + x_S$. Mais $x = x + 0$ et $x = 0 + x$ sont deux autres décompositions (puisque $x \in S$ et $x \in \operatorname{Ker} u$) donc

par unicité : $x_K = 0 = x_S$ donc $x = 0_E$.
Reste à montrer la surjectivité. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$, mais comme mentionné plus tôt il existe un unique couple $(x_K, x_S) \in \operatorname{Ker} u \times S$ tel que $x = x_K + x_S$, donc $u(x) = 0 + u(x_S)$, et finalement $u(x_S) = y$ justifie l'existence d'un antécédent dans S pour y.

Remarque 4.4 — Majoration sur le rang On en déduit notamment que si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $\dim E = n \in \mathbf{N}$ et $\dim F = p \in \mathbf{N}$, alors

$$\boxed{\operatorname{Rg} u \leqslant \min(n, p)}.$$

En effet,

Attention
L'énoncé est faux en dimension infinie !

Théorème ALG.3.7
Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de **dimension finie** telle que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(i) u est bijective $\iff$ **(ii)** u est injective $\iff$ **(iii)** u est surjective.

Preuve D'après le théorème du rang, puisque E est de dimension finie, on a $\dim E = \operatorname{Rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$. Montrons alors que **(ii)** $\iff$ **(iii)** (l'équivalence **(i)** $\iff$ **(ii)** s'en suivra alors sans difficulté).

Ce résultat paraît anecdotique, mais il est d'importance capitale dans la pratique : il permet de réduire bon nombre de problèmes à une preuve d'injectivité d'application linéaire (souvent relativement aisée). Voyons deux exemples.

Exemple 35 — *Existence d'un polynôme interpolateur* Soient un entier $n \in \mathbf{N}$ et une famille de $n+1$ réels distincts $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n+1}$. Montrons que pour toute famille de réels $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ il existe un unique $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(x_k) = y_k.$$

Le théorème précédent permet de montrer l'existence et l'unicité sans effort. En effet, considérons l'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big). \end{array} \right.$$

4.5.2. Image de familles de vecteurs

Théorème ALG.3.8 | Construction d'une application linéaire à l'aide d'une base

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et de **base** $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, F un **K**-espace vectoriel de dimension quelconque, et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille **quelconque** de n vecteurs de F. Alors :

il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que

$$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad u(e_i) = f_i,$$

De plus, avec u ainsi définie,

1. u est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille libre de F,
2. u est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F,
3. u est un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de F.

Preuve Commençons par construire u.

La propriété **3)** est immédiate en combinant **1)** et **2)**. Montrons **1)**.

Remarque 4.5 — Si l'on veut rendre le raisonnement plus explicite, on introduira les *polynômes d'interpolation de* LAGRANGE.

De-même pour **2)**.

$$\begin{aligned}
u \text{ est surjective} \quad &\iff \quad \forall y \in \mathrm{F}, \exists x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i,\ y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) f_i, \\
&\iff \quad \forall y \in \mathrm{F}, \exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbf{K},\ y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i, \\
@ \quad &\iff \quad \mathscr{F} \text{ est génératrice.}
\end{aligned}$$

Exemple 36 — Soit $n \in \mathbf{N}$, et notons $\mathrm{E} = \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \mathbf{R}_{n+1}$.

Méthode Construction d'applications linéaires à l'aide d'une base

À la question « construisez une application linéaire entre E et F », si vous connaissez une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, vous pouvez répondre :

$$\text{je pose} \quad u(e_1) = \mathrm{Truc}_1 \in \mathrm{F}, \quad \dots, \quad \text{je pose} \quad u(e_n) = \mathrm{Truc}_n,$$

en découlera alors automatiquement $u(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ par linéarité.

Remarque 4.6 — On retiendra notamment deux idées importantes :

- une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base ; ce fait est important à analyser pour comprendre la notion de matrice d'application linéaire du prochain chapitre,
- u est un isomorphisme si et seulement si l'image **d'une** base de E est une base de F.

La première partie de la remarque nous conduit tout droit au chapitre suivant : comment représenter les applications linéaires notamment par des matrices ?

★ ★ ★ **Fin du chapitre** ★ ★ ★

5. EXERCICES

Exercice ALG.3.1 | **Vrai ou Faux?** En cas de réponse fausse, on donnera un contre-exemple.

1. La famille $x \longmapsto x, x \longmapsto -x, x \longmapsto |x|$ est libre.
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
3. Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est une combinaison linéaire de deux de ces vecteurs.
4. Si u, v sont deux applications linéaires telles que $u \circ v = 0$, alors $u = 0$ ou $v = 0$.
5. Si E est de dimension finie, et $x, y \in \mathrm{E}$, alors il existe un endomorphisme u de E tel que $u(x) = y$.

5.1. Structure d'espace vectoriel

Exercice ALG.3.2 | **Être ou ne pas être un espace vectoriel dans $\mathbf{K}^n$** Les ensembles ci-dessous, sont-ils, munis de l'addition et la multiplication par un scalaire des vecteurs, des espaces vectoriels? On les représentera graphiquement lorsque cela est possible.

1. $\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2,\ x = y\right\}$, $\mathrm{E}_1' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y\right\}$, $\mathrm{E}_1'' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \geqslant y\right\}$,
2. $\mathrm{E}_2 = (\mathrm{O}x) \cup (\mathrm{O}y)$, $\mathrm{E}_2' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y = 1\right\}$,
3. $\mathrm{E}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y - x = 1\right\}$,
4. $\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\right\}$, $\mathrm{E}_4' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = 0\right\}$,
5. $\mathrm{E}_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x + y + z = 0, x - y + z = 0\right\}$, puis trouver une famille génératrice de E_5 (dit autrement, on demande d'écrire l'espace sous forme paramétrique),
6. l'ensemble E_6 des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre $n \geqslant 1$, $\mathrm{E}_6' = \left\{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ {}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} + \mathrm{M} = 0\right\}$.

Solution (exercice ALG.3.2) . . . .

1. $\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2,\ x = y\right\}$ n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par opposé. En effet, $(1,1) \in \mathrm{E}_1$ mais $-(1,1) = (-1,-1) \notin \mathrm{E}_1$. L'ensemble E_1' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ puisqu'il ne contient pas $(0,0)$. L'ensemble E_1'' n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$, en effet $(1,0) \in \mathrm{E}_1''$, $(-1,-3)$ alors que $(1,0) - (-1,-3) = (2,3) \notin \mathrm{E}_1''$ car $3 > 2$.
2. $\mathrm{E}_2 = (\mathrm{O}x) \cup (\mathrm{O}y) = \mathrm{Vect}(1,0) \cup \mathrm{Vect}(0,1)$. Le vecteur $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ n'est pas dans E_2, donc E_2 n'est pas stable par somme, ce n'est donc pas un espace vectoriel, de-même pour E_2' car il ne contient pas $(0,0)$.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas $(0,0)$.
4. $\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\right\}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet, le vecteur $(1,1)$ est un élément de E_4, de-même pour $(2,-2)$, mais pas $(2,-2) + 2(1,1) = (4,0)$. L'ensemble E_4' est égal à $\{(0,0)\}$ puisque $x^2 + y^2 \iff x, y = 0, 0$ pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.
5. $\mathrm{E}_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x + y + z = 0, x - y + z = 0\right\}$. Exprimons cet espace sous forme d'un Vect. Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
\iff\ &\begin{cases} x + \ \ y + z = 0 \\ \quad -2y \quad\ = 0 \end{cases} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\
\iff\ &\begin{cases} x \quad\ = -z \\ \quad y = 0 \end{cases} \\
\iff\ &(x,y,z) = (x,0,-x) = x(1,0,-1).
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{E}_5 = \mathrm{Vect}(1,0,-1)$, c'est en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
6. E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ puisque la matrice nulle est en particulier triangulaire supérieure, et que toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure. Le second est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.
   - ${}^{\mathrm{T}}0 + 0 = 0$, où 0 désigne ici la matrice nulle de format $n \times n$.
   - L'ensemble en question est bien inclus dans l'espace vectoriel des matrices $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.
   - Soient deux matrices $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ vérifiant ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} + \mathrm{M} = 0$ et ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{N} + \mathrm{N} = 0$ ainsi

que $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On a, par linéarité de la transposition :

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{T}}(\lambda \mathrm{M}+\mu \mathrm{N})+\lambda \mathrm{M}+\mu \mathrm{N} &= \lambda\, {}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}+\mu\, {}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}+\lambda \mathrm{M}+\mu \mathrm{N} \\ &= \lambda\left({}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}+\mathrm{M}\right)+\mu\left({}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}+\mathrm{N}\right)=\lambda 0+\mu 0=0.\end{aligned}$$

Donc E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.

Exercice ALG.3.3 | **Être ou ne pas être un espace vectoriel de suites, fonctions, ...**
Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas, en précisant le corps de base.

1. L'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4.
2. L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbf{R}$.
3. L'ensemble des suites arithmétiques de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Soit $r \in \mathbf{R}$, même question avec l'ensemble des suites arithmétiques de raison r.
4. L'ensemble des suites géométriques de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Soit $\rho \in \mathbf{R}$, même question avec l'ensemble des suites géométriques de raison ρ.
5. L'ensembles des fonctions réelles définies sur $]-1,1[$, continues, positives ou nulles.

Solution (exercice ALG.3.3)

1. Faux, considérons $f: x \longmapsto x-4$, $g: x \longmapsto x-1$, alors les deux fonctions appartiennent à l'ensemble considéré, et pourtant $f+g$ ne s'annule ni en 1 ni en 4 ($(f+g)(1)=-3, (f+g)(0)=-5$). L'ensemble n'est donc pas stable par somme, *a fortiori* ce n'est pas un espace vectoriel.
2. Faux. Par exemple g définies précédemment est croissante, et pourtant $-g$ ne l'est pas.
3.
   - Vrai dans le premier cas. En effet, notons $r, r' \in \mathbf{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r, (u'_n) une suite arithmétique de raison r'. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

     $$\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}=\lambda(u_n+r)+\mu(v_n+r')=\lambda u_n+\mu v_n+(\lambda r+\mu r').$$

     Ceci prouve que $(\lambda u_n+\mu v_n)_n$ est encore arithmétique, de raison $\lambda r+\mu r'$.
   - En revanche, si l'on impose la même raison r pour les deux suites, cela ne fonctionne plus. En effet, la suite $(u_n)=(1+nr)_n, (v_n)=(nr)_n$ sont arithmétiques de raison r, et pourtant $(u_n)+(v_n)=(1+n(2r))$ est arithmétique de raison $2r$. L'ensemble n'est pas donc pas stable par somme.
4. Pour les suites géométriques, c'est curieusement l'inverse. Si l'on impose la raison, l'ensemble forme un espace vectoriel, et par contre ce n'est pas le cas dans le cas contraire.
   - Faux, si l'on impose pas de raison. En effet, (2^n) est géométrique de raison 2, (1) est géométrique de raison 1. Et pourtant (2^n+1) n'est pas géométrique car $\left(\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right)$ n'est pas une suite constante (valeurs en 0 et 1 distinctes par exemple).
   - Notons $(u_n), (v_n)$ deux suites géométriques de raison ρ. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

     $$\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}=\lambda \rho u_n+\mu \rho v_n=\rho(\lambda u_n+\nu v_n).$$

     Ceci prouve que $(\lambda u_n+\mu v_n)_n$ est géométrique de raison ρ. L'ensemble des suites géométriques de raison ρ est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.
5. Faux. En effet, $x \longmapsto x$ est positive continue ou nulle sur $]-1,1[$, mais $x \longmapsto -x$ ne l'est pas. L'ensemble n'est donc pas stable par opposé et n'est *a fortiori* pas un espace vectoriel.

5.2. Familles de vecteurs et dimension

Exercice ALG.3.4 | **Études de liberté/génération dans $\mathbf{K}^n$**

1. Les familles suivantes sont-elles libres ?
   1.1) $\mathscr{L}_1=((1,1,1),(2,2,2))$,
   1.2) $\mathscr{L}_2=((1,0,1),(0,2,2),(3,3,0))$,
   1.3) $\mathscr{L}_3=((-1,-2,2),(4,-3,-2),(2,-1,-1))$.
2. Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbf{R}^3$?

2.1) $\mathscr{G}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$,

2.2) $\mathscr{G}_2 = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$.

Solution (exercice ALG.3.4)

1. **1.1)** Clairement non, puisque $(2,2,2) = 2(1,1,1)$.

1.2) Soient $\lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda(1,0,1)+\mu(0,2,2)+\nu(3,3,0) = (0,0,0$. Alors $\begin{cases} \lambda+3\nu &= 0, \\ 2\mu+3\nu &= 0, \\ \lambda+2\mu &= 0 \end{cases}$. En faisant $L_3 \to L_3 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda+3\nu &= 0, \\ 2\mu+3\nu &= 0, \\ 2\mu-3\nu &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+3\nu &= 0, \\ 2\mu+3\nu &= 0, \\ 4\mu &= 0 \end{cases}$$

On déduit alors $\lambda = \mu = \nu = 0$, la famille est libre.

1.3) Soient $\lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda(-1,-2,2)+\mu(4,-3,-2)+\nu(2,-1,-1) = (0,0,0$. Alors $\begin{cases} -\lambda+4\mu+2\nu &= 0, \\ -2\lambda-3\mu-\nu &= 0, \\ 2\lambda-2\mu-\nu &= 0 \end{cases}$. Faisons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient

$$\begin{cases} -\lambda+4\mu+2\nu &= 0, \\ -11\mu-5\nu &= 0, \\ 6\mu+3\nu &= 0 \end{cases}.$$

Avec les deux dernières lignes, on obtient $\mu = \nu = 0$, puis $\lambda = 0$ dans la première ligne.

2. Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbf{R}^3$?

2.1) Puisque $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}_1) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et que $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice (c'est la base canonique), la famille $\mathscr{G}_1$ est elle aussi génératrice.

2.2) Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Alors cherchons λ,μ,ν tels que

$$(x,y,z) = \lambda(0,1,1)+\mu(1,0,1)+\nu(1,1,0).$$

D'où le système $\begin{cases} x &= \mu+\nu, \\ y &= \lambda+\nu, \\ z &= \lambda+\mu \end{cases}$. Faisons $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. Donc

$$\begin{cases} x &= \mu+\nu, \\ y &= \lambda+\nu, \\ z &= \mu-\nu \end{cases}.$$

En considérant les deux premières lignes nous avons : $\mu\frac{x+z}{2}, \nu = \nu = \frac{x-z}{2}$. Donc $\lambda = y - \frac{x-z}{2}$. On a donc, pour tout (x,y,z) une solution (λ,μ,ν), donc la famille est génératrice de $\mathbf{R}^3$.

Exercice ALG.3.5 | **Avec un paramètre** Pour $m \in \mathbf{R}$, on note $u = (4-m,4,4)$, $v = (3,3-m,6)$ et $w = (3,6,3-m)$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la famille (u,v,w) est-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

Solution (exercice ALG.3.5)

Soient λ,μ,ν telles que

$$\lambda(4-m,4,4)+\mu(3,3-m,6)+\nu(3,6,3-m) = 0,$$

on obtient alors le système suivant, que l'on souhaite résoudre en (λ,μ,ν) par la méthode du pivot. Commençons par échanger les lignes 1 et 3 afin d'avoir un pivot indépendant de λ en position $(1,1)$.

$$\begin{cases} (4-m)\lambda+3\mu+3\nu &= 0, \\ 4\lambda+(3-m)\mu+6\nu &= 0, \\ 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &= 0, \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\underset{L}{\sim} \begin{cases} 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &= 0, \\ 4\lambda+(3-m)\mu+6\nu &= 0, \\ (4-m)\lambda+3\mu+3\nu &= 0, \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1,$
$L_3 \leftarrow 4L_3 - (4-m)L_1$

$$\underset{L}{\sim} \begin{cases} 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &= 0, \\ -(m+3)\mu+(m+3)\nu &= 0, \\ 6(m-2)\mu+m(7-m)\nu &= 0, \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

- si $m=-3$, alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{rl} 2\lambda+3\mu+3\nu &=0,\\ 6(-5)\mu+10.(-3)\nu &=0,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2\lambda &=0,\\ \mu &=-\nu.\end{array}\right.$$

Ainsi, le triplet $(0,1,-1)$ est une solution non nulle du système donc la famille n'est pas libre.

- Si $m\neq -3$, alors le système est

$$\left\{\begin{array}{rl} 4\lambda+(9-m)\mu &=0,\\ \mu &=\nu,\\ (6(m-2)+m(7-m))\mu &=0,\end{array}\right.$$

mais $6(m-2)+m(7-m)=-m^2+13m-12=-(m-1)(m-12)$. Donc si $m\in\{1,12\}$, on obtient $\left\{\begin{array}{rl} 4\lambda+(9-m)\mu &=0,\\ \mu &=\nu,\end{array}\right.$, il existe alors des solutions non nulles puisque $9-m\neq 0$. La famille n'est pas libre. En revanche, si $m\neq 1,12$, le système devient

$$\left\{\begin{array}{rl} 4\lambda+(9-m)\mu &=0,\\ \mu &=\nu,\\ \mu &=0,\end{array}\right. \iff \lambda=\mu=\nu=0.$$

La famille est donc libre dans ce cas.

A-t-on trois vecteurs dans cette famille ? $u\neq v$ car $4\neq 6$, et $v=w$ si et seulement si $m=-3$. Donc lorsque $m\neq -3$, la famille considérée est de cardinal 3. En conclusion

$$\boxed{(u,v,w) \text{ est une base de } \mathbf{R}^3 \text{ si et seulement si } m\neq -3,1,12.}$$

Exercice ALG.3.6 | Pour $a\neq b$ deux complexes et $n\geqslant 1$, on définit pour tout $k\in [\![0\,,\,n]\!]$,

$$P_k=(X-a)^k(X-b)^{n-k}.$$

Montrer que $(P_0,\ldots,P_n)$ est libre dans $\mathbf{C}[X]$.

Solution (exercice ALG.3.6)

Faisons une récurrence sur n, le nombre de polynômes -1 de la famille.

■ **Initialisation.** Pour $n=0$, puisque $P_0=1$ n'est pas le polynôme nul, la famille est clairement libre.

■ **Hérédité.** Supposons la famille libre pour $n+1$ polynômes. Alors considérons $(P_0,\ldots,P_n,P_{n+1})$ et montrons que cette famille est libre. Soient $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n+1}\in\mathbf{C}$ tels que :

$$\lambda_0(X-b)^{n+1}+\lambda_1(X-a)(X-b)^n+\cdots+\lambda_n(X-a)^n(X-b)+\lambda_{n+1}(X-a)^{n+1}=0.$$

Alors évaluons en b, on obtient puisque $a-b\neq 0$

$$\lambda_0 0+\lambda_1 0+\cdots+\lambda_n 0+\lambda_{n+1}(b-a)^{n+1}=0 \implies \lambda_{n+1}=0.$$

Donc :

$$(X-b)\left(\lambda_0(X-b)^n+\lambda_1(X-a)(X-b)^{n-1}+\cdots+\lambda_n(X-a)^n\right)=0.$$

Comme $X-b\neq 0_{\mathbf{C}[X]}$, on a :

$$\lambda_0(X-b)^n+\lambda_1(X-a)(X-b)^{n-1}+\cdots+\lambda_n(X-a)^n=0.$$

Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(P_0,\ldots,P_n)$, et l'on obtient :

$$\lambda_0=\cdots=\lambda_n=0.$$

Donc la famille est libre.

Exercice ALG.3.7 | **Étude de liberté de familles de fonctions**

1. Pour $k=0,\ldots,n$ on définit $e_k : x\longmapsto e^{kx}$. Montrer que $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2. Pour $k=0,\ldots,n$ on définit, $f_k : x\mapsto |x-k|$. Montrer que $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Solution (exercice ALG.3.7)

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété «la famille $e_k : x \mapsto e^{kx}$ pour $k = 0, ..., n$» est libre.

■ **Initialisation.** Pour $n = 0$ c'est immédiat, puisque l'exponentielle est non nulle.

■ **Hérédité.** Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbf{N}$. Alors soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{nx} + \lambda_{n+1} e^{(n+1)x} = 0.$$

Alors en factorisant par $e^{(n+1)x}$ dans l'identité précédente, nous obtenons :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^{-(n+1)x} \left(\frac{\lambda_0 + \lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{nx}}{e^{(n+1)x}} + \lambda_{n+1} \right) = 0.$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors en faisant $x \longrightarrow \infty$ nous obtenons une limite infinie dans le membre de gauche, ce qui est contradictoire. Donc $\lambda_{n+1} = 0$. Et par hypothèse de récurrence, les autres constantes sont nulles également.

En conclusion, $\boxed{(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est libre}}$.

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lambda_0 |x| + \lambda_1 |x-1| + \cdots + \lambda_n |x-n| = 0.$$

Constatons que pour $k = 0, ..., n$ la fonction $f_k : x \mapsto |x-k|$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ sauf en $x = k$. Ainsi, si l'un des λ_k est non nul, par exemple λ_0, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| = \frac{1}{\lambda_0} \left(-\lambda_1 |x-1| + \cdots + \lambda_n |x-n| \right) = 0.$$

Or la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\lambda_0} \left(-\lambda_1 |x-1| + \cdots + \lambda_n |x-n| \right)$ est dérivable en zéro, alors que $x \longmapsto |x|$ ne l'est pas — contradiction. Ainsi, $\lambda_0 = 0$, il suffit ensuite de recommencer l'opération pour tous les autres λ_i. En conclusion, $\boxed{(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est libre}}$.

Exercice ALG.3.8 | Soient les deux ensembles ci-dessous.

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ y = z \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x + y + 2z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$, et donner une base de F et de G.
2. Déterminer une base de $F \cap G$.

Solution (exercice ALG.3.8)

1. Nous savons, d'après le cours de géométrie, que ce sont des équations cartésiennes d'hyperplans de $\mathbf{R}^3$.

▸

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff y = z \\ &\iff (x, y, z) = (x, y, y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1). \end{aligned}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1))$, c'est donc $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^3}$ et $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ en est une famille génératrice. Elle est clairement libre donc c'est une base de F, $\dim F = 2$.

▸

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G &\iff x + y + 2z = 0 \\ &\iff (x, y, z) = (-y - 2z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1). \end{aligned}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$, c'est donc $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^3}$ et $((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ en est une famille génératrice. Elle est clairement libre donc c'est une base de G, $\dim G = 2$.

2. $$(x, y, z) \in F \cap G \iff \begin{cases} x + y + 2z &= 0, \\ \quad\quad y &= z \end{cases}$$
$$\iff x = -3z, y = z \iff (x, y, z) = (-3z, z, z) = z(-3, 1, 1).$$

Donc : $\boxed{F \cap G = \mathrm{Vect}((-3, 1, 1))}$.

Exercice ALG.3.9 | **Un hyperplan de $\mathbf{R}^n$** Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels et F le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$F = \{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n = 0 \}.$$

1. Montrer, de deux manières, que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Solution (exercice ALG.3.9)

1. ▸ Première méthode :

$$\begin{aligned}&(x_1,\dots,x_n)\in F\\ &\iff a_1x_1+\dots+a_{n-1}x_{n-1}+x_n=0\\ &\iff (x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},-a_1x_1-\dots-a_{n-1}x_{n-1})\\ &\iff (x_1,\dots,x_n)=x_1(1,0,\dots,0,-a_1)+\\ &x_2(0,1,0,\dots,0,-a_2)+\dots++x_{n-1}(0,\dots,0,1,-a_{n-1}).\end{aligned}$$

Donc F est engendrés par les vecteurs ci-après :

$$(1,0,\dots,0,-a_1),(0,1,0,\dots,0,-a_2),\dots,(0,\dots,0,1,-a_{n-1}).$$

C'est donc un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^n.}$

▸ Soient $X=(x_1,\dots,x_n), Y=(y_1,\dots,y_n)\in F$, et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors

$$Z=\lambda X+\mu Y=(\lambda x_1+\mu y_1,\dots,\lambda x_n+\mu y_n)\in F$$

car

$$\begin{aligned}&a_1(\lambda x_1+\mu y_1)+\dots+a_n(\lambda x_n+\mu y_n)\\ &=\lambda(a_1x_1+\dots+a_{n-1}x_{n-1}+x_n)+\mu(a_1y_1+\dots+a_{n-1}y_{n-1}+y_n)\\ &=\lambda.0+\mu.0=0.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{F est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^3.}$

2. De ce qui précède, une famille génératrice est donnée par

$$(1,0,\dots,0,-a_1),(0,1,0,\dots,0,-a_2),\dots,(0,\dots,0,1,-a_{n-1}).$$

Les 0 étant dans des positions différentes, la famille est donc clairement libre, c'est une base et $\boxed{\dim F=n-1.}$

Exercice ALG.3.10 | Soit E l'espace des applications de $]-1;1[$ dans $\mathbf{R}$. Soit $f_1 : x\mapsto \frac{1}{x-1}$ et $f_2 : x\mapsto\frac{1}{x+1}$.

1. Montrer que la famille (f_1,f_2) est libre.
2. Montrer que $g : x\mapsto\frac{1}{x^2-1}$ appartient à $\operatorname{Vect}(f_1,f_2)$.

Solution (exercice ALG.3.10)

1. Soient λ_1,λ_2 tels que :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \frac{\lambda_1}{x-1}+\frac{\lambda_2}{x+1}=\frac{\lambda_2(x+1)+\lambda_1(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0,$$

donc en identifiant les termes en x et constants au numérateur, on déduit

$$\lambda_1+\lambda_2=0,\quad \lambda_2-\lambda_1=0,$$

d'où l'on tire facilement $\lambda_1=\lambda_2=0$.

2. Montrons que $g : x\mapsto\frac{1}{x^2-1}$ appartient à $\operatorname{Vect}(f_1,f_2)$. On cherche λ,μ telles que pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\lambda}{x-1}+\frac{\mu}{x+1}=\frac{\lambda_2(x+1)+\lambda_1(x-1)}{x^2-1},$$

en identifiant les termes en x et constants au numérateur, on trouve que $\boxed{\lambda=\frac12,\mu=-\frac12}$ convient.

Exercice ALG.3.11 | Soit $E=\mathscr{D}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et

$$S=\{y\in\mathscr{D}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ 2y''+2y'+y=0\}.$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer S et sa dimension.

3. Soit α fixé dans $\mathbf{R}$ et $H_\alpha = \{f \in S,\ f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Déterminer H_α ainsi que sa dimension.

Solution (exercice ALG.3.11)

1. S est inclus dans E par construction, de plus, $2.0'' + 2.0' + 0 = 0$ donc la fonction nulle est dans $\mathscr{S}$. Soient deux solutions $y_1, y_2 \in \mathscr{S}$, et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}&2(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)' + (\lambda y_1 + \mu y_2)\\ &= \lambda(2y_1'' + 2y_1' + y_1) + \mu(2y_2'' + 2y_2' + y_2) \quad \textit{linéarité de la dérivation}\\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0.\end{aligned}$$

Donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution et $\boxed{\mathscr{S} \text{ est bien un sous-espace vectoriel de S.}}$

2. Notons (EC) $\quad 2x^2 + 2x + 1 = 0$ l'équation caractéristique associée, qui a pour discriminant $4 - 8 = -4$ et donc pour racines

$$\frac{-2 \pm 2i}{4} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{1}{2}.$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto e^{-x/2}\left(A\cos(x/2) + B\sin(x/2)\right),\ A, B \in \mathbf{R},$$

autrement dit

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(x \longmapsto e^{-x/2}\cos(x/2),\ x \longmapsto e^{-x/2}\sin(x/2))}.$$

Montrons que la famille est libre, soit donc $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda e^{-x/2}\cos(x/2) + \mu e^{-x/2}\sin(x/2) = 0,$$

dès lors, en simplifiant par l'exponentielle, on déduit

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda\cos(x/2) + \mu\sin(x/2) = 0.$$

Il reste par exemple à prendre deux valeurs particulières de x :

$$\lambda = 0\ (x = 0),\qquad \nu = 0\ (x = \pi).$$

Donc la famille proposée est libre et de cardinal 2, donc $\boxed{\dim \mathscr{S} = 2.}$

3. Soit α fixé dans $\mathbf{R}$ et $H_\alpha = \{f \in S,\ f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Soit $y \in \mathscr{S}$, alors choisissons A, B réels de sorte que $y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos(x/2) + B\sin(x/2)\right)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} y \in H_\alpha &\iff y(0) = y(\alpha) = 0,\\ &\iff \begin{cases} A &= 0,\\ e^{-\alpha/2}B\sin(\alpha/2) &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} A &= 0,\\ B\sin(\alpha/2) &= 0\end{cases}\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors.

- si $\sin(\alpha/2) = 0$, alors B est quelconque et $\boxed{H_\alpha = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto e^{-x/2}\sin(x/2)\right) \text{ donc } \dim H_\alpha = 1}$.
- Si $\sin(\alpha/2) \neq 0$, alors $B = 0$ et $\boxed{H_\alpha = \{0\} \text{ donc } \dim H_\alpha = 0}$.

Exercice ALG.3.12 | Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et q_1, q_2 deux réels non nuls tels que $|q_1| < |q_2|$. On pose

$$F = \mathrm{Vect}\left((q_1^n), (q_2^n)\right).$$

1. Justifier que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.

2. Notons $F_0 = \{(u_n) \in F,\ u_0 = u_1 = 0\}$. Déterminer F_0 ainsi que sa dimension.

Solution (exercice ALG.3.12)

1. La famille $\left((q_1^n), (q_2^n)\right)$ est une famille génératrice de F donc F est de dimension finie. Montrons qu'elle est libre. Soient λ, μ deux réels, tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \lambda q_1^n + \mu q_2^n = 0.$$

Donc comme $|q_1| < |q_2|$, $\left|\frac{q_1}{q_2}\right| < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_1}{q_2} = 0$. Donc

$$\lambda\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n + \mu = 0,$$

puis en passant à la limite on obtient $\mu = 0$. On peut ensuite faire $n = 1$ dans l'hypothèse initiale, ce qui livre $\lambda = 0$. Donc la famille considérée est une base, et $\boxed{\dim F = 2.}$

2. Si $(u_n) \in F_0$, alors il existe λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

La condition $u_0 = u_1 = 0$ donne

$$\lambda 0 + \mu = 0, 0 = \lambda q_1 + \mu q_2.$$

Ou de manière équivalente,

$$0 = \lambda(q_1 - q_2),$$

or $q_1 \neq q_2$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc $\boxed{F_0 = \{(0)\}, \dim F_0 = 0.}$

5.3. Applications linéaires

Exercice ALG.3.13 | Études de linéarité Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires, le montrer le cas échéant.

1. $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto 2x^2$,
2. $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto 4x - 3$,
3. $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3, x \longmapsto \left(2x, x/\pi, x\sqrt{2}\right)$,
4. $S : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, x \longmapsto (u, v)$, où (u, v) est l'unique solution de $\left\{\begin{array}{rcl} 3u - v & = & x, \\ 6u + 2v & = & y, \end{array}\right.$
5. $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f \longmapsto ff''$,
6. $E : \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f \longmapsto f(x^3)$,
7. $I : \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Solution (exercice ALG.3.13)

1. L'application f n'est pas linéaire, à cause du carré. En effet, $f(2 \times 1) = f(2) = 2 \times 4 = 8 \neq 2f(1) (= 2.2)$.
2. Puisque $g(0) = -3 \neq 0$, l'application g n'est pas non plus linéaire.
3. Cette fois-ci c'est bon. Soient $x, x' \in \mathbf{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned} h(\lambda x + \mu x') &= \left(2(\lambda x + \mu x'), (\lambda x + \mu x')/\pi, (\lambda x + \mu x')\sqrt{2}\right) \\ &= \left(2\lambda x + 2\mu x', \lambda/\pi x + \mu/\pi x', \lambda\sqrt{2}x + \mu\sqrt{2}x'\right) \\ &= \lambda\left(2x, x/\pi, x\sqrt{2}\right) + \mu\left(2x', x'/\pi, x'\sqrt{2}\right) \\ &= \lambda h(x) + \mu h(x'). \end{aligned}$$

4. Résolvons le système. On a, en notant $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3u - v & = & x, \\ 6u + 2v & = & y, \end{array}\right. \iff M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donc : $\boxed{u = \frac{1}{12}(3x + y),\ v = \frac{1}{12}(-6x + 3y)}$. On vérifie ensuite sans difficulté que les applications $(x, y) \longrightarrow \frac{1}{12}(3x + y)$ et $(x, y) \longrightarrow \frac{1}{12}(-6x + 3y)$ sont linéaires de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

5. L'application n'est pas linéaire à cause du produit. Prenons $f = X^2$. Alors $D(2f)(x) = (2x^2) \times 4 = 8x^2 \neq 2D(f)(x) = 2x^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (au moins non nul).
6. L'application E est linéaire, par linéarité de l'évaluation en x^3 pour tout x. En effet, soient $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors :

$$E(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x^3) = \lambda f(x^3) + \mu g(x^3) = \lambda E(f) + \mu E(g).$$

Donc E est linéaire. Notons que $E(\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, comme le prétend l'énoncé, puisqu'une composée d'applications $\mathscr{C}^\infty$ et $\mathscr{C}^\infty$.

7. L'application I est linéaire, par linéarité de de l'intégration. En effet, soient $f, g \in$

$\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\lambda f+\mu g)(x) &= \int_0^x (x-t)^2(\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{linéarité de l'évaluation}\\ &= \int_0^x \left(\lambda(x-t)^2 f(t)+\mu(x-t)^2 g(t)\right)\mathrm{d}t \quad \textit{linéarité de l'intégration}\\ &= \lambda \mathrm{I}(f)(x)+\mu \mathrm{I}(g)(x).\end{aligned}$$

Donc I est linéaire. Reste à justifier (même si l'énoncé le prétend!) que $\mathrm{I}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Il s'agit d'une intégrale à borne variable, cependant, l'intégrande (la fonction que l'on intègre) dépend elle aussi de x. Développons le carré : soit $x\in\mathbf{R}$,

$$\mathrm{I}(f)(x)=x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notons F (*resp.* G, *resp.* H) une primitive de f (*resp.* $\mathrm{Id} f$, *resp.* $\mathrm{Id}^2 f$), ces trois primitives existent car chacune des fonctions citée est continue. Or, chaque fonction $\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H}$ est $\mathscr{C}^\infty$ puisque leur dérivée première est égale à une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi, par somme/produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, $\mathrm{I}(f)$ l'est aussi.

Exercice ALG.3.14 | On note $\mathrm{E}=\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$ et

$$\mathrm{F}=\left\{\mathrm{P}\in\mathbf{R}_2[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(1)=0\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer la dimension de F, en exhibant une base de F. Déterminer un supplémentaire S de F dans E.
3. Déterminer une expression du projecteur sur F parallèlement à S.

Solution (exercice ALG.3.14)

1. $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$, et $0(1)=0$ donc F contient le polynôme nul. De plus, si $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ et $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{F}$, alors

$$(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(1)=\lambda\mathrm{P}(1)+\mu\mathrm{Q}(1)=\lambda.0+\mu.0=0.$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Nous avons $\mathrm{P}\in\mathrm{F}$ si et seulement si il existe $\alpha,\mathrm{K}\in\mathbf{R}$ tels que

$$\mathrm{P}=\mathrm{K}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\alpha)=\mathrm{K}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)-\mathrm{K}\alpha(\mathrm{X}-1),\qquad(\star)$$

mais comme $\mathrm{X},\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$ sont deux polynômes de F, que la famille $(\mathrm{X},\mathrm{X}(\mathrm{X}-1))$ est échelonnée, il vient alors que $\boxed{(\mathrm{X},\mathrm{X}(\mathrm{X}-1))\text{ est une base de F}}$ (elle est génératrice d'après l'égalité $(\star)$) et donc $\boxed{\dim\mathrm{F}=2.}$

3. ...

Exercice ALG.3.15 | Soient $n\geqslant 3$ et $b\in\mathbf{R}$. On considère l'application

$$\varphi\ \left|\ \begin{array}{rcl}\mathbf{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbf{R}[\mathrm{X}],\\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}-b)(\mathrm{P}'+\mathrm{P}'(b))-2(\mathrm{P}-\mathrm{P}(b)).\end{array}\right.$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Soit $\mathrm{F}=\left\{\mathrm{P}\in\mathbf{R}_n[\mathrm{X}],\ \exists\mathrm{Q}\in\mathbf{R}_n[\mathrm{X}],\quad \mathrm{P}=(\mathrm{X}-b)^3\mathrm{Q}\right\}$.
   - **2.1)** Justifier que $\mathrm{F}=\left\{\mathrm{P}\in\mathbf{R}_n[\mathrm{X}],\ \exists\mathrm{Q}\in\mathbf{R}_{n-3}[\mathrm{X}],\quad \mathrm{P}=(\mathrm{X}-b)^3\mathrm{Q}\right\}$.
   - **2.2)** Déterminer une base puis la dimension de F. En utilisant $\varphi(\mathrm{P})''$, démontrer que $\operatorname{Im}\varphi\subset\mathrm{F}$.
   - **2.3)** En utilisant à nouveau $\varphi(\mathrm{P})''$, démontrer que $\operatorname{Ker}\varphi\subset\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$.
   - **2.4)** Déterminer noyau et image de φ.

Solution (exercice ALG.3.15)

1. Soient $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$, et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= (\mathrm{X}-b)((\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})'+(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})'(b))-2((\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})-(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(b))\\ &= \lambda(\mathrm{X}-b)(\mathrm{P}'+\mathrm{P}'(b))-2(\mathrm{P}-\mathrm{P}(b))+\mu(\mathrm{X}-b)(\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}'(b))-2(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}(b)),\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation, et de l'évaluation en b. De plus, $\deg\left((\mathrm{X}-b)(\mathrm{P}'+\mathrm{P}'(b))\right)=n=\deg\left(\mathrm{P}-\mathrm{P}(b)\right)$. Donc $\Phi(\mathrm{P})\in\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$. En conclusion,

$$\boxed{\Phi\text{ est un endomorphisme de }\mathbf{R}_n[\mathrm{X}].}$$

2. **2.1)** Condition de degré, avec les notations de l'énoncé, si $P \in F$ alors on a $\deg Q + 3 = \deg P$ donc $\deg Q \leqslant n-3$.

2.2) Soit $P \in F$, alors il existe $Q \in \mathbf{R}_{n-3}[X]$ tel que $P = (X-b)^3 Q$. Il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-3} \in \mathbf{R}$ tels que $Q = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-3} X^{n-3}$. Donc

$$P = \lambda_0 (X-b)^3 + \lambda_1 (X-b)^3 X + \cdots + \lambda_{n-3} (X-b)^3 X^{n-3}.$$

Autrement dit, la famille $\mathscr{F} = ((X-b)^3, X(X-b)^3, \dots, X^{n-3}(X-b)^3)$ est une famille génératrice de F. Elle est de plus libre car échelonnée. Donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une base de F.}}$ Elle est de cardinal $n-2$, donc $\dim F = n-2$. Calculons $\varphi(P)''$: $\varphi(P)' = P' + P'(b) + (X-b)P'' - 2P'$ puis $\varphi(P)'' = P'' + P'' + (X-b)P''' - 2P'' = (X-b)P'''$. Constatons que $\varphi(P)(b) = \varphi(P)'(b) = \varphi(P)''(b)$ donc b est au moins une racine de multiplicité au moins troi de $\varphi(P)$, c'est exactement dire que $\boxed{\varphi(P) \in F.}$

2.3) Recyclons une nouvelle fois le calcul précédent. Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(P) = 0$ donc $\varphi(P)'' = 0 = (X-b)P'''$. Par propriété du cours, comme $X - b \neq 0_{\mathbf{R}_n[X]}$, nous avons $P''' = 0$, *i.e.* $\boxed{P \in \mathbf{R}_2[X]}$ en primitivant deux fois l'égalité $P''' = 0$.

2.4) Appliquons le théorème du rang à φ puisque $\mathbf{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. Nous avons

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Rg}\varphi = n+1.$$

Or, d'après les questions précédentes, $\dim \operatorname{Ker}\varphi \leqslant 3 = \dim \mathbf{R}_2[X]$ et $\operatorname{Rg}\varphi \leqslant \dim F = n-3+1 = n-2$. Donc comme $3+n-1 = n+1$, on a nécessairement $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3$ et $\operatorname{Rg}\varphi = n-2$. Par égalité des dimensions, les inclusions deviennent alors des égalités :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{R}_2[X], \quad \operatorname{Im}(\varphi) = F.$$

Exercice ALG.3.16 | **Endomorphisme aux différences finiues de $\mathbf{C}_n[X]$.** Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et Δ_n l'application :

$$\Delta_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_n[X], \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array} \right.$$

1. Calculer $\Delta(1), \Delta(X), \Delta(X^2)$.
2. Montrer que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.
3. Soit $P \in \operatorname{Ker}\Delta_n$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. Montrer que $P - P(0)$ a une infinité de racines. En déduire que $\operatorname{Ker}\Delta_n = \mathbf{C}_0[X]$.
4. En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbf{C}_{n-1}[X]$.
5. On définit dans cette question une application Δ comme

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right. .$$

À l'aide des questions précédentes, déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$, et montrer que Δ est surjective à l'aide de la définition de la surjectivité. Commenter.

Solution (exercice ALG.3.16)

1. $\Delta(1) = 1-1 = 0, \Delta(X) = X+1-X = 1, \Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$. Le degré semble chuter de un.
2. Soient $P, Q \in \mathbf{C}_n[X]$, et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} \Delta_n(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \nu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \Delta_n(P) + \nu \Delta_n(Q). \end{aligned}$$

De plus, si $\deg P \leqslant n$ alors $\deg \Delta_n(P) \leqslant n$ puisque c'est une différence de polynômes de degré au plus n. Finalement, on a bien montré que $\boxed{\Delta_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{C}_n[X]}$.

3. Soit $P \in \operatorname{Ker}\Delta_n$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x+1) = P(x)$. En particulier, $P(n) = P(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi, $P - P(0)$ possède une infinité de racines, donc il est nul, et $P = P(0)$ est le polynôme constant. Donc $\operatorname{Ker}\Delta_n \subset \mathbf{C}_0[X]$. Inversement, montrons que $\mathbf{C}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\Delta_n$. Soit $P = C \in \mathbf{C}$ un polynôme constant, alors $\Delta(P) = C - C = 0$. En conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}\Delta_n = \mathbf{C}_0[X].}$
4. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}\Delta_n + \operatorname{Rg}\Delta_n = \dim \mathbf{C}_n[X] = n+1$, donc comme $\dim \operatorname{Ker}\Delta_n = 1$ d'après la question précédente, il vient $\operatorname{Rg}\Delta_n = n+1-1 = n$. Il suffit alors de montrer que $\operatorname{Im}\Delta_n \subset \mathbf{C}_{n-1}[X]$. Si tel que le cas, puisque $\dim \operatorname{Im}\Delta_n = \dim \mathbf{C}_{n-1}[X] = n$, on aura l'égalité $\operatorname{Im}\Delta_n = \mathbf{C}_{n-1}[X]$ par égalité des dimensions.

Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbf{C}_n[\mathrm{X}]$, alors par linéarité de Δ_n et d'après le formule du binôme,

$$\Delta_n(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta_n(\mathrm{X}^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \mathrm{X}^\ell - \mathrm{X}^k \right).$$

On constate que les termes d'ordre $\ell = k$ dans la somme interne sont nuls pour tout k, donc

$$\Delta_n(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} \mathrm{X}^\ell.$$

Sous cette forme, on voit alors $\deg \Delta_n(\mathrm{P}) = n - 1$. On a bien montré que $\mathrm{Im}\, \Delta_n \subset \mathbf{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Et donc par égalité des deux dimensions : $\boxed{\mathrm{Im}\left(\Delta_n\right) = \mathbf{C}_{n-1}[\mathrm{X}].}$

5. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$, alors notons $q = \deg \mathrm{Q}$. Nous avons donc $\mathrm{Q} \in \mathbf{C}_q[\mathrm{X}]$, alors puisque Δ_{q+1} est surjective d'après le début de l'exercice (et que Δ_{q+1} est à valeurs dans $\mathbf{C}_q[\mathrm{X}]$), il existe $\mathrm{P} \in \mathbf{C}_{q+1}[\mathrm{X}]$ tel que $\Delta_{q+1}(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} = \Delta(\mathrm{P})$. Donc : $\boxed{\Delta \text{ est surjective}}$. En revanche, Δ n'est pas injective puisque le noyau est encore une fois constitué des polynômes constants. Puisque $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ n'est pas de dimension finie, cela n'est pas étonnant, l'injectivité n'est dans ce cadre pas nécessairement équivalente à la surjectivité.