MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe de BCPST
2nde année

Programme de mathématiques pour la classe BCPST2

I – Préambule

Objectifs de la formation

En classe de BCPST2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines).

Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (BCPST1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter...
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit et à l'oral.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective des concours :

— Identifier un problème sous différents aspects ;
— Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes ;
— Critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de BCPST2 approfondit celui de BCPST1, ce qui se traduit par les enjeux suivants.

— Consolider les acquis mathématiques de BCPST1, notamment en matière de calcul et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroter de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de BCPST1 et de BCPST2.
— Généraliser et compléter les concepts introduits en BCPST1.
— Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences, notamment dans le cadre des T.I.P.E.

Équilibre entre compétences

Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors des concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre.

Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques, restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une virtuosité technique. On attend, en la matière, une maîtrise solide des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations courantes, sans pour autant négliger les autres compétences.

Contenu

Le programme de seconde année combine des révisions du programme de première année, des approfondissements de certaines parties et des nouveautés.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

L'**analyse** apparait sous forme de révisions, de nouveautés (séries et intégrales généralisées) ou de compléments (équations différentielles). C'est ainsi que les séries sont introduites comme outil de base des probabilités, tandis que l'étude des intégrales généralisées est insérée dans la mise en place des variables aléatoires à densité ; l'usage de ces outils est limité aux contextes probabilistes et aux démarches de modélisation ; on évitera les développements artificiels ou purement techniques à ce propos.

En **algèbre linéaire**, le passage de $\mathbf{K}^n$ aux espaces vectoriels généraux permet d'élargir le champ d'action et de donner une vision géométrique des espaces de fonctions. Ce cadre plus systématique permet de donner un sens à l'étude des bases et changements de base qui sont fondamentaux pour aborder les valeurs propres et vecteurs propres des applications linéaires et des matrices ; cette dernière approche se limite à la diagonalisation pour s'en tenir à des phénomènes simples. En vue de nombreuses applications (optimisation, analyse de données), est proposée une présentation du produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$, du théorème de projection orthogonale et du théorème spectral. La notion de sous-espaces supplémentaires ne figure pas au programme, mais dans bien des situations le théorème de la projection orthogonale fournit une approche similaire tout en permettant un calcul effectif.

L'étude des **probabilités** est donc un enjeu majeur du programme de seconde année. Le but de ce parcours est de mettre en place, de la manière la plus efficace possible, un contexte opérationnel permettant d'utiliser aussi bien des variables aléatoires discrètes prenant une infinité de valeurs (amenant notamment les lois géométrique et de Poisson) que des variables aléatoires à densité (dites « continues »), avec un accent particulier sur les variables gaussiennes. Pour maintenir le programme dans un volume raisonnable, les couples de variables aléatoires ne sont abordés que pour les variables discrètes, ce qui évite d'avoir à aborder les intégrales doubles. Les démarches de simulation de variables aléatoires sont fortement encouragées.

Quelques théorèmes limites en probabilités ainsi que la construction précise d'un **test d'hypothèse** en découlant (comparaison d'une moyenne ou d'une proportion expérimentale à sa valeur théorique) offrent un environnement propice à la simulation numérique et permettent aux étudiants qui en ont le besoin pour leurs TIPE d'aller plus loin sur ces questions.

La variété des modèles ainsi mis en place, combinés avec les différents théorèmes limites proposés, permet d'aborder de nombreuses applications dans les domaines les plus divers ; l'évocation de ces contextes applicatifs est un élément important de la formation et fait partie des buts visés. Comme dans le programme de première année, on signale par un symbole $\rightleftharpoons$ certaines situations particulières où un lien avec d'autres enseignements scientifiques est encouragé, permettant de donner corps aux démarches de modélisation et d'application pratique des mathématiques.

En prolongement des programmes de première année en mathématiques et informatique, le programme encourage la **démarche algorithmique** et le recours aux **outils informatiques** ; le maniement de ces outils fait partie intégrante de la formation et a toute sa place dans l'évaluation en cours d'année et lors des concours.

Pour ce qui concerne les **révisions**, la proposition de consolider les compétences acquises en première année par quelques exercices ne doit pas être prise dans un sens restrictif : des approches numériques, pouvant s'appuyer sur le programme d'informatique ou recourir à des outils logiciels ou des calculatrices, peuvent tout aussi bien renforcer la maîtrise des concepts et de leurs applications.

II – Programme de seconde année

La répartition en chapitres proposée ci-dessous (ainsi que l'agencement des chapitres de révisions) est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente.

Révisions 1 – Suites

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 1 et Analyse 5).
⇌ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 2 – Fonctions et dérivées

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 2, Analyse 3, Analyse 6, Analyse 7, Analyse 9).
⇌ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 3 – Intégrales

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 8).
⇌ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 4 – Equations différentielles

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 4) ⇌ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 5 – Fonctions de deux variables

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 10).

Analyse 1 – Séries réelles

Contenus	**Commentaires**
Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.	La série est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$. En cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. La terminologie de « famille sommable » n'est pas donnée. La notion de reste d'une série est hors programme.
Combinaison linéaire de séries convergentes.	

Contenus (suite)	Commentaires
Thèorèmes de convergence pour deux séries à termes positifs u_n et v_n : • théorème de comparaison si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, • si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Les résultats relatifs aux restes et sommes partielles sont hors programme.
Convergence et somme de la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ (pour $\|q\| < 1$) et des séries « dérivées » $\sum\limits_{n\geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$.	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.	Résultat admis.
Convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.	L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.
Convergence absolue.	La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de la série. En vue des applications probabilistes, on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes. L'étude de séries semi-convergentes est hors programme.

Analyse 2 – Intégrales généralisées

Contenus	Commentaires
Convergence d'une intégrale généralisée (ou impropre) d'une fonction continue sur un intervalle I semi-ouvert ou ouvert.	La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive. La terminologie de « fonction intégrable » n'est pas donnée. Les notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pourront, selon le contexte, désigner l'intégrale généralisée ou sa valeur.
Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur cet intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, stricte positivité (f positive non nulle), croissance.	La démonstration de la stricte positivité n'est pas exigible.
Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales généralisées.	On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales généralisées.	Si la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.
Cas des fonctions paires ou impaires.	
Théorèmes de convergence pour deux fonctions positives f et g : • théorème par comparaison si $f \leq g$, • si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en b $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Tout résultat sur la nature des intégrales de Riemann devra être démontré.

Contenus (suite)	Commentaires
Convergence absolue d'une intégrale généralisée.	La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale. Les intégrales semi-convergentes sont hors programme.
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.	La valeur de cette intégrale est un résultat admis.

Analyse 3 – Équations différentielles scalaires autonome d'ordre 1

Contenus	Commentaires
Exemples de résolution d'équations différentielles autonomes du type $y'(t) = F(y(t))$, F étant une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles.	Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée. $\rightleftharpoons$ On se limite ici à quelques exemples issus de la biologie des populations ou de la cinétique chimique (modèles malthusien, logistique, de Gompertz). $\rightleftharpoons$ Lien avec l'informatique : programmation de la méthode d'Euler. Dans un énoncé, la méthode d'Euler sera rappelée.

Révisions 6 – Nombres complexes

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Outils 3, Outils 4).

Révisions 7 – Systèmes linéaires et matrices

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Algèbre linéaire 1 et 2).

Algèbre – Polynômes

Contenus	Commentaires
a) Polynômes, règles de calcul.	
Retour sur les polynômes réels : notation X pour l'application $x \mapsto x$ et réécriture d'un polynôme avec cette notation.	On remarque que les règles de calcul avec X prolongent les règles de calculs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
On introduit les polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$. Notation X pour l'application $x \mapsto x$.	
Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.	
Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.	En conséquence, deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
Coefficient dominant et degré d'un polynôme.	On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$.
Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.	
Notations $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X], \mathbf{R}_n[X], \mathbf{C}_n[X]$.	
b) Racines et factorisation.	
Définition d'une racine α d'un polynôme P : $P(\alpha) = 0$.	
Un nombre réel ou complexe α est racine d'un polynôme P si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$.	La division euclidienne des polynômes est hors programme.
Généralisation à plusieurs racines distinctes.	
Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Ordre de multiplicité d'une racine.	La caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés n'est pas un attendu du programme.
Cas des polynômes réels : si α est racine, $\overline{\alpha}$ est aussi racine.	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$.	Ce théorème est admis. La factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ est hors programme.

Algèbre linéaire 1 – Espaces vectoriels

Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité ($\mathbf{K}^n$) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non.

La notion de somme de sous-espaces vectoriels n'est pas au programme.

On travaille uniquement dans des **K**-espaces vectoriels, **K** désignant **R** ou bien **C**. Lorsqu'un espace est un **C**-espace vectoriel, le considérer comme un **R**-espace vectoriel n'est pas un attendu du programme. Il n'est pas dans l'esprit du programme de rentrer dans des détails techniques comme parler de **R**-base, **C**-base, **R**-dimension, **C**-dimension.

Contenus	**Commentaires**
a) Structure vectorielle	
Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.	On met plus particulièrement en valeur les espaces vectoriels suivants : $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$. L'étude d'espaces de suites n'est pas un attendu du programme.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	
Sous-espaces vectoriels.	
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On introduit la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence).	
Famille libre finie. Famille liée finie.	
Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.	
Base finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence). Coordonnées d'un vecteur dans une base.	
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.	
Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}_n[X]$.	D'autres exemples peuvent être proposés, mais les attendus du programme se limitent aux cas mentionnés.
b) Dimension	
On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
De toute famille génératrice finie d'un espace E non réduit au vecteur nul on peut extraire une base.	
Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E. Par convention, l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.	
Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$: • Toute famille libre peut se compléter en une base.	

Contenus (suite)	Commentaires
• Toute famille libre a au plus n éléments. • Une famille libre ayant n éléments est une base. • Toute famille génératrice a au moins n éléments. • Une famille génératrice ayant n éléments est une base.	Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Ce rang peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Algèbre linéaire 2 – Applications linéaires et matrices

Le passage aux espaces vectoriels quelconques pousse à redéfinir les notions liées aux applications linéaires. Il convient de faire cette adaptation avec une certaine brièveté afin de garder tout le temps requis pour traiter des exemples.

On travaille dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
a) Applications linéaires	
Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.	On introduit les notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$, mais leur étude n'est pas un attendu du programme.
Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.	Notation f^n pour $n \in \mathbf{N}$.
Noyau. Lien avec l'injectivité.	On montre que le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.
Image. Lien avec la surjectivité.	On montre que l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.
b) Cas de la dimension finie	
Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.	
Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.	Tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
Rang d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.	On soulignera, à travers un exemple, que ce n'est pas le cas en dimension infinie. Toutefois, aucun exemple ne sera exigible des étudiants.
c) Matrices et applications linéaires	
Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux.	
Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque.	On montre qu'un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible, et qu'il suffit pour cela de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite.
Définitions du noyau et de l'image d'une matrice. Lien entre noyau et image d'une matrice et d'une application linéaire représentée par cette matrice dans des bases.	Toute identification entre vecteur de $\mathbf{K}^n$ et sa représentation matricielle dans une base, même la base canonique, est à éviter.

Contenus (suite)	Commentaires
d) Changement de base	
Changement de base. Matrice de passage.	
Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.	
Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	
Matrices semblables.	On met en valeur l'intérêt des matrices semblables pour le calcul des puissances. On ne parlera pas de matrices équivalentes.

Algèbre linéaire 3 – Valeurs propres, vecteurs propres

Contenus	Commentaires
a) Éléments propres	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée.	On appelle spectre de l'endomorphisme f (respectivement de la matrice A) l'ensemble des valeurs propres de f (respectivement de A). En dimension finie, on fait le lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.	
b) Diagonalisation	
Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.	Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ admet au plus n valeurs propres deux à deux distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.
En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable.	
Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.	
Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	On fait observer que les sous-espaces propres sont de dimension 1. La notion de polynôme annulateur est hors programme.

Révisions 7 – Géométrie

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Géométrie 1).

Géométrie – Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$

Ce chapitre propose une extension modeste des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n, avec la notion de projection orthogonale sur un sous-espace et une application aux statistiques.

Contenus	Commentaires
a) Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$	
Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. Écriture matricielle. Bilinéarité.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Cas d'égalité.	Le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz devra être précisé.
Vecteurs orthogonaux.	Définition de deux matrices colonnes orthogonales.
Une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Bases orthonormales de l'espace $\mathbf{R}^n$ ou d'un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	On souligne le fait que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales. Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.
b) Projection orthogonale	
Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$.	
L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$.	On rappelle que les notions générales de sommes de sous-espaces vectoriels et de projections ne sont pas au programme. On admet qu'il existe une base orthonormale du sous-espace F dès que F n'est pas réduit au vecteur nul.
On appelle projection orthogonale sur le sous-espace F de $\mathbf{R}^n$ l'application p qui à tout $x \in \mathbf{R}^n$ associe x_F.	Écriture du projeté orthogonal d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans une base orthonormale de F.
La projection orthogonale sur le sous-espace F est l'endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$.	
Relation $\dim F + \dim F^\perp = n$.	
Distance entre deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.	
Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbf{R}^n$. Cas de la distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	
Interprétation en termes de projection orthogonale.	Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2. La démonstration n'est pas exigible. Les coefficients de la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés devront être rappelés.
c) Théorème spectral	
Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.	
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormale.	La démonstration de ce thorème est hors programme. On fera remarquer qu'il existe aussi des bases de diagonalisation non orthonormales. Les étudiants devront être guidés pour la construction effective d'une base orthonormale de vecteurs propres.

Probabilités 1 – Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires

Ce chapitre étend le cadre des probabilités qui avait été posé en première année (Probabilités 1) pour aborder une situation plus générale, se prêtant à la définition des variables aléatoires discrètes ou à densité.

Les séries ont été introduites comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

Contenus	Commentaires
a) Compléments ensemblistes et notion de probabilité	
Définition de $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.	
Notion de tribu.	On convient de nommer événements les éléments d'une tribu. Une tribu $\mathscr{T}$ (ou σ-algèbre) sur Ω est une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et telle que, pour toute suite (B_n) d'événements, la réunion des B_n est un événement. Aucune question sur les tribus ne doit être proposée dans une épreuve de mathématiques.
Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$.	On met en valeur l'axiome de $\sigma-$additivité $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$ pour des suites (B_n) d'événements deux à deux incompatibles, et on fait remarquer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(B_n)$ converge.
Définition d'un événement négligeable, d'un événement presque sûr.	On distingue l'événement impossible (resp. certain) des événements négligeables (resp. presque sûrs).
Révisions et extensions à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des définitions vues en première année, en particulier :	
• Une suite d'événements (A_n) est un système complet d'événements si les A_n sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω.	Pour une telle suite, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
• Formule des probabilités totales : si (A_n) est un système complet d'événements, alors, pour tout événement B, la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(A_n \cap B)$ converge et $P(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$.	Cette formule reste valable dans le cas d'une suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$; on dira dans ce cas que le système est quasi-complet. Interprétation en termes de probabilités conditionnelles, avec la convention suivante : si $P(A_n) = 0$, alors on pose $P(A_n)P_{A_n}(B) = 0$.
• Indépendance de deux événements. Indépendance (mutuelle) de n événements, d'une suite d'événements.	
b) Variables aléatoires réelles	
On nomme variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{T})$ toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$, noté $(X \leq a)$, soit un événement.	Aucune vérification du fait qu'une fonction est une variable aléatoire ne sera demandée dans une épreuve de mathématiques.
Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors $(X \in I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un événement.	Résultat admis.
Fonction de répartition : $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$. Croissance, limites en $\pm\infty$. Deux variables X et Y sont dites indépendantes si pour tous intervalles I et J, $P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)\ P(Y \in J)$. Généralisation au cas de n variables aléatoires, puis d'une suite de variables aléatoires.	

Probabilités 2 – Variables aléatoires réelles discrètes

L'ensemble de ce chapitre donne l'occasion de revoir, par le biais d'exercices, les lois de probabilités finies présentées dans le programme de première année (Probabilités 2).

Contenus	Commentaires
a) Variables aléatoires réelles discrètes	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Une variable aléatoire réelle est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbf{R}$ indexé par une partie de $\mathbf{N}$.	On pourra utiliser le terme dénombrable mais ce terme n'est pas exigible. On met en valeur le système complet d'événements formé des événements $(X = x)$ pour $x \in \mathcal{N}$. On souligne la validité de la formule des probabilités totales obtenue.
Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.	On décrit les représentations graphiques de ces deux fonctions. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition.
Si $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{i\geq 0} p_i$ converge et a pour somme 1, alors il existe une variable aléatoire réelle discrète X vérifiant $P(X = x_i) = p_i$ pour tout entier naturel i.	On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique : simulation d'une variable aléatoire discrète dont la loi est imposée, construite à partir d'une variable aléatoire uniforme.
b) Indépendance	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Généralisation : indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires ; d'une suite de variables aléatoires. Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi.	
• Lemme des coalitions : si $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \ldots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions s'appliquant à une partition des variables, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \ldots, u_n(X_n))$.
c) Espérance et variance	
Espérance. Propriétés (linéarité, positivité, croissance).	La linéarité de l'espérance est admise.
Théorème de transfert.	Ce résultat peut être admis.
Généralisation des propriétés et des définitions vues en première année, en particulier : • Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. • Variance et moments d'une variable aléatoire. • Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. • Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. • Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite.	
• Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.	X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.
• Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Résultat sur l'espérance admis. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.
d) Lois usuelles discrètes	
Loi de Poisson. Espérance, variance.	
Loi géométrique. Espérance, variance. Propriété d'invariance temporelle ou d'absence de mémoire de la loi géométrique.	On présente la loi géométrique comme loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. $\rightleftharpoons$ Exemples de situations expérimentales modélisées par une loi géométrique.

Probabilités 3 – Couples de variables aléatoires discrètes

Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'appréhender les phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance. Cependant, le théorème de transfert est énoncé dans le seul cas des couples de variables aléatoires discrètes finies, et les séries doubles ne sont au programme.

Contenus	**Commentaires**
a) Couples de variables aléatoires réelles discrètes	
Couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes. Loi conjointe.	L'événement $((X = x) \cap (Y = y))$ est également noté $(X = x, Y = y)$.
Lois marginales.	
Lois conditionnelles.	L'espérance conditionnelle n'est pas un attendu du programme.
b) Exemples de variable aléatoire de la forme $u(X, Y)$	
Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple (X, Y) ayant une loi conjointe connue.	On s'intéressera en particulier au maximum et au minimum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes.
Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans **N**.	Les deux variables ne sont pas nécessairement indépendantes.
Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.	Généralisation au cas de n variables.
Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$ à partir de la loi de (X, Y) quand X et Y sont des variables aléatoires discrètes finies.	Ce résultat peut être admis.
c) Covariance	
Covariance, formule de König-Huygens $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et calcul effectif quand X et Y sont discrètes finies.	Le calcul effectif de $E(XY)$ au moyen d'une série double n'est pas au programme.
Variance de $X + Y$.	On remarquera qu'en cas d'indépendance $\text{Cov}(X, Y) = 0$, mais que la réciproque est fausse.

Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité

Contenus	**Commentaires**
a) Variables aléatoires admettant une densité	
On appelle densité de probabilité une fonction f définie sur **R**, positive, dont l'intégrale généralisée sur **R** converge et vaut 1.	Dans le cadre du programme, l'intégrale généralisée n'est définie que pour des fonctions continues sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une densité de probabilité f telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.	Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée densité de X.
F_X est dérivable en tout point de continuité x de f et $F'_X(x) = f(x)$	Ce résultat peut être admis. Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une.
Si f est une densité de probabilité, alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.	Résultat admis.

Contenus (suite)	**Commentaires**
X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Ce résultat peut être admis. On insistera sur les représentations graphiques de la fonction de densité et de la fonction de répartition, en faisant le lien avec les histogrammes de variables aléatoires finies. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
b) Indépendance Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. • Lemme des coalitions : si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n))$. Exemples de recherche de la loi du minimum et du maximum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes.
c) Espérance Espérance. Propriétés. Notion de variable centrée.	La linéarité de l'espérance est admise. Par extension, on pourra appliquer la linéarité de l'espérance à des variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sans savoir si leur résultante est discrète ou à densité.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire à densité et u est une fonction définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $u(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_I u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Le cas échéant, $E(u(X)) = \int_I u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.	Résultat admis. On pourra appliquer ce théorème sans savoir si $u(X)$ est une variable aléatoire discrète ou à densité.
Propriétés : • Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	On pourra appliquer ce théorème dès lors que la variable aléatoire admet une variance, sans savoir si elle est discrète ou à densité.
• Variance et moments. • Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. • Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. • Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite.	
• Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.	X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.
• Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Résultat sur l'espérance admis. Par extension, on pourra appliquer ces formules à des variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sans savoir si leurs résultantes XY et $X+Y$ sont discrètes ou à densité. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.
d) Lois usuelles Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance, variance.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance, variance. Propriété d'invariance temporelle ou d'absence de mémoire : $P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t)$ et on donne quelques exemples d'expériences donnant du sens à cette propriété.	⇌ Une variable aléatoire de loi exponentielle peut être simulée à partir d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Loi normale (ou gaussienne) centrée et réduite : densité, espérance et variance.	⇌ On obtient les valeurs de la fonction de répartition (notée souvent Φ) et de sa réciproque au moyen de la calculatrice ou d'une bibliothèque associée à un langage de programmation. Un échantillon de valeurs utiles devra être rappelé. ⇌ Une variable aléatoire de loi normale peut être simulée à partir d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Loi normale de paramètres μ et σ^2 : densité, espérance et variance.	
Si X suit une loi normale, alors $aX+b$ aussi si $a \neq 0$.	Pour une variable de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, on se ramènera le plus souvent à la variable centrée réduite associée.
e) Sommes de variables aléatoires à densité indépendantes	
Loi de la somme de deux variables indépendantes à densité.	Le résultat est admis. La formule du produit de convolution devra être rappelée en cas de besoin. La démonstration de la convergence de l'intégrale, le cas échéant, n'est pas attendue des étudiants.
Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes.	Le calcul montrant la normalité de la somme n'est pas un attendu du programme. On généralise le résultat au cas de n variables gaussiennes indépendantes.

Probabilités 5 – Théorèmes limites

Contenus	**Commentaires**
a) Loi faible des grands nombres	
La moyenne empirique d'un n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$, notée M_n, est définie par $M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.	
Loi faible des grands nombres pour des variables aléatoires mutuellement indépendantes.	La définition générale de la convergence en probabilité n'est pas un objectif du programme.
b) Convergence en loi	
Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires (X_n) vers une variable aléatoire X.	
Cas particulier où les X_n prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$.	
Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires de lois binomiales vers une variable aléatoire de loi de Poisson.	Approximations qui en découlent. Les critères d'approximation devront être explicités.
Théorème central limite (première forme) : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2 non nulle, alors $(M_n^*)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Cas de la loi binomiale : théorème de de Moivre-Laplace.	Théorème admis. On rappelle que $M_n^* = \dfrac{M_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à M_n. ⇌ On illustre numériquement cette convergence.
L'écart-type empirique d'un n-uplet de variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$, noté S_n, est défini par $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-M_n)^2$.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Théorème central limite (seconde forme) : Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance μ et une variance, alors $\left(\frac{M_n-\mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.	Théorème admis. Une autre version de ce théorème, impliquant l'écart-type empirique corrigé S'_n défini par ${S'_n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2$, pourra être donnée.
c) Introduction aux tests	
Test de conformité à la moyenne.	On traitera le cas particulier d'une proportion par majoration de l'écart-type. Les notions de risque α ou β, de puissance ne sont pas au programme. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique, mécanisme et simulation de tests statistiques.