Chapitre 1 **Préparation aux Écrits** **1**

1 Révisions des bases **1**

1.1 Énoncés 1

2 Algèbre & Géométrie **18**

2.1 Applications de la diagonalisation 18
2.2 Géométrie 19
2.3 Réduction & Produit scalaire 20
2.4 Algèbre linéaire numérique 23

3 Analyse **26**

3.1 Autour de la dynamique des populations 26
3.2 Intégrales à paramètres 30
3.3 Fonctions de plusieurs variables 30

4 Probabilités & Statistiques **30**

5 Solutions **39**

Chapitre 2 **Préparation aux Oraux** **1**

1 Banque Agro & Véto — Mathématiques & Informatique **1**

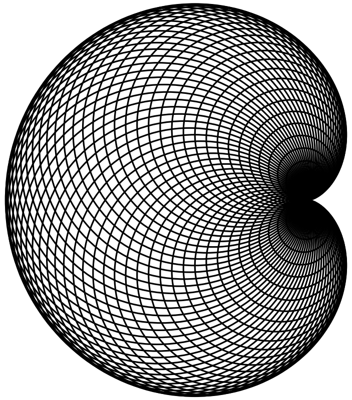
1.1 Notes sur le fonctionnement de Geogebra 2
1.2 Algèbre & Géométrie 2
1.3 Analyse 7
1.4 Aléatoire 11

2 Banque G2E — Mathématiques **17**

2.1 Algèbre & Géométrie 17
2.2 Analyse 18
2.3 Aléatoire 18
2.4 Session 2021 20

3 Banque G2E — Informatique **22**

4 Solutions **23**



Version du 8 juin 2022

Chapitre 1.

Préparation aux Écrits

Résumé & Plan

L'objectif est ici de regarder des exercices et des portions de sujets de concours. Chaque tranche de deux heures commencera par quatre questions de bases, prises dans l'ordre de la liste qui suit.

1	**Révisions des bases**	**1**
1.1	Énoncés	1
2	**Algèbre & Géométrie**	**18**
2.1	Applications de la diagonalisation	18
2.2	Géométrie	19
2.3	Réduction & Produit scalaire	20
2.4	Algèbre linéaire numérique	23
3	**Analyse**	**26**
3.1	Autour de la dynamique des populations	26
3.2	Intégrales à paramètres	30
3.3	Fonctions de plusieurs variables	30
4	**Probabilités & Statistiques**	**30**
5	**Solutions**	**39**

1. RÉVISIONS DES BASES

Ces questions permettant de réviser les méthodes et résultats classiques du programme de Mathématiques et Information. Nous en ferons environ trois par heure de cours de révision.

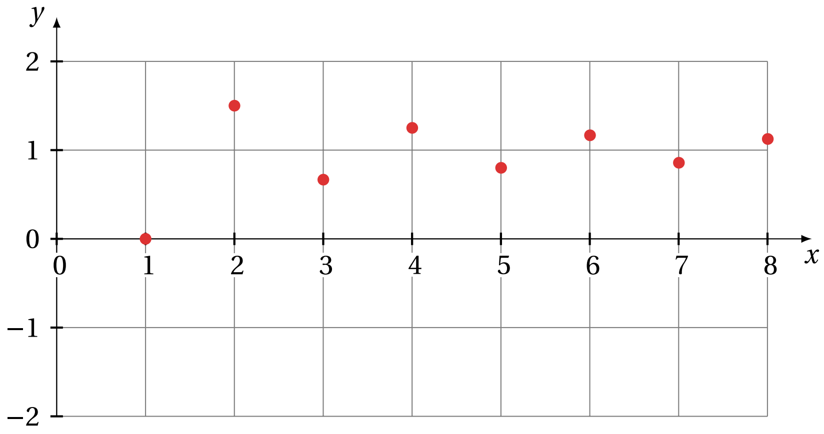
1.1. Énoncés

Exercice | **Stan RO** (Solution : 1) Les deux ensembles ci-dessous ont-ils une borne inférieure? supérieure? un maximum? un minimum? $A = \left\{x \in \mathbf{R},\ x^2 < 2\right\}$, et $B = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n},\ n \in \mathbf{N}^\star\right\}$.

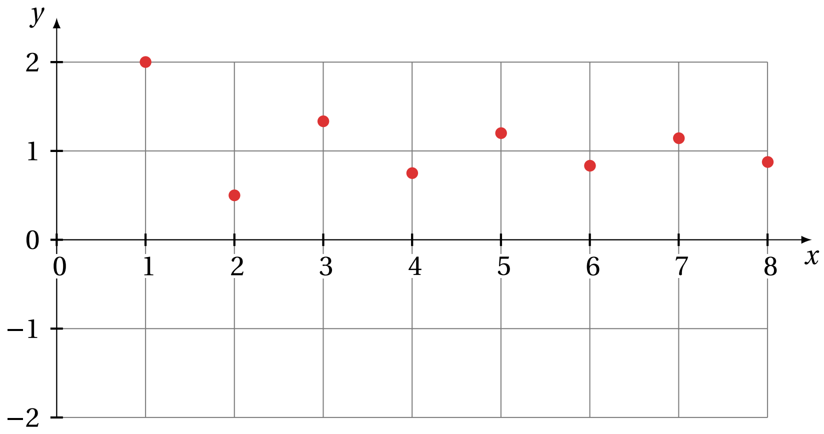
Solution (exercice)

(Énoncé : 1) On a $A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, cet intervalle ne possède ni maximum ni minimum. En revanche, puisque A est non vide majoré et minoré, il possède une borne supérieure et une borne inférieure, $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$.

Pour B, on se convainc assez facilement à l'aide d'un dessin qu'il possède possède un minimum et un maximum. Par exemple pour $a = 1 = b$:



En revanche pour $b \leqslant 0$:



Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

- Supposons que $b \geqslant 0$. Alors puisque les termes pairs sont tous supérieurs aux termes impairs, le maximum est le maximum sur les termes pairs, soit pour $u_2 = a + \frac{b}{2}$ puisque la suite $\left(a + \frac{b}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante. Le même raisonnement sur les termes impairs conduit à un minimum en $n = 1$ donné par $u_1 = a - b$.
- Supposons que $b < 0$. Alors puisque les termes impairs sont tous supérieurs aux termes pairs dans ce cas, le maximum est le maximum sur les termes impairs, soit pour $u_1 = a - b$. Le même raisonnement sur les termes pairs conduit à un minimum en $n = 2$ donné par $u_2 = a + \frac{b}{2}$.

Exercice | **Diego SA** (Solution : 2) Créer un script qui étant donnée une liste, retourne les deux plus grands éléments, ou seulement le plus grand si elle est de taille 1.

Solution (exercice)

(Énoncé : 2) Plusieurs solutions pour cela. La première, utilisant la fonction de recherche de maximum du cours.

```python
def maxi(L):
    '''
    retourne le maximum et la dernière position où il apparaît
    '''
    M = L[0]
    ind_M = 0
    for i in range(1, len(L)):
        if L[i] > M:
            M = L[i]
            ind_M = i
    return M, ind_M

def deux_maxi(L):
    '''
    retourne les deux plus grands éléments, où seulement le plus grand si L est de taille 1
    '''
    if len(L) == 1:
        return L
```

```
    else:
        deux_max = []
        for _ in range(2):
            M, ind_M = maxi(L)
            deux_max.append(M)
            del L[ind_M]
        return deux_max
```

On peut également directement faire une recherche de maximum avec deux éléments.

```
def deux_maxi_bis(L):
    '''
    retourne les deux plus grands éléments, où seulement le plus
    ↪ grand si L est de taille
    1
    '''
    if len(L) == 1:
        return L
    else:
        max_moins = L[0]
        max_plus = L[0]
        for x in L[1:]:
            if x > max_plus:
                max_moins, max_plus = max_plus, x
        return [max_moins, max_plus]
```

Exercice | **Chloé BO** (Solution : 3) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes centrées et réduites. On note ρ leur coefficient de corrélation linéaire et on pose $Z = X - \rho Y$. Déterminer espérance, variance de Z, les variables aléatoires Y et Z sont-elles corrélées ?

Solution (exercice)

(Énoncé : 3)

- Constatons d'abord que comme les deux variables aléatoires sont centrées et réduites, nous avons par définition de la covariance et du coefficient de corrélation : $\textbf{Cov}(X,Y) = \textbf{E}(XY) = \rho$.
- Ainsi, par linéarité de l'espérance, $\textbf{E}(Z) = 0 - \rho.0 = 0$. De plus — attention, les variables aléatoires ne sont pas supposées indépendantes ! —, on calcule la variance à l'aide de la covariance

$$\begin{aligned}\textbf{Var}(Z) &= \textbf{Cov}(X-\rho Y, X-\rho Y) \\ &= \textbf{Var}(X) + \rho^2\textbf{Var}(Y) - 2\rho\textbf{Cov}(X,Y) \quad \textit{bilinéarité de la covariance} \\ &= 1 + \rho^2 - 2\rho^2 = \boxed{1-\rho^2}.\end{aligned}$$

On calcule leur covariance.

$$\begin{aligned}\textbf{Cov}(Y,Z) &= \textbf{Cov}(Y, X-\rho Y) \\ &= \rho - \rho.1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Y, Z ne sont pas corrélées.}}$

Exercice | **Nicolas CL** (Solution : 3) Justifier que $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ est une droite, où $\mathscr{P} : x-y+z=1$ et $\mathscr{P}' : x+2y+3z=6$. En préciser un vecteur directeur.

Solution (exercice)

(Énoncé : 3) On résout le système ci-dessous, en exhibant une forme paramétrique de l'ensemble des solutions. $\begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ x+2y+3z=6 & L_2\end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 3y+2z=5 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1\end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}z \\ y = \frac{1}{3}(-2z+5)\end{cases}$ On obtient alors que $(x,y,z) \in \mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ si et seulement si

$$(x,y,z) = z(-1/3, -2/3, 1) + (-2/3, 5/3, 0).$$

Donc $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est la droite passant par $(-2/3, 5/3, 0)$ et dirigée par $(-1/3, -2/3, 1)$. . . .

Exercice | **Xavier ME** (Solution : 4) Créer une fonction `test_colin`, qui prend en argument deux listes de même taille et teste si les vecteurs correspondant sont colinéaires, en utilisant le déterminer d'une part et en utilisant la commande `np.linalg.matrix_rank` du module numpy.

Solution (exercice) . . . .

(Énoncé : 4) Dans cette question, on peut utiliser le déterminant, par exemple.

```
import numpy as np

def test_colin(U,V):
    return U[0]*V[1] - U[1]*V[0] != 0
```

ou

```
import numpy as np
def test_colin(U,V):
    matrice = np.array([U,V])
    return np.linalg.matrix_rank(matrice) < 2
```

. . . .

Exercice | **Adèle BA** (Solution : 4) Créer une fonction `tri_unseurdeux` prenant en argument une liste `L`, et qui :

- si la liste possède un nombre pair d'éléments, supprime tous les éléments d'index impair et tri la liste obtenue en place.[1]
- si la liste possède un nombre impair d'éléments, supprime tous les éléments d'index impair ainsi que le dernier, et tri la liste obtenue en place.

[1] On rappelle que cela signifie « sans créer de copie »

Solution (exercice) . . . .

(Énoncé : 4)

```
def minimum(L):
    '''
    Cherche le minimum de L, et renvoie le premier indice
    '''
    m = L[0]
    ind_m = 0
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k] < m:
            m = L[k]
    while L[ind_m] != m:
        ind_m += 1
    return m, ind_m

def tri_selection(L):
    '''
    Procédure
    Trie la liste L en place selon le tri par sélection
    '''
    k = 0
    while k < len(L):
        m, ind_m = minimum(L[k:])
        L[k], L[k+ind_m] = L[k+ind_m], L[k]
        k += 1

def tri_unsurdeux(L):
    '''
    si la liste est a un nombre pair d'éléments, supprimer les
    ↪ impairs et tri
    sinon, fait de-même en supprimant aussi le tout dernier
    '''
    # phase de suppression des éléments
```

```python
    n = len(L)
    if n % 2 == 0:
        L_aux = [L[i] for i in range(n) if i % 2 == 0][:]
    else:
        del L[-1]
        L_aux = [L[i] for i in range(n-1) if i % 2 == 0][:]
    tri_selection(L_aux)
    return L_aux
```

Exercice | **Matteo LE** (Solution : 5) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la nature de $Y = \lfloor X \rfloor$, on précisera le cas échéant sa loi (ou une densité).

Solution (exercice)

(Énoncé : 5) Notons tout d'abord que $\lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbf{N}$ par définition de la partie entière et par positivité de X (rappelons-le, cela découle du fait que f_X est nulle en dehors de $\mathbf{R}^+$).

Ainsi, $\boxed{\text{X est une variable aléatoire discrète}}$. Pour le calcul de la loi, considérons $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = k) &= \mathbf{P}(k \leqslant X < k+1), \\ &= \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda \frac{1}{(-\lambda)}\left[e^{-\lambda x}\right]_k^{k+1} \\ &= \boxed{e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}.}\end{aligned}$$

expression de la densité

On pouvait aussi utiliser dans le calcul précédent directement l'expression de la fonction de répartition de X.

Exercice | **Adrien NA** (Solution : 5) Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. Justifier que ${}^{\mathrm{T}}AA$ est diagonalisable et est à valeurs propres réelles positives. La diagonaliser lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et trouver une base orthonormée vecteurs propres.

Solution (exercice)

(Énoncé : 5) C'est une application du théorème spectral. En effet, la matrice ${}^{\mathrm{T}}A.A$ est à coefficients réels et est symétrique car ${}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}A.A\right) = {}^{\mathrm{T}}(A)\,{}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}A\right) = {}^{\mathrm{T}}A.A$. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{R})$ et D une matrice diagonale réelle telle que : ${}^{\mathrm{T}}A.A = {}^{\mathrm{T}}PDP$.

Montrons ensuite que les valeurs propres sont positives. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}$, *i.e.* ${}^{\mathrm{T}}A.AX = \lambda X$. Multiplions à gauche cette égalité par ${}^{\mathrm{T}}(X)$. Alors :

$${}^{\mathrm{T}}X\,{}^{\mathrm{T}}A.AX = \lambda\,{}^{\mathrm{T}}XX,$$

on reconnait alors à droite la norme de X au carré et à gauche la norme de AX au carré.

$$\|AX\|^2 = {}^{\mathrm{T}}(AX)\,(AX) = {}^{\mathrm{T}}X\,{}^{\mathrm{T}}A.AX = \lambda\,{}^{\mathrm{T}}XX = \lambda\,\|X\|^2.$$

Comme $X \neq 0$n c'en est de-même pour $\|X\|$, et

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0.$$

Exercice | **Morgane DA** (Solution : 5) Justifier que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en base orthonormée. Deviner les valeurs propres possibles de J en calculant J^2, en déduire les valeurs propres.

Solution (exercice)

(Énoncé : 5) Tout d'abord, puisque J est symétrique réelle, la matrice J est diagonalisable en base orthonormée et à valeurs propres réelles d'après le théorème spectral. L'idée est ici de ne pas utiliser l'algorithme du pivot de Gauß, mais plutôt un polynôme annulateur. Constatons que $J^2 = 3J$. Soit alors X, λ un couple propre, *i.e.* $JX = \lambda X$ avec

$\lambda \in \mathbf{R}$ et $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On obtient $J^2X = \lambda JX = \lambda^2 X = 3JX = 3\lambda X$. Donc $(\lambda^2 - 3\lambda)X = 0$. Or, X est un vecteur non nul, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 3$.

Montrons que l'on a effectivement $\mathrm{Spec}(J) = \{0, 3\}$. Puisque $J\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 3 est effectivement une valeur propre. Or, $0 \in \mathrm{Spec}\,J$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(J)$ est non réduit à zéro. Or, $\mathrm{Rg}(J) = 1 = 3 - \dim \mathrm{Ker}\,J$ donc $\mathrm{Ker}\,J$ est non réduit à zéro. Finalement on a bien montré $\boxed{\mathrm{Spec}\,J = \{0, 3\}.}$

Exercice | **Claire JO** (Solution : 6) On note $\|X\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $X \in \mathbf{R}^n$. Créer une fonction `iter_vp`, qui à une matrice donnée sous forme d'un tableau `numpy` `M`, un vecteur `X`, et un entier k retourne la colonne $\frac{A^kX}{\|A^kX\|}$. Elle retournera **False** si la quantité précédente n'est pas définie.

Solution (exercice)

(Énoncé : 6) Je propose de faire cela en deux fonctions, tout d'abord une fonction renvoyant la norme d'une matrice colonne et ensuite la fonction principale.

```python
def Norme(X):
    S = 0
    for x in X:
        S += x**2
    return S**0.5

import numpy as np
import copy

def iter_vp(A, k, X):
    Y = copy.deepcopy(X)
    for _ in range(k-1):
        Y = A@X
    return Y/Norme(Y)
```

Exercice | **Lou DE** (Solution : 6) Déterminer la nature de la série $\left(\sum \frac{n}{n^3+1}\right)$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 6) Plutôt que de chercher un équivalent, on peut utiliser des majorations classiques. En effet, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\frac{n}{n^3+1} \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Or, d'après le cours, $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge, donc puis la série donnée à termes positifs, on déduit la convergence de $\left(\sum \frac{n}{n^3+1}\right)$ par théorème de comparaison.

Exercice | **Matéo LO** (Solution : 6) Les suites $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ sont-elles adjacentes ?

Solution (exercice)

(Énoncé : 6) Notons $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. Par règles classiques sur les monotonices, les deux suites précédentes sont respectivement décroissantes et croissante. Mais $u_n - v_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Les deux suites ne sont donc pas adjacentes.

Exercice | **Mathilde PI** (Solution : 6) Déterminer la nature de $\left(\sum \frac{1}{n^4}\right)_{n\geqslant 1}$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 6) On peut conclure comme dans le cours par comparaison série-intégrale, ou bien directement par simple majoration. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^4} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or, d'après le cours $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge, donc puisque les séries sont à termes positifs, la série $\boxed{\left(\sum \frac{1}{n^4}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge aussi.}}$

Exercice | **Philippine CA** (Solution : 7) Créer une fonction `mini_matrice`, qui prend une liste de listes et retourne le minimum de tous les coefficients de la matrice correspondante.

Solution (exercice)

(Énoncé : 6)

```python
def mini_matrice(M):
    '''
    prend en argument une matrice et retourne le minimum de tous
    ses coefficients
    '''
    min = M[0][0]
    for ligne in M:
        for x in ligne:
            if x < min:
                min = x
    return min
```

Exercice | **Nahia LA** (Solution : 7) Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $u_{n+2} = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 7) En calculant les premiers termes on constate facilement que les termes impairs semblent être tous nuls, on le montre proprement par récurrence.
Concentrons-nous sur les termes pairs. Notons $p_n = u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors cherchons une relation de récurrence sur la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$. Remplaçant n par $2n$ dans la relation de récurrence, on obtient :

$$p_{n+1} = u_{2n+2} = \frac{(-1)^{2n}}{2(2n+1)} u_{2n} = \frac{1}{2(2n+1)} u_{2n} = \frac{1}{2(2n+1)} p_n.$$

Donc $p_n = \frac{1}{2(2(n-1)+1)} p_{n-1} = \frac{1}{2(2n-1)} p_{n-1}$. Puis on continue :

$$p_n = \frac{1}{2(2n-1)} \frac{1}{2(2n-3)} p_{n-2} = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\dots 1} p_0.$$

Puisque $p_0 = u_0 = 1$, on conjecture alors la formule ci-dessous :

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\dots 1}.$$

Elle se montre alors par récurrence. On peut également — mais ce n'était pas explicitement demandé — exprimer le produit des nombres impairs à l'aide de factorielles.

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\dots 1} \\ &= \frac{2n(2n-2)\dots 2}{2^{n-1}(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)2\dots 1} && \textit{Multiplication par les pairs} \\ &= \frac{2^n n!}{2^{n-1}(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)2\dots 1} && \textit{Mise en facteur dans chaque entier pair} \\ &= \frac{2.n!}{(2n)!}. \end{aligned}$$

En conclusion, on montre par récurrence l'expression ci-dessous : pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_{2n} = \frac{2.n!}{(2n)!}, \qquad u_{2n+1} = 0.$$

Exercice | **Raphaël PÉ** (Solution : 7) Soit $F = \mathrm{Vect}((1,2,3))$. Déterminer par deux méthodes la projection orthogonale de $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ sur F, ainsi que sa matrice dans la base canonique.

Solution (exercice)

(Énoncé : 7)

- Le vecteur $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ forme une base orthonormée de F. Donc d'après le cours, $p_F(x,y,z) = \frac{1}{14}(x+2y+3z)(1,2,3)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
- Autre méthode : on utilise la définition. On a

$$(x',y',z') = p_F(x,y,z) \iff \begin{cases} (x',y',z') & = \lambda(1,2,3), \\ (x-x',y-y',z-z') & \perp (1,2,3) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x',y',z') & = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda), \\ 14\lambda & x+2y+3z \end{cases}$$

On déduit alors $(x,y,z) = \frac{1}{14}(x+2y+3z)(1,2,3)$.

Il reste ensuite à déterminer l'image de la base canonique pour trouver la matrice. On a

$$p_F(1,0,0) = \left(\frac{1}{14}, \frac{2}{14}, \frac{3}{14}\right),$$
$$p_F(0,1,0) = \left(\frac{2}{14}, \frac{4}{14}, \frac{6}{14}\right),$$
$$p_F(0,0,1) = \left(\frac{3}{14}, \frac{6}{14}, \frac{9}{14}\right).$$

On déduit alors $\underset{\mathscr{B}\mathrm{can}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(p_F) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. ....

Exercice | Manon RE (Solution : 8) Soit $F = \left\{(\lambda - 4\mu, \lambda+\mu, 2\lambda-\mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$. Justifier sans calcul que F est un sous-espace vectoriel, déterminer une écriture cartésienne.

Solution (exercice) ....
(Énoncé : 8) ... .

Exercice | Justine VI (Solution : 8) L'application $f : (x,y) \in (\mathbf{R}^\star)^2 \longrightarrow \frac{2x+3y}{x+y} \in \mathbf{R}^\star$ est-elle injective ?

Solution (exercice) ....
(Énoncé : 8) Non. Car $f(-3,2) = \frac{2(-3)+3(2)}{-3+2} = f(-6,4)$. Attention à ne pas parler de noyau car l'application n'est pas du tout linéaire. ....

Exercice | Elisabeth GI (Solution : 8) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\quad \mathbf{P}(X = 2k) = 0, \quad \mathbf{P}(X = 2k+1) = \frac{1}{\varphi^{2k+1}}$ avec $\varphi \in \mathbf{R}$. Déterminer φ.

Solution (exercice) ....
(Énoncé : 8) Il s'agit de regarder quand la somme des probabilités vaut 1, *i.e.* quand

$$\left(\sum \frac{1}{\varphi^{2k+1}}\right)_{k\geqslant 0} \quad \text{converge,} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2k+1}} = 1.$$

Comme pour tout entier $k \geqslant 0$, $\frac{1}{\varphi^{2k+1}} = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^k$, elle a même nature que la série $\left(\sum \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^k\right)_{k\geqslant 0}$. Or, cette dernière converge si et seulement si :

$$\left|\frac{1}{\varphi^2}\right| < 1 \quad \iff \quad |\varphi|^2 > 1 \quad \iff \quad |\varphi| > 1.$$

De plus, après calcul de la somme, on trouve comme condition :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)} = 1 \quad \iff \quad \frac{\varphi}{\varphi^2-1} = 1.$$

Dès lors, φ doit être solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. En prenant en compte la condition $|\varphi| > 1$, on trouve comme unique solution $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. [2] ....

Exercice | Hugo MA (Solution : 8) Soit $F = \left\{aX^2 + (3a+2b)X - 2a - b,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}$. Justifier sans calcul que F est un sous-espace vectoriel. Que vaut dim F ?

Solution (exercice) ....
(Énoncé : 8) Une autre écriture de F est la suivante

$$F = \mathrm{Vect}(X^2 + 3X - 2, 2X - 1).$$

[2] le nombre d'or, *again*..

Donc F est un espace vectoriel car il s'exprime sous forme d'un espace vectoriel engendré. De plus, $\mathscr{B} = (X^2+3X-2, 2X-1)$ est par définition une famille génératrice de F, mais également libre car échelonnée. C'est donc une base de F et $\dim F = 2$. . . . . .

Exercice | **Laurence LA** (Solution : 9) Soient $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. A-t-on $M \in \mathrm{Vect}(A, B)$?

Solution (exercice) . . . .

(Énoncé : 9) Soient $a, b \in \mathbf{R}$, $M = aA + bB \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ -a+5b & 2a+b \end{pmatrix}$. Après résolution, on trouve $a = 2$, $b = -1$. Donc $M = 2A - B$ et la réponse à la question est donc $\boxed{\text{OUI.}}$ . . . .

Exercice | **Mélina GE** (Solution : 9) Étudier $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Solution (exercice) . . . .

(Énoncé : 9) Au risque de me répéter, il ne s'agit pas d'un problème de convergence d'une suite géométrique, étant donné que $1+\frac{x}{n}$ dépend de n. Mais, on sait que

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{=} \exp(x + o(1)) \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \boxed{e^x}.\end{aligned}$$

Je rappelle également que les passages à l'exponentielle ou logarithme sont le plus souvent faux dans les équivalents. On envisage donc plutôt une rédaction comme *supra* ou à la rigueur en utilisant le théorème de composition des limites. . . . .

Exercice | **Axel RE** (Solution : 9) Soit $n \geqslant 1$. Justifier que $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leqslant \frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}$. Y-a-t-il égalité ? On pourra discuter suivant la valeur de n.

Solution (exercice) . . . .

(Énoncé : 9) Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} &= \left\langle (1,\dots,1) \middle| (\sqrt{1},\dots,\sqrt{n}) \right\rangle \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^{1/2} \sqrt{n} = \frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}.\end{aligned} \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

D'après le cas d'égalité, il y a égalité si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, $\sqrt{i} = \lambda$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ceci n'est possible que si $\boxed{n = 1.}$ . . . .

Exercice | **Mickaël AV** (Solution : 9) Créer une fonction `trace`, qui prend en argument un tableau `numpy M`, et qui retourne `False` si le tableau n'est pas carré, et la somme des éléments diagonaux sinon.

Solution (exercice) . . . .

(Énoncé : 9)

```python
def trace(M):
    '''
    retourne la trace de M si la matrice est carrée
    '''
    n_l, n_c = M.shape
    if n_l == n_c:
        tr = 0
        for i in range(n_l):
            S += M[i, i]
        return S
    return False
```

. . . .

Exercice | **Kristène PI** (Solution : 10) Montrer que la fonction $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto \int_{-x}^{x+2y} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donner les dérivées partielles le cas échéant.

Solution (exercice)

(Énoncé : 9) Comme pour toute intégrale à bornes variables, on considère une primitive F de la fonction intégrée $f : t \longmapsto \arctan(t^2)$, définie sur $\mathbf{R}$ puisque f est continue sur $\mathbf{R}^2$ (en tant que composée de telles fonctions). Alors, pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_{-x}^{x+2y} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x+2y) - \mathrm{F}(-x),$$

dès lors, d'après la formule de dérivation d'une composée :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_{-x}^{x+2y} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{F}'(x+2y) - (-1)\mathrm{F}'(-x) = \arctan((x+2y)^2) + \arctan(x^2), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int_{-x}^{x+2y} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t\right) = 2\mathrm{F}'(x+2y) - 0 = 2\arctan((x+2y)^2). \end{cases}$$

Exercice | **Thomas BR** (Solution : 10) Créer un script implémentant l'algorithme de Dichotomie pour résoudre l'équation $f(x) = -2x^2$ sous réserve d'existence d'une solution sur $[a,b]$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 10) On applique simplement l'algorithme de Dichotomie à la fonction $x \longmapsto f(x) + 2x^2$. Que l'on peut définir facilement grâce à l'instruction `g = lambda x:f(x)+2*x**2`. Sinon, on refait l'algorithme du cours en l'adaptant un petit peu.

```python
def dichtomie_exotique(L):
    '''
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f(x)+x**2 entre a
    ↪ et b avec précision prec
    '''
    while b-a > prec:
        c = (a+b)/2
        if (f(a)+2*a**2)*(f(c)+2*c**2) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

Exercice | **Bastien CA** (Solution : 10) On donne les points $\mathrm{A}(-1,3), \mathrm{B}(2,-1), \mathrm{C}(3,4)$. Déterminer les coordonnées du barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{A},-1),(\mathrm{B},2),(\mathrm{C},3)\}$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 10) Les coordonnées du barycentre sont données par le cours, notons-le $\mathrm{G}(x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G})$:

$$x_\mathrm{G} = \frac{1}{(-1)+2+3}(-1+2+3)\left(-x_\mathrm{A} + 2x_\mathrm{B} + 3x_\mathrm{C}\right) = \frac{7}{2},$$
$$y_\mathrm{G} = \frac{1}{(-1)+2+3}(-1+2+3)\left(-y_\mathrm{A} + 2y_\mathrm{B} + 3y_\mathrm{C}\right) = \frac{7}{4}.$$

Donc : $\boxed{\mathrm{G}\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right)}$. Rappelons une autre définition à connaître :

$$(-1)\overrightarrow{\mathrm{AG}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BG}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \vec{0}.$$

Exercice | **Emma ME** (Solution : 10) Soit X une variable aléatoire admettant une variance σ^2 (et donc une espérance $\mu \in \mathbf{R}$), et $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$ un n-échantillon de même loi. On suppose la variance connue. Donner un intervalle de confiance de niveau α sur μ^3.

Solution (exercice)

(Énoncé : 10) Rappelons, puisque les X_i sont i.i.d. et possèdent une variance, que : pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$\mathbf{P}\left(\mu \in \left[\overline{X_n} - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right).$$

Or, la fonction $x \longmapsto x^3$ est croissante sur $\mathbf{R}$, donc :

$$\mathbf{P}\left(\mu^3 \in \left[\left(\overline{X_n} - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^3, \left(\overline{X_n} + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^3\right]\right).$$

Exercice | Clément ES (Solution : 11) Calculer la somme de $\left(\sum (2n^2-1)x^n\right)_{n\geqslant 0}$ pour $|x|<1$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 11) Soit $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x|<1$. Calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(2n^2-1)x^n &= \sum_{n=0}^{N}\left(2(n(n-1)+n)x^n - x^n\right) \\
&= 2x^2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^{n-2} + 2x\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= 2x^2\frac{2}{(1-x)^3} + 2x\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\
&= \boxed{\frac{x^2+4x-1}{(1-x)^3}.}
\end{aligned}$$

linéarité de la somme

Somme de termes géométriques et séries géométriques dérivées car $|x|<1$

Exercice | Alice LA (Solution : 11) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, on note $Y = |\arctan X|$. La variable aléatoire Y est-elle à densité ?

Solution (exercice)

(Énoncé : 11) Puisque $X(\Omega) = [0,1]$, nous avons $Y = \arctan X$. Tout d'abord, $Y(\Omega) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbf{P}(\arctan x \leqslant x) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2}, \\ \mathbf{P}(X \leqslant \tan x) & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2}, \\ \tan x & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque F_Y n'est pas continue en $\pm\frac{\pi}{2}$, $\boxed{\text{la variable aléatoire Y n'est pas à densité.}}$

Exercice | Leeloo GO (Solution : 11) On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Justifier que Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, préciser sa dérivée seconde.

Solution (exercice)

(Énoncé : 11) Par définition d'une fonction de répartition, nous avons $\Phi' = \varphi$ où φ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or, φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que composée et produit de telles fonctions. Donc Φ est $\mathscr{C}^\infty$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Phi'(x) = \varphi(x), \quad \Phi''(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice | Asia PH (Solution : 11) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Solution (exercice)

(Énoncé : 11) Nous avons $\mathrm{Spec}(A) = \{1\}$, donc si elle était diagonalisable elle serait égale à I_2. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice | Andoni PO (Solution : 11) Soient $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ indépendantes, avec $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $\Delta = |X_1 - X_2|$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 11) Tout d'abord, constatons que $\Delta(\Omega) = \mathbf{N}$.Notons $q = 1-p$. Soit donc $k \in \mathbf{N}$. Constatons tout d'abord que :

$$\{\Delta = k\} = \begin{cases} \{X_1 - X_2 = k\} \uplus \{X_2 - X_1 = k\} & \text{si } k \neq 0, \\ \{X_1 = X_2\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit donc $k \in \mathbf{N}^\star$ pour commencer.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\Delta = k) &= \mathbf{P}\left(\{X_1 - X_2 = k\} \uplus \{X_2 - X_1 = k\}\right) \\
&= \mathbf{P}(X_1 - X_2 = k) + \mathbf{P}(X_2 - X_1 = k) && \textit{X_1, X_2 ont même loi} \\
&= 2\mathbf{P}(X_1 - X_2 = k) && \textit{formule des probabilités totales} \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = k+\ell, X_2 = \ell) && \textit{Indépendance} \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = k+\ell)\,\mathbf{P}(X_2 = \ell) && \textit{définition d'une loi géométrique} \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{\infty} pq^{k+\ell-1}pq^{\ell-1} \\
&= 2p^2q^{k-2}\sum_{\ell=1}^{\infty} q^{2\ell} && \textit{Convergence et somme d'une série géométrique} \\
&= 2p^2q^{k-2}q^2\frac{1}{1-q^2} = \frac{2p^2q^{k-2}q^2}{(1-q)(1+q)} \\
&= \boxed{\frac{2pq^k}{1+q}}.
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\Delta = 0) = \mathbf{P}(X_1 = X_2) && \textit{formule des probabilités totales} \\
= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = \ell, X_2 = \ell) && \textit{Indépendance} \\
= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = \ell)\,\mathbf{P}(X_2 = \ell) \\
= p^2 \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{2k-2} \\
= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \boxed{\frac{p}{1+q}}.
\end{aligned}$$

On peut vérifier *a posteriori* que la somme des probabilités vaut bien un.

Exercice | Perrine CA (Solution : 12) Créer un script implémentant l'algorithme de Dichotomie pour résoudre l'équation $f(x^2) = 0$ sous réserve d'existence d'une solution sur $[a, b]$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 12) On applique simplement l'algorithme de Dichotomie à la fonction $x \longmapsto f(x^2)$. Que l'on peut définir facilement grâce à l'instruction `g = lambda x:f(x**2)`. Sinon, on refait l'algorithme du cours en l'adaptant un petit peu.

```python
def dichotomie_exotique(L):
    '''
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f(x**2) entre a et
    b avec précision prec
    '''
    while b-a > prec:
        c = (a+b)/2
        if f(a**2)*f(c**2) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
```

```
        return (a+b)/2
```

Exercice | **Simon HR** (Solution : 13) L'application $f : P \in \mathbf{K}_n[X] \longrightarrow P(X^2)$ est-elle un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$? On précisera pour chaque propriété lesquelles sont vraies (en justifiant).

Solution (exercice)

(Énoncé : 13) Considérons $f : P \in \mathbf{K}_n[X] \longrightarrow P(X^2)$. On vérifie sans peine la linéarité par linéarité de l'évaluation. A-t-on $f(\mathbf{K}_n[X]) \subset \mathbf{K}_n[X]$? La réponse est non pour une raison de degré. Par exemple $f(X^n) = X^{2n} \notin \mathbf{K}_n[X]$ donc f est une application linéaire, mais pas un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice | **Emma BR** (Solution : 13) Exprimer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3t^2}\, dt$ en fonction de l'intégrale de Gauß. En déduire sa valeur.

Solution (exercice)

(Énoncé : 13) On part de l'égalité (et convergence, qui proviennent du cours) suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

On rappelle que c'est l'égalité clef permettant d'établir que la densité de la $\mathcal{N}(0,1)$ est effectivement une densité de probabilité.

Faisons un changement de variable affine pour avoir la bonne intégrale. Posons $u = \sqrt{6}t$, on peut réaliser ce changement car $t \longrightarrow \sqrt{6}t$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et est de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t^2}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Enfin, par parité de $t \longrightarrow e^{-3t^2}$, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t^2}\, dt = 2\int_0^{\infty} e^{-3t^2}\, dt.$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}}$.

Exercice | **Rudy US** (Solution : 13) Déterminer la nature de la série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n + n}{n^2+1}\right)$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 13) Constatons que la série est à termes positifs. De plus, $\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Donc pour n assez grand, $\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \geqslant \frac{1}{2n}$, or $\left(\sum \dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge d'après le cours, donc par théorème de comparaison, $\left(\sum \dfrac{(-1)^n + n}{n^2+1}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge également.

Exercice | **Florine CH** (Solution : 13) Déterminer $f(\mathbf{R})$ où $f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \frac{x}{1+x}$. Est-elle surjective sur $\mathbf{R}$?

Solution (exercice)

(Énoncé : 13) Soit $y \in \mathbf{R}$. Alors résolvons en x l'équation $y = f(x)$.

$$y = \frac{x}{1+x} \iff (1+x)y = x \iff x(1-y) = y \iff x = \frac{y}{1-y} \quad \text{si} y \neq 1.$$

Donc $\boxed{f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}\setminus\{1\}.}$ Et la fonction n'est donc pas surjective sur $\mathbf{R}$. On pourrait également chercher les variations de f et conclure sur l'image à l'aide du tableau de variations.

Exercice | **Stan RO** (Solution : 14) Créer une fonction `multip`, qui prend en argument un tableau numpy `M`, un indice `i`, un scalaire `c` et modifie la ligne `i` de `M` en la multipliant par `c`.

Solution (exercice)

(Énoncé : 14)

```python
def multip(M, i, c):
    '''
    modifie M en multipliant la ligne i par la constante c
    '''
    for i in range(len(M[i])):
        M[i, j] = M[i, j]*c
```

Exercice | **Diego SA** (Solution : 14) Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ supposées indépendantes. Justifier que $X^2 + Y^2$ est à densité et déterminer une densité sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Solution (exercice)

(Énoncé : 14) Notons $Z = X^2 + Y^2$, alors $Z(\Omega) = \mathbf{R}^+$ puisque $X^2(\Omega) = [0,1]$ et $Y^2(\Omega) = \mathbf{R}^+$.

D'après le cours, la densité de Z est obtenue en convolant celles de X^2 et Y^2, puisque $X^2 \perp\!\!\!\perp Y^2$. Soit $x \in \mathbf{R}$, nous allons calculer les fonctions de répartition des deux variables aléatoires afin d'en déduire une densité.

- $$\mathbf{P}(X^2 \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1, \\ \mathbf{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right) = \mathbf{P}\left(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right) = \sqrt{x} & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}$$
  La fonction ainsi obtenue est bien continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1. Donc elle est à densité et une densité est $\boxed{f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,1[}(x), x \in \mathbf{R}.}$
- $$\mathbf{P}(Y^2 \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \mathbf{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant Y \leqslant \sqrt{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$ Soit $x > 0$. Alors
  $$\mathbf{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant Y \leqslant \sqrt{x}\right) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}),$$
  où comme d'habitude Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Par propriété du cours, on obtient
  $$\mathbf{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant Y \leqslant \sqrt{x}\right) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1.$$
  Puisque Φ et $\sqrt{.}$ sont continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^+$, et que $2\Phi(\sqrt{0}) - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 0$, on déduit que F_{Y^2} est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, par composition de telles fonctions, la fonction F_{Y^2} est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0. Donc Y^2 est à densité et une densité est donnée par $\boxed{f_{Y^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^{+*}}(x), \text{ pour } x \in \mathbf{R}.}$

On peut enfin conclure par convolution. Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$
\begin{aligned}
f_Z(x) &= \int_{\mathbf{R}} f_{X^2}(t) f_{Y^2}(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0,1[}(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}} \mathrm{e}^{-\frac{x-t}{2}} \mathbb{1}_{\mathbf{R}^{+*}}(x-t)\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \mathrm{e}^{-\frac{x-t}{2}} \mathbb{1}_{]-\infty,x[}(t)\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \times \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \mathrm{e}^{-\frac{x-t}{2}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \mathrm{e}^{-\frac{x-t}{2}} & \text{si } x > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

expressions trouvées avant

Exercice | **Chloé BO** (Solution : 15) Soit $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x-y+z=0,\quad 2x-y-z=0\right\}$. Justifier, en utilisant des noyaux, que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Donner une forme paramétrique de F (*i.e.* une famille génératrice).

Solution (exercice)

(Énoncé : 15) Notons $\varphi_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathrm{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-y+z \end{array}\right.$ et $\varphi_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathrm{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-y+z \end{array}\right.$. On vérifie que ces deux applications sont linéaires et par définition, $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \varphi_2$ apparaît donc comme une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Passons à sa forme paramétrique, *i.e.* à la recherche d'une famille génératrice. Nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left\{ x-y+z = 0, 2x-y-z = 0 \right. \\
\iff &\left\{ x-y+z = 0, y-3z = 0 \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
\iff &\left\{ x = 2z, y = 3z \right. \\
\iff &\Big(x,y,z\Big) = z\Big(2,3,1\Big).
\end{aligned}
$$

Autrement dit $\boxed{\mathrm{F} = \operatorname{Vect}((2,3,1)).}$

Exercice | **Nicolas CL** (Solution : 15) Créer une fonction `tri_premierecoord` prenant en argument une liste `L`, dont tous les éléments sont des couples, et retournant une autre liste `L` triée suivant la première coordonnée de chaque couple par ordre croissant. Par exemple `tri_premierecoord([[1, 2], [-7, 3]])` retournera `[[-7, 3], [1, 2]]`. *On utilisera bien entendu aucune fonction de tri déjà existante.*

Solution (exercice)

(Énoncé : 15)

Trions par exemple avec le tri rapide.

```python
def tri_rapide_rec_exotique(L):
    '''
    Retourne une liste triée par ordre croissant selon la
    coordonnée 1 des éléments de L,
    selon le tri rapide. Version récursive.
    '''
    if L == []:
        return []
    else:
        pivot = L[0]
        inf_pivot = []
        sup_pivot = []
        for i in range(1, len(L)):
            if L[i][0] < pivot[0]:
                inf_pivot.append(L[i])
            else:
                sup_pivot.append(L[i])
        return tri_rapide_rec_exotique(inf_pivot) + [pivot] +
        tri_rapide_rec_exotique(sup_pivot)
```

Exercice | **Xavier ME** (Solution : 16) Donner un développement limité asymptotique à l'ordre 2 de la suite $\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 16) Constatons que la suite est bien définie pour n assez grand, plus précisément dès que $n \geqslant 2$ puisqu'alors $1-\frac{(-1)^n}{n}>0$. La question de l'existence d'un développement limité asymptotique a donc du sens.

On passe ensuite à la forme exponentielle.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\right) \qquad car\ \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\\ &\underset{n\to\infty}{=} \exp\left(-(-1)^n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{=} \exp\left(-(-1)^n\right)\exp\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{=} \exp\left(-(-1)^n\right)\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \boxed{\exp\left(-(-1)^n\right)\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{7}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).}\end{aligned}$$

Exercice | **Adèle BA** (Solution : 16) Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\arctan t}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 16) On ne dit pas que la fonction converge vers zéro en $+\infty$, mais, on cherche à appliquer le théorème de comparaison. Tout d'abord, $t \longmapsto \frac{\arctan t}{t^3}$ est continue sur $[1,\ \infty[$ et positive, et

$$\left|\frac{\arctan t}{t^3}\right| \leqslant \frac{\pi}{2t^3}.$$

Soit $A>1$. Alors $\displaystyle\int_1^A\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\int_1^A t^{-3}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[t^{-2}\right]_1^A \xrightarrow{A\to\infty} \frac{1}{2}$. Donc par comparaison pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\arctan t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice | **Matteo LE** (Solution : 16) Soit $E=\{P\in\mathbf{R}_3[X],\ P(1)=0\}$. Est-ce que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$? Calculer dim F de deux manières : en cherchant une base, et en interprétant F comme un noyau.

Solution (exercice)

(Énoncé : 16) Oui, car $E=\operatorname{Ker}\varphi$ où $\varphi\ \left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ P & \longmapsto & P(1)\end{array}\right.$. On vérifie que φ est une application linéaire par linéarité de l'évaluation. Donc, d'après le cours, $\boxed{\text{E est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}_3[X]}$ (puisque c'est un noyau).

Puisque φ est une forme linéaire non nulle, nous avons $\boxed{\operatorname{Rg}(\varphi)=1.}$ Donc d'après le théorème du rang

$$\dim E=\dim\operatorname{Ker}\varphi=\dim(\mathbf{R}_3[X])-\operatorname{Rg}\varphi=4-1=\boxed{3}.$$

Redémontrons cela en cherchant une base. Si $P\in E$, alors 1 est racine de P. Donc P s'écrit sous la forme $P=a(X-1)(X^2+bX+c)$ avec $a,b,c\in\mathbf{R}$. Autrement dit, sous la forme

$$P=a(X-1)X^2+b(X-1)X+c(X-1).$$

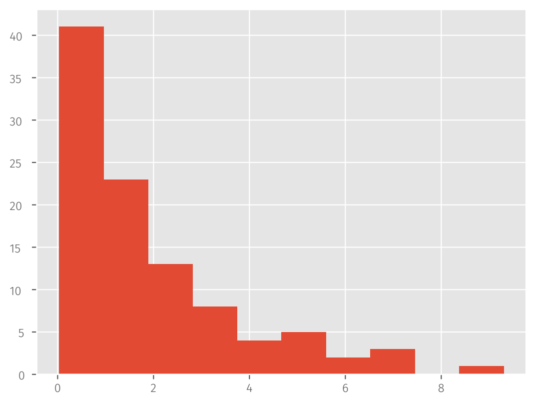
Donc la famille $\left((X-1)X^2,(X-1)X,X-1\right)$ est une famille génératrice. Puisqu'elle est échelonnée, c'est donc une $\boxed{\text{base et on retrouve } \dim E=3.}$

Exercice | **Adrien NA** (Solution : 16) Soient $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. Créer une fonction d'en-tête `histo_chideux(N)` qui prend en argument un nombre `N` de simulations et qui trace un histogramme approchée de la loi de $X_1^2+X_2^2$ sur $[0,100]$. On pourra subdiviser en des intervalles entiers de longueur un, et utiliser le module `numpy.random` pour simuler la loi normale.

Solution (exercice)

(Énoncé : 16)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def histo_chideux(N):
    '''
    trace un histogramme de la loi du chi deux à deux degrés de
    ↪ liberté
    '''
    obser = [np.random.normal(0, 1)**2 + np.random.normal(0, 1)**2
    ↪ for _ in range(N)]
    plt.hist(obser)

histo_chideux(100)
```



Exercice | **Morgane DA** (Solution : 17) Déterminer les dérivées partielles de $f : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + (xy)^{1/3}$ ainsi que son ensemble de définition.

Solution (exercice)

(Énoncé : 17) Notons $f : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + (xy)^{1/3}$. La fonction est définie sur $\mathbf{R}^2$ puisque $z \in \mathbf{R} \longmapsto z^{1/3}$ est définie sur $\mathbf{R}$, en tant que bijection réciproque de la fonction $z \in \mathbf{R} \longmapsto z^3$.

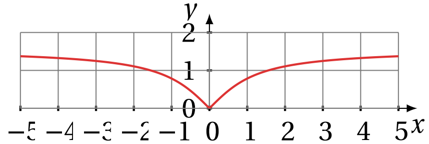
De plus, f admet des dérivées partielles dans les deux directions puisque c'est une somme de telles fonctions par composition. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2} + \frac{y}{3}(xy)^{-2/3},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2} + \frac{x}{3}(xy)^{-2/3}.$$

Exercice | **Claire JO** (Solution : 17) L'application $x \in \mathbf{R} \longmapsto |\arctan x|$ est-elle injective? Dessiner son graphe.

Solution (exercice)

(Énoncé : 17) Traçons d'abord la fonction.



Elle est clairement non injective. Par exemple parce que $\left|\arctan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Attention ici : on ne parle pas de noyau, car l'application n'est pas linéaire! D'ailleurs si on calculait le «noyau», on trouverait $\{0_{\mathbf{R}}\}$.

Exercice | **Lou DE** (Solution : 17) Déterminer l'intersection de $\mathscr{D} : 2x+5y-10=0$ et de la droite $\mathscr{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $u(3, 2)$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 17) Passons par la forme paramétrique de $\mathscr{D}'$: ce sont les éléments de coordonnées $x(\lambda) = -1+3\lambda$ et $y(\lambda) = 2+2\lambda$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$, et un tel élément est dans $\mathscr{D}$ si et seulement si $2(-1+3\lambda)+5(2+2\lambda) = 10$. En résolvant en λ, on trouve comme unique solution $\lambda = \frac{1}{8}$, d'où l'unique point $\left(-\frac{5}{8}, \frac{9}{4}\right)$.

Exercice | **Matéo LO** (Solution : 18) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que $2 \in \mathrm{Spec}(A)$. Créer un script Python qui cherche les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 dont les deux coordonnées sont dans $[\![-5\,,\,5]\!]$.

Solution (exercice)

(Énoncé : 17) Nous avons $A - 2I_2 = -J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice J étant de rang 1, le théorème du rang fournit alors $\mathrm{Rg}(A - 2I_2) = 1 < 2$ donc $2 \in \mathrm{Spec}(A)$.

On cherche ensuite les vecteurs propres désirés à l'aide d'une boucle `for`.

```python
A = np.array([[1, -1], [-1, 1]])
def recherche_vp(A):
    liste_vp = []
    for x in range(-5, 6):
        for y in range(-5, 6):
            if ((A - 2*np.eye(2,2))@np.array([[x], [y]]) ==
            ↪  np.zeros((2, 1))).all() \
            and [x, y] != [0, 0]:
                liste_vp.append(np.array([[x], [y]]))
    return liste_vp
```

Une exécution donne alors la liste suivante de vecteurs propres : [array([[-5], [5]]), array([[-4], [4]]), array([[-3], [3]]), array([[-2], [2]]), array([[-1], [1]]), array([[1], [-1]]), array([[2], [-2]]), array([[3], [-3]]), array([[4], [-4]]), array([[5], [-5]])].

2. ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

2.1. Applications de la diagonalisation

L'objectif de cette sous-section est d'étudier les deux applications principales de la diagonalisation. L'adjectif « principal » est à comprendre en terme de nombre d'apparitions dans les sujets à l'écrit, à savoir :

1. l'étude de systèmes de récurrences linéaires pour les suites,
2. la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires, que l'on appelle « systèmes différentiels ».

Dans les trois exercices qui suivent, la matrice A désignera la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1 | **Réduction de la matrice A** (Solution : 39) Diagonaliser la matrice A, *i.e.* montrer qu'il existe une matrice P inversible, et d diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$, on explicitera la matrice P, mais pas nécessairement la matrice P^{-1}.

2.1.1. Systèmes de suites récurrentes

Exercice 1.2 | (Solution : 39) On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n - 2v_n - 2w_n, \\ v_{n+1} &= 4u_n - 2v_n - 4w_n, \\ w_{n+1} &= -4u_n + v_n + 3w_n, \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$ et u_0, v_0, w_0.

2.1.2. Systèmes différentiels linéaires

Exercice 1.3 | (Solution : 40)

1. Soit le système différentiel suivant (en les fonctions inconnues x_1, x_2, x_3 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & -2x_1 - 2x_2 - 2x_3, \\ x_2' & = & 4x_1 - 2x_2 - 4x_3, \\ x_3' & = & -4x_1 + x_2 + 3x_3, \end{array}\right. \qquad x_1, x_2, x_3 \text{ de classe } \mathscr{C}^1.$$

2. **2.1)** Écrire le système précédent à l'aide de la matrice A et de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   2.2) Notons $Y = P^{-1}X$. Montrer que X est solution si et seulement si Y est solution de $Y' = DY$.
   2.3) On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Résoudre le système précédent.
3. En déduire les solutions du système différentiel de départ.

2.2. Géométrie

Exercice 1.4 | **Géométrie affine** (Solution : 40)

1. Dans le plan, en utilisant le déterminant, donner une équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (a, b)$ passant par le point $C(x_0, y_0)$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.
2. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:
   2.1) Déterminer l'équation de la droite D passant par $A(1, -2)$ et orthogonale à $\vec{n} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.
   2.2) Déterminer les coordonnées de H_0, projeté orthogonal de $M_0(2, 5)$ sur D. Quelle est la distance de M_0 à D ?
3. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, donner une équation du plan passant par $A(1, 1, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (-1, 0, 1)$.
4. Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner une représentation paramétrique du plan (ABC) avec $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 2, 3)$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
5. On considère l'ensemble (E) $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z = 0$.
   5.1) Démontrer que (E) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon.
   5.2) Démontrer que (E) et la droite Δ passant par $A(3, 1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1, -2, 3)$ ont un seul point en commun, que l'on note B.
   5.3) En déduire que les droites (ΩB) et Δ sont perpendiculaires.
   5.4) Déterminer l'intersection de (E) et de l'ensemble Δ' d'équation
   $$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbf{R}$$
   5.5) Démontrer que la droite (ΩB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ défini par les deux droites Δ et Δ'.
   En déduire que pour tout point $M \in \mathscr{P}$, $M \neq B$ on a $\Omega M > \sqrt{13}$.
   <u>*Indication :*</u> *considèrer le triangle* (ΩBM)..
   5.6) Que conclure pour le plan $\mathscr{P}$ et la sphère (E) ?

Exercice 1.5 | **Projection orthogonale affine** (Solution : 42) L'objectif de l'exercice est de revoir la notion de projection orthogonale sur un espace affine, plus précisément sur une droite affine et un plan affine. Enfin, nous précisons le cas particulier où la droite et le plan sont vectoriels (*i.e.* $c = 0, d = 0$ ci-dessous) et constatons que la notion coïncide avec cella développée dans le chapitre de produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$.

1. **(Droite affine)** On s'intéresse ici à la notion de projection orthogonale sur une droite affine de $E = \mathbf{R}^2$. On munit E de son produit scalaire euclidien $\langle .|.\rangle$.
2. Soient la droite $(\mathscr{D})\quad ax + by = c$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ et $M_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathscr{D}$.
   2.1) Soit $A \in \mathscr{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$, montrer que $\left\langle \overrightarrow{AM_0} | \vec{n} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{H_0M_0} | \vec{n} \right\rangle$.
   2.2) En déduire que la distance de M_0 à D est $\quad d(M_0, \mathscr{D}) = \dfrac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM_0} | \vec{n} \right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|}$. En déduire l'expression de la distance faisant intervenir l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
   2.3) On se place dans le cas $c = 0$. Cette expression correspond-elle bien à la formule du cours d'algèbre linéaire ?
   2.4) **(Plan affine)** Reprendre cette démarche dans l'espace pour trouver l'ex-

pression de la distance d'un point à un plan ; on se place donc dans $E = \mathbf{R}^3$ dans cette question, et on notera $(\mathscr{P})\quad ax+by+cz+d=0$ l'équation du plan en question, avec $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$.

2.3. Réduction & Produit scalaire

Problème 1.1 | **Agro—Véto 2019 – Étude de sous-espaces vectoriels stables** (Solution : 42) Pour toute matrice M, on notera ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$ sa transposée. Dans toute la suite, tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ de sorte que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ et tout vecteur X de $\mathbf{R}^3$, le produit matriciel AX soit correctement défini.

On considérera le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^3$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire est égal à $\langle X|Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Comme le produit matriciel ${}^{\mathrm{T}}X.Y$ est égal à la matrice de taille 1×1,

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right),$$

On identifiera matrice de $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ et réel, en notant $\langle X|Y\rangle = {}^{\mathrm{T}}X.Y$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^3$ est *stable par la matrice* A si :

$$\forall X \in F, \quad AX \in F.$$

On rappelle que l'on appelle droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1 et plan vectoriel tout espace vectoriel de dimension 2.

Partie I — Contexte Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. On considère une suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par convention $A^0 = I_3$.

Partie II — Premier exemple On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que la matrice est diagonalisable. *On pourra remarquer que le polynôme* $X^3 - 2X^2 - X + 2$ *possède* 1 *comme valeur propre et le factoriser par* $X - 1$.
2. Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ tel que pour tout entier n, on ait $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$. *On ne demande pas de calculer explicitement ces matrices.*
3. Soit u une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n.$$

On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β *et* γ.

Partie III — Second exemple On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. La matrice est-elle diagonalisable ? *La réponse sera justifiée.*

5. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la droite vectorielle d engendré par le vecteur U est stable par A.

6. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.1) Prouver que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V et AV est un plan vectoriel. On le notera P.

6.2) Prouver que le vecteur A^2V appartient au plan P.

6.3) En déduire que le plan P est stable par la matrice A.

Partie IV — Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ quelconque.

7. Soit D une droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ dirigée par un vecteur U non nul. Prouver que la droite D est stable par la matrice A si, et seulement si, U est un vecteur propre de la matrice A.

8. Soit un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$. On considère une base (X_1, X_2) de P et X_3 un vecteur non nul normal à P.

8.1) Prouver que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, les vecteurs AX_1 et AX_2 appartiennent à P.

8.2) Montrer que le vecteur AX_1 appartient au plan P si, et seulement si, les vecteurs X_1 et ${}^{\mathrm{T}}AX_3$ sont orthoganaux. *On utilisera la notation matricielle du produit scalaire usuel sur $\boldsymbol{R}^3$ donnée en préambule* $\langle X|Y\rangle = {}^{\mathrm{T}}X.Y$.

8.3) En déduire que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, le vecteur X_3 est un vecteur propre de la matrice ${}^{\mathrm{T}}A$.

Partie V — Fin du second exemple On suppose de nouveau dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les droites vectorielles stables par la matrice A.

10. On admet que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{T}}A$ sont 1 et 2. Déterminer les équations des plans vectoriels stables par la matrice A.

11. En déduire une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que :

- le vecteur e_1 soit un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2,
- la droite engendrée par le vecteur e_2 soit stable par la matrice A,
- le plan P engendré par les vecteurs e_2 et e_3 soit stable par la matrice A.

12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

12.1) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

12.2) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\delta \in \mathbf{R}$.

12.3) Déterminer B^n pour tout entier naturel n.

13. En déduire que si une suite u vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n,$$

alors il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n.$$

On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β *et* γ.

Problème 1.2 | G2E 2017 (Solution : 46) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire canonique. On rappelle que le spectre d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres. Pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, on cherche à déterminer si f vérifie la propriété :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x | f(x) \rangle \geqslant 0. \tag{P}$$

Partie I — Premier exemple dans $\mathbf{R}^2$

1. Résoudre dans l'ensemble des fonction deux fois dérivables : $y'' = \frac{2}{3}y' - \frac{1}{9}y$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, et φ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi(t) = (at + b)\mathrm{e}^{t/3}$.
   2.1) Démontrer que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe deux suites (a_n), (b_n) telles que :
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{t/3}.$$
   2.2) Démontrer que (a_n) et (b_n) satisfont la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, \quad b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n.$$
   2.3) Déterminer (a_n) et (b_n) en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la matrice colonne de deux coefficients a_n et a_{n+1}.
   3.1) Démontrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{X}_{n+1} = \frac{1}{9}\mathrm{A}\mathrm{X}_n$.
   3.2) Notant f l'endomorphisme canonique associé à A, vérifie que $\operatorname{Spec} f \subset \mathbf{R}^+$.
   3.3) Calculer $f(-2, 1)$ puis déterminer si f vérifie (P).

Partie II — Une projection orthogonale dans $\mathbf{R}^3$

On se place dans $\mathbf{R}^3$ et on considère la matrice A définie ci-dessous dont on note f l'endomorphisme canonique associé :
$$\mathrm{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. **4.1)** Déterminer $\operatorname{Ker} f$ (en donner une base) puis démontrer que :
   $$\forall x \in \mathbf{R}^3, \quad f(x) - x \in \operatorname{Ker} f.$$
   4.2) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et justifier que $\operatorname{Im} f$ est un plan $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation cartésienne et un vecteur normal.
   4.3) En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.
5. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.
   5.1) Calculer $\mathrm{d}(x, \mathscr{P})$ et en déduire : $\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
   5.2) En déduire également que :
   $$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leqslant 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2.$$
   5.3) Calculer $\langle x | f(x)\rangle$ et démontrer que f vérifie (P).

Partie III — Deux exemples dans $\mathbf{R}^n$

Dans toute cette partie, $n \in \mathbf{N}^\star$, I désigne la matrice identité de taille $n \times n$, et pour tout $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $f^\star$ l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$.

6. **(Étude de l'endomorphisme dual)**
   6.1) Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x | f(x)\rangle = \langle x | f^\star(x)\rangle$.
   6.2) En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $f + f^\star$ vérifie (P).
   6.3) Justifier qu'il existe une matrice $\mathrm{Q} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}$ et une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\mathrm{A} + {}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{QDQ}^{-1}$.
   6.4) En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $\operatorname{Spec}(f + f^\star) \in \mathbf{R}^+$.
7. Dorénavant, A et B désigne les deux matrices ci-dessous appartement à $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$:
   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   7.1) Démontrer que f canoniquement associé à A vérifie (P) si et seulement si g, l'endomorphisme canoniquement associé à B, vérifie (P).
   7.2) Justifier que g n'est pas diagonalisable.
   7.3) Calculer $\operatorname{Rg}(\mathrm{A} - \mathrm{I})$ et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et $n + 1$. Que peut-on en conclure ?
8. **(Prenons les x_i aléatoires)** Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une famille de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre un.
   8.1) Démontrer que la matrice A définie en question précédente est la matrice dont le coefficient en i-ième ligne et j-ème colonne vaut $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\right)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   8.2) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que : $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x | f(x)\rangle = \mathbf{E}\left((\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{X}_i)^2\right)$, où f dédigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

8.3) Retrouver que f vérifie (P), où f dédigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

2.4. Algèbre linéaire numérique

L'algèbre linéaire numérique est un grand classique des sujets de Modélisation. Voici un rappel des principales fonctions/méthodes à connaître, toutes font appel au module numpy.

Rappels sur les manipulations de matrices en Python

```
>>> import numpy as np
>>> # Création
>>> A = np.array([[1,2,3], [4,5,6]])
>>> B = np.array([[2,3,4], [5,6,7]])
>>> # dans certains sujets le module matrix subsiste, il est
 ↪ désormais obsolète et ne devrait plus être utilisé dans les
 ↪ sujets à venir
>>> type(A)
<class 'numpy.ndarray'>
>>> #on accède aux éléments comme on le ferait avec des listes de
 ↪ listes classiques
>>> A[1][2]
6
>>> #Mais on peut aussi utiliser une notation plus « mathématique
 ↪ » et se passer des doubles crochets
>>> A[1, 2]
6
>>> # Récupérer le format d'une matrice
>>> n,p = A.shape
>>> #Extraction : fonctionnement identique aux listes. Les :
 ↪ signifient que l'on impose aucune condition sur la position où
 ↪ il est placé (ici, cela signifie « peu importe la ligne »,
 ↪ donc on renvoie une colonne)
>>> A[:, 2]
array([3, 6])
>>> #Somme
>>> C = A + B
>>> C
array([[ 3,  5,  7],
       [ 9, 11, 13]])
>>> #Transposition
>>> C.transpose()
array([[ 3,  9],
       [ 5, 11],
       [ 7, 13]])
>>> # Ou encore
>>> A@(B.transpose())
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>>
>>> #Produit
>>> np.dot(A, B.transpose())
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>>
>>> #Matrices usuelles
>>> np.zeros((1, 4))
array([[0., 0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2, 1)) #Attention : des tuples sont requis pour ces
 ↪ deux fonctions
array([[1.],
       [1.]])
>>> np.eye(3, 3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> #Mais cela fonctionne aussi :
```

```
>>> np.eye(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> # Éléments propres
>>> T = np.array([[1, 1], [0, 2]])
>>> np.linalg.eig(T) #produit un tuple dont la première coordonnée
↪ est la liste de valeurs propres, la seconde la une liste de
↪ vecteurs propres
(array([1., 2.]), array([[1.        , 0.70710678],
       [0.        , 0.70710678]]))
>>> np.linalg.eig(T)[0] # liste des valeurs propres
array([1., 2.])
```

Problème 1.3 | **Agro/Véto 2015 – Modélisation – Méthode des puissances pour l'approximation d'éléments propres** (Solution : 52) On souhaite dans ce problème écrire un programme permettant de calculer, sous certaines conditions, un vecteur propre d'une matrice. Chaque programme devra être commenté par une phrase détaillant le raisonnement qui a conduit à son élaboration. Des rappels sur le module numpy sont proposés à la fin du sujet. Notons $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$. Pour $M \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, on appelle *norme* de M la quantité $\|M\|$ définie par :

$$\|M\| = \max_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} \left|m_{i,j}\right|.$$

1. Quel est le signe de $\|M\|$? Quand avons-nous $\|M\| = 0$?
2. Montrer que pour tout $(M,N) \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbf{R})$,

$$\|M+N\| \leqslant \|M\| + \|N\|.$$

3. Écrire une fonction d'en-tête `Norme(M)` qui étant donnée une matrice M de taille quelconque, calcule et renvoie $\|M\|$. *On ne devra pas utiliser de fonction déjà existante.*
4. Écrire une fonction `Normalise(v)` qui étant donné $v \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ non nul renvoie $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$. On se donne à présent une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbf{R})$ et $v_0 \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$. En supposant qu'aucun des vecteurs $A^k v_0$ ($k \in \mathbf{N}$) ne soit dans $\operatorname{Ker} A$, on peut former une suite (v_n) à valeurs dans $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ définie par :

$$v_{n+1} = \frac{Av_n}{\|Av_n\|}.$$

5. Écrire une fonction d'en-tête `simu_v0(p)` qui prend en argument un entier p, et retournant une matrice colonne de format $p\times 1$, sous forme de tableau numpy, contenant des réels choisis uniformément dans $[0,1]$. *On rappelle que la fonction* `rd.random` *du module* `random` *importée avec le préfixe* `rd` *retourne un réel uniformément sur* $[0,1]$.
6. Écrire une fonction `PuissanceIteree(A, n)` qui étant donnée une matrice carrée A et un entier n, détermine la taille p de A, choisit aléatoirement $v_0 \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ en utilisant la question précédente, puis calcule et renvoie, en supposant que tous les termes de la suite ci-dessus sont bien définis, la matrice colonne v_n.

On peut montrer que si $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbf{R})$ est diagonalisable, et possède $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ comme valeurs propres avec

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_p|$$

alors la suite (v_n) ci-dessus existe et ses composantes convergent vers les composantes d'un vecteur propre de norme 1 de A associé à la valeur propre λ_1 sauf pour quelques choix de v_0. On peut aussi montrer que la probabilité, en choisissant aléatoirement v_0, de tomber sur l'une des exceptions est nulle.

7. On se propose d'écrire maintenant une fonction `VecteurPropre(A, e)` qui étant donnée une matrice carrée A satisfaisant les hypothèses précédentes et un réel $e > 0$ calcule les termes de la suite (v_n) jusqu'à ce que deux termes successifs vérifient

$$\|v_{n+1} - v_n\| < e,$$

et renvoie alors la matrice colonne v_{n+1}. On suppose dans cette question que les déclarations *a priori* `import numpy as np` et `import random as rd` ont été effectuées.

7.1) Que fait la commande `v = np.array([[rd.random()] for _ in range(10)])` ? Expliquer.

7.2) Voici trois propositions de programmes.

- **Programme A**

```python
def VecteurPropre(A, e):
    d = A.shape
    v = np.array([[rd.random()] for _ in range(d[0])])
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    while Norme(v - w) >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w
```

- **Programme B**

```python
def VecteurPropre(A, e):
    d = A.shape
    v = np.array([[rd.random()] for _ in range(d[0])])
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    ecart = Norme(v - w)
    while ecart >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w
```

- **Programme C**

```python
def VecteurPropre(A, e):
    d = A.shape
    v = np.array([[rd.random()] for _ in range(d[0])])
    v = Normalise(v)
    while Norme(v - Normalise(A*v)) >= e:
        v = Normalise(A*v)
    return Normalise(A*v)
```

Parmi ces trois programmes, indiquer lesquel(s) vous semblent correct(s). Pour chaque programme incorrect on précisera clairement pourquoi en une phrase.

Rappels sur les manipulations de matrices en Python

```python
>>> import numpy as np
>>>
>>> # Création de matrices
>>> A = np.array([[1,2,3], [4,5,6]])
>>> B = np.array([[2,3,4], [5,6,7]])
>>>
>>> A[1][2]
6
>>> A[1, 2]
6
>>>
>>> n,p = A.shape
>>>
>>> #Produit
>>> np.dot(A, B.transpose())
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>>
>>> #Matrices usuelles
>>> np.zeros((1, 4))
array([[0., 0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2, 1))
array([[1.],
       [1.]])
>>> np.eye(3, 3)
array([[1., 0., 0.],
```

```
        [0., 1., 0.],
        [0., 0., 1.]])
>>> np.eye(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

3. ANALYSE

3.1. Autour de la dynamique des populations

Problème 1.4 | (Solution : 53) Ce problème consiste en l'étude de modèles d'évolution de populations, notamment celui proposé par Pierre-François VERHULST. Il tient compte de la surabondance de la population par rapport aux ressources disponibles contrairement à la croissance exponentielle développée par Malthus. L'objectif est de comparer plusieurs types de modèles ; un modèle discret dont l'objet mathématique sous-jacent est la notion de suite numérique, un modèle continu qui quant à lui fera appel aux équations différentielles. Enfin, nous terminerons par un modèle faisant appel aux équations aux dérivées partielles, *i.e.* on supposera la population *structurée en âge*, alors que dans les deux premiers nous ne tiendrons pas compte des âges des individus.

PARTIE I — MODÈLE DISCRET NON STRUCTURÉ EN ÂGE

1. **(Question préliminaire)** Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit φ une application croissante de I dans I. On pose

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

1.1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

1.2) Montrer que la suite (u_n) est monotone. Dans la suite, on étudie le modèle de

VERHULST. Considérons une population d'individus, on note u_n le nombre d'individus de cette population à l'instant $n \in \mathbf{N}$. Ainsi u_0 est le nombre d'individus à l'instant initial. Dans le modèle de VERHULST, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = -au_n^2 + \frac{3}{2}u_n, \quad a > 0.$$

2. On note φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi(x) = -ax^2 + \frac{3}{2}x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Déterminer le signe de $\varphi(x) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On notera dans la suite M l'unique réel strictement positif vérifiant $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.
3. On suppose dans cette question que $0 < u_0 < \mathrm{M}$.
   - **3.1)** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 < u_n < \mathrm{M}$.
   - **3.2)** Montrer que la suite (u_n) converge.
   - **3.3)** Déterminer la limite de (u_n).
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{M} < u_0 < \frac{3}{2}\mathrm{M}$.
   - **4.1)** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{M} < u_n < \frac{3}{2}\mathrm{M}$.
   - **4.2)** Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

PARTIE II — MODÈLE CONTINU NON STRUCTURÉ EN ÂGE On étudie de nouveau une population d'individus. On note $\mathrm{N}(t)$ le nombre d'individus dans la population à l'instant t avec $t \in \mathbf{R}^+$. On pose $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}(0)$ la taille de la population à l'instant initial et on suppose que $\mathrm{N}_0 > 0$. Dans le modèle de Verhulst, N est solution sur $\mathbf{R}^+$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \quad y' = \frac{1}{2}y(1-2ay), \quad a > 0.$$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(t) = \mathrm{N}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$.
   - **5.1)** Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_2) \quad y' = -a\mathrm{N}(t)y$ sur $\mathbf{R}^+$.
   - **5.2)** En déduire qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbf{R}^+$ et un réel $\mathrm{K} > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\quad f(t) = \mathrm{K}e^{g(t)}$.
   - **5.3)** Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $h = \frac{1}{\mathrm{N}}$.

i) Justifier que la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^+$.
ii) Montrer que h est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_3) \quad y' = -\frac{1}{2}y + a \quad \text{sur } \mathbf{R}^+.$$

iii) Résoudre (E_3) sur $\mathbf{R}^+$.
iv) En déduire que la fonction N est définie pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ par :

$$\mathrm{N}(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mathrm{N}_0} - 2a\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 2a}.$$

5.4) **i)** Déterminer $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \mathrm{N}(t)$.
ii) Étudier les variations de la fonction N sur $\mathbf{R}^+$. <u>*Indication :*</u> *On pourra distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur de* N_0.

5.5) On suppose désormais que $0 < \mathrm{N}_0 < \frac{1}{4a}$. Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $\mathbf{R}^+$ tel que $\mathrm{N}''(t_0) = 0$.

5.6) Verhulst considérait que la date à laquelle la croissance de la population commence à ralentir correspond au moment où la taille de la population atteint la moitié de sa valeur limite. En considérant t_0 et $\mathrm{N}(t_0)$, justifier l'affirmation de Verhulst.

5.7) **(Étude du temps de « demi-évolution »)**
i) Montrer que : $\mathrm{e}^{\frac{t_0}{2}} = \frac{1}{2a\mathrm{N}_0} - 1$.
ii) Déterminer une primitive de N sur $\mathbf{R}^+$.
iii) Montrer que dans le modèle de Verhulst, la valeur moyenne de la taille de la population sur la période s'étendant de l'instant initial à $2t_0$ est égale à la moitié de la valeur limite de la population. *On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Dans tous les modèles présentés *supra*, nous ne tenons pas compte de l'âge des individus. En effet, l'âge de chaque individu a une influence sur sa reproduction et il est donc nécessaire d'en tenir compte. C'est ce que nous faisons dans ce qui suit.

Partie III — Modèle discret structuré en âge Dans une population, tous les individus n'ont pas le même potentiel de reproduction, ni la même probabilité de survie d'une année à l'autre. De même, l'âge est un facteur important. Nous choisissons alors une unité de temps $u \in \mathbf{R}^+$ et nous décidons de découper la population en tranches (d'âge seulement, rassurez-vous!), plus précisément p classes d'âges de même amplitude (à l'exception de la dernière classe), $p \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$. Une classe d'âge C_i avec $i \in [\![1, p-1]\!]$ est donc caractérisée par la donnée d'un âge minimum $(i-1)u$ et la donnée d'un âge maximum iu. La classe d'âge C_p est caractérisée par la seule donnée d'un âge minimum $(p-1)u$, l'âge maximal de la population est quant à lui noté $a_\dagger > 0$. Par exemple, dans le cadre d'une population d'êtres humains, on peut choisir une unité de temps u de 15 années et nous pouvons découper la population en 5 classes d'âge ($p = 5$). La classe C_1 inclut les êtres humains d'âge compris entre 0 et 14 ans, la classe C_2 les êtres humains d'age compris entre 15 et 29 ans, la classe C_3 entre 30 et 44 ans, le classe C_4 les êtres humains entre 45 et 59 ans, le classe C_5 les êtres humains âgés d'au moins 60 ans. Pour $s \in \mathbf{N}$, nous décidons de représenter la population après s unités de temps par la matrice $\mathrm{N}_s \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ définie par :

$$\mathrm{N}_s = \begin{pmatrix} n_{s,1} \\ n_{s,2} \\ \vdots \\ n_{s,p} \end{pmatrix},$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $n_{s,i}$ désigne l'effectif de la i-ème classe d'âge de la population au début de la s-ème unité de temps. La constante N_0 représente donc l'état initial de la population, N_1 la population après une unité de temps, N_2 après deux unités *etc.*

5.8) Pour $s \in \mathbf{N}$, exprimer l'effectif total de la population après s unités de temps. On le notera n_s dans la suite. L'évolution de la population sur une unité de

temps est déterminée par deux constantes :
- Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i désigne le nombre de naissances par unité de temps pour un individu de la i-ème classe d'âge. Les nouveaux nés alimentent alors la première classe d'âge.
- Pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, P_i désigne la probabilité de survie pour un individu entre la classe d'âge C_i et la classe d'âge C_{i+1}. On note P_p la

probabilité de survie au sein de la p-ième et dernière classe d'âge. Les survivants restent alors au sein de cette classe d'âge.

5.9) (Un premier exemple pour $p = 2$) Considérons par exemple une population de souris femelles sachant que chacune de ces souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie, et à 8 femelles pendant sa deuxième année ; la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de deux ans strictement. Dans ce contexte il y a donc deux classes d'âge : les juvéniles âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un an et deux ans. Dans cet exemple, nous prendrons comme données initiales $n_{0,1} = 20$, $n_{0,2} = 0$.

i) Préciser les quantités P_1, P_2, F_1, F_2 dans ce contexte.

ii) Justifier à l'aide de l'énoncé que :

$$\begin{cases} n_{s+1,1} = n_{s,1} + 8n_{s,2} \\ n_{s+1,2} = 0,25n_{s,1}, \end{cases} \quad \forall s \in \mathbf{N}.$$

iii) En déduire l'existence d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ telle que : $N_{s+1} = AN_s$ pour tout $s \in \mathbf{N}$. On l'appellera dans la suite *la matrice de* LESLIE *du modèle.*

iv) On suppose connu le tableau des valeurs ci-dessous.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_{s,1}$	20	20	60	100	220	420	860	1700	3420	6820	13660
$n_{s,2}$	0	5	5	15	25	55	105	215	425	855	1705
n_s	20	25	65	115	245	475	965	1915	3845	7675	15365
$\frac{n_{s,1}}{n_s}$	1	0,8	0,92	0,87	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89
$\frac{n_{s,2}}{n_s}$	0	0,2	0,07	0,13	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
$\frac{n_{s+1}}{n_s}$	1,25	2,6	1,77	2,13	1,94	2,03	1,98	2,01	1,99	2	−−

Que conjecturer sur les proportions d'adultes et de juvéniles en temps long ?

v) Diagonaliser la matrice de LESLIE A, *i.e.* chercher une matrice $P \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ inversible, et une matrice de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ telle que $A = PDP^{-1}$.

vi) Montrer que pour tout $s \in \mathbf{N}$, $N_s = A^s N_0$.

vii) En déduire que pour tout $s \in \mathbf{N}$:

$$n_{s,1} = \frac{40}{3} \times 2^s + \frac{20}{3} \times (-1)^s, \quad n_{s,2} = \frac{5}{3} \times \left(2^s - (-1)^s\right), \quad n_s = 15 \times 2^s + 5 \times (-1)^s.$$

Est-ce cohérent avec les résultats de la question 5.9.iv ?

viii) (Ajustement de modèle) On suppose que des considérations biologiques nous amènent à considérer le modèle ci-dessous

$$\begin{cases} n_{s+1,1} = n_{s,1} + K_1 n_{s,2}, \\ n_{s+1,2} = K_2 n_{s,1}, \end{cases} \quad \forall s \in \mathbf{N}$$

avec $K_1, K_2 \in \mathbf{R}$ deux constantes supposées inconnues dans cette question. Expliquer comment, à partir du tableau de la question 5.9.iv, retrouver une valeur approchée de K_1 et K_2.

5.10) (Cas général) On revient ici au cas général (*i.e.* celui d'un nombre de tranches quelconque). Soit $s \in \mathbf{N}$.

i) Exprimer $n_{s+1,1}$ en fonction de $n_{s,1}, n_{s,2}, \dots, n_{s,p}$ et de $F_1, F_2, \dots, F_p$. Dans notre modèle, on suppose que les effectifs sont suffisamment

importants, et on fera les approximations $n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant p-1$ et $n_{s+1,p} = n_{s,p-1} \times P_{p-1} + n_{s,p} \times P_p$.

ii) Quel théorème justifie l'approximation $n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$ (pour $2 \leq i \leq p-1$), dans ce cas où la population est grande ? Expliquer.

iii) Proposer une matrice $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$, telle que : $N_{s+1} = AN_s$. Dans la suite on l'appellera la *matrice de* LESLIE du modèle. De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes ; son usage est évidemment facilité par l'emploi d'ordinateurs qui sont capables de calculer des valeurs et vecteurs propres de la matrice de LESLIE.

5.11) (Un second exemple pour $p = 3$) Nous considérons une population de drosophiles, la durée de vie d'une drosophile est inférieure à 30 jours. Nous choisissons une unité de temps u de 10 jours et nous découpons la population en 3 classes d'âge. Après étude statistique, nous estimons que :

$$F_1 = 0, F_2 = 13, \quad F_3 = 12, \quad P_1 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{1}{2}, \quad P_3 = 0.$$

i) Montrer que pour tout $s \in \mathbf{N}$, $\quad N_{s+1} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} N_s$. Dans la suite, on note $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. On justifie de la même manière que précédemment, que pour tout $s \in \mathbf{N}$, $\quad N_s = A^s N_0$.

ii) **(Réduction de la matrice** A**)**

I. Démontrer que A possède comme valeurs propres les réels $2, -\frac{1}{2}$ et déterminer la troisième valeur propre de A. On notera les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que : $\quad \lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

II. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A. Pour tout $i \in [\![1\,,3]\!]$, V_i désigne une matrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont l'élément situé en troisième ligne est égal à 1, et appartenant au sous-espace propre de la matrice A associée à la valeur propre λ_i. Montrer que la famille $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

5.12) **(Comportement asymptotique de la population)** Notons (c_1, c_2, c_3) les composantes de N_0 dans la base $\mathcal{V}$.

i) Montrer que : $\quad \forall s \in \mathbf{N}, \quad N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s c_3 V_3$.

ii) En déduire que pour tout $s \in \mathbf{N}$, on peut écrire

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s),$$

où tous les coefficients de la matrice ε_s ont pour limite 0 quand $s \longrightarrow \infty$.

iii) Montrer que les rapports $\frac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\frac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque $s \longrightarrow \infty$ et là calculer. Ces limites indépendantes notamment de N_0 montrent que la répartition de la population tend vers une répartition constante et indépendante de la population initiale.

Partie IV — Modèle continu structuré en âge Il est possible de tenir compte du fait que la mort (ou la reproduction) d'un individu d'une population peut survenir à n'importe quel âge a et pas seulement le long d'une suite discrète de points $a_i = iu$ pour $i \in [\![1\,,\,p]\!]$. Le modèle précédent devient alors insuffisant pour tenir compte de ce fait. On considère donc dans cette dernière partie une population où chaque individu possède un âge, généralement noté a, dans un intervalle $[0, a_\dagger]$, on notera $n_{s,[a_1,a_2]}$ le nombre d'individus au temps s dans la tranche d'âge $[a_1, a_2]$ avec $(a_1, a_2) \in [0, a_\dagger]^2$, et $n_{s,\leq a}$ le nombre d'individus d'âge inférieur à a, on suppose que pour tout $s \geq 0$, la fonction $a \in [0, a_\dagger] \longmapsto n_{s,\leq a}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose également que $n_{s,\leqslant 0} = 0$[3].

6. Justifier l'existence d'une fonction $f : \mathbf{R}^+ \times [0, a_\dagger] \longrightarrow \mathbf{R}^+$ telle que pour tout $s \in \mathbf{R}^+$ et $a \in [0, a_\dagger]$: $\quad n_{s,\leq a} = \displaystyle\int_0^a f(s,b)\,\mathrm{d}b$. On appellera dans la suite cette fonction la *densité de population au temps* t.

7. Soient $a_1, a_2 \in [0, a_\dagger]$. Montrer que le nombre d'individus au temps s d'âge compris entre a_1 et a_2 est : $\quad n_{s,[a_1,a_2]} = \displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(s,b)\,\mathrm{d}b$.

On dit qu'une densité de population f est solution du modèle de McKendrick-Von Foerster si les conditions suivantes sont satisfaites : il existe $F, M : [0, a^\dagger] \longrightarrow \mathbf{R}^+$ deux fonctions positives et de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial a}(t,a) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,a) + M(a) f(t,a) & = & 0, \\ f(t,0) & = & \displaystyle\int_0^{a_\dagger} F(a) f(t,a)\,\mathrm{d}a. \quad (\star) \end{array} \right.$$

On notera dans la suite $\Phi(a) = f(0,a)$ pour tout $a \in [0, a_\dagger]$. Chaque équation peut être interprétée et obtenue à l'aide d'un raisonnement heuristique que nous ne détaillerons pas ici.

8. Que représente la quantité $f(0,t)$? Expliquer alors la terminologie « taux de reproduction » pour la fonction F. Vous pouvez éventuellement argumenter à l'aide de la méthode des rectangles appliquée à l'intégrale.

9. À quelle autre équation, rencontrée dans le modèle discret structuré en âge, l'équation $(\star)$ est-elle analogue ?

10. **(Résolution le long des caractéristiques)** Pour terminer, on désire chercher les solutions de la forme $(t,a) \longrightarrow f(t, c+t)$ avec $c \leqslant a_\dagger$. On pose $g(t) = f(t, c+t)$ pour tout $t \in [0, a_\dagger - c]$.

10.1) Montrer que : $\quad \forall t \in [0, a_\dagger - c], \quad g'(t) = -M(t+c) g(t)$.

[3]Cette hypothèse n'est pas surprenante : la quantité correspond au nombre d'individus d'âge nul

10.2) En déduire que pour tout $t \in [0, a_\dagger - c]$, $\quad g(t) = \Phi(c)\exp\left(-\int_0^t \mathrm{M}(s+c)\,\mathrm{d}s\right)$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Φ pour que $f(t, t+c) = 0$ pour tout $t \in [0, a_\dagger - c]$.

3.2. Intégrales à paramètres

L'intégrale ci-dessous est une intégrale dite *à paramètre* (*i.e.* une variable d'intégration et une variable complètement annexe).

Exercice 1.6 | Fonction B (« Bêta ») (Solution : 61) Soit B la fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$ (sous réserve d'existence) par : $\quad \mathrm{B} : (x,y) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que les deux intégrales ci-dessous sont de même nature et égales en cas de convergence :
$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0, \quad y > 0$.
4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{+,\star}$. Posons pour $x \in \mathbf{R}$:
$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$
Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est une densité de probabilité. Une variable aléatoire possédant $f_{\alpha,\beta}$ admet-elle une espérance ? Si oui, l'exprimer en fonction de B.

3.3. Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1.7 | (Solution : 62) Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x,y) \longmapsto \arctan(2x+y)$.

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles secondes.

Exercice 1.8 | (Solution : 62) On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante en $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Déterminer les fonctions $\mathrm{F} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fois dérivables telles que : $\quad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v^2}(u,v) = 0$.
2. On notera dans la suite par $\quad \varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-2y) \end{array}\right.$. On définit une fonction $\mathrm{F} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ par $\mathrm{F}(\varphi(x,y)) = f(x,y)$ puisque φ est bijective.
   2.1) Calculer les dérivées partielles de f notées $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(\varphi(x,y))$ et $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(\varphi(x,y))$ de F. Faire de-même pour les dérivées partielles secondes.
   2.2) En déduire les solutions de l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

4. PROBABILITÉS & STATISTIQUES

Exercice 1.9 | A–ENV 2019 (Solution : 63) On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on notera F_n l'événement « au n-ème lancer on obtient un face ». On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

1. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{T} > n)$.
3. Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^*$. Comparer $\mathbf{P}(\mathrm{T} > n+m | \mathrm{T} > n)$ et $\mathbf{P}(\mathrm{T} > m)$ et donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc $\mathrm{S} \geqslant 2$ et S est égal à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $p_n = \mathbf{P}(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

4. Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4.
5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer la probabilité de l'événement $\{S > n\}$ en fonction de q_n.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $q_n \in [0, 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = q_n/8$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$.
8. En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et en donner une interprétation.
On dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3. Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

9. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.
10. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
11. Justifier qu'il existe des réels A et B tels que :

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 &= q_1, \\ Ar_1^2 + Br_2^2 &= q_2. \end{cases}$$

12. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
13. Donner un équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$. *Cet équivalent pourra faire intervenir a,* B, *r_1, r_2 et n.*

Problème 1.5 | G2E 2020 – Autour de la loi binomiale négative (Solution : 63) Dans la partie I, on étudie deux premières variables aléatoires réelles. Cette étude, généralisée en partie II, permet de montrer que les variables aléatoires étudiées suivent toutes la même loi. Enfin, en partie III, on établit des liens entre cette loi, la loi binomiale et la loi normale.

Ces trois parties ne sont pas indépendantes.

Dans tout le problème k désigne une entier naturel, n un entier naturel non nul et p un réel appartenant à $]0, 1[$. On note enfin $q = 1 - p$.

Partie I — Autour de la loi géométrique Une équipe de géologues travaille en zone sismique et installe un sismomètre au sommet d'un volcan. Chaque jour, si ce sismomètre détecte une onde sismique, ce dernier envoie une alerte par satellite à un camp de base situé au pied du volcan.

On note X_1 la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant une première alerte, par exemple si cette première alerte survient au troisième jour après l'installation du sismomètre alors X_1 prend la valeur 2.

On admet que ce sismomètre envoie au plus une alerte par jour, et que la probabilité que survienne une alerte est constante et égale à p, indépendante des résultats obtenus les jours précédents.

1. **1.1)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_1 noté $X_1(\Omega)$, et pour tout $k \in X_1(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(X_1 = k)$.
1.2) En déduire que $1 + X_1$ suit la loi géométrique de paramètre p ce qu'on notera dorénavant $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p)$.
2. Ce sismomètre étant extrêmement sensible, les géologues décident de mener des analyses complémentaires à partir d'une seconde alerte. Aussi on note X_2 la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant cette seconde alerte, depuis l'installation du sismomètre. Par exemple, si une première alerte survient au troisième jour après l'installation de ce sismomètre et une seconde au septième jour alors X_2 prend la valeur 5.
2.1) Pour tout $(j, k) \in \mathbf{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(X_2 = k \middle| X_1 = j)$.
2.2) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X_2 = k) = (k+1)q^k p^2.$$

Partie II — Généralisation de la situation précédente On généralise l'étude précédente et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant une n-ième alerte.

3. **3.1)** Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j}.$$

3.2) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n.$$

On le notera dorénavant $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p)$.

4. Soit $\left(X_1^{(i)}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que :

$$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p).$$

On cherche à démontrer par récurrence sur n que :

$$\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p).$$

4.1) Vérifier que le résultat est vrai pour $n = 1$ et après avoir posé l'hypothèse de récurrence, justifier que $\sum_{k=1}^{n} X_1^{(k)}$ et $X_1^{(n+1)}$ sont indépendantes.

4.2) Conclure.

4.3) Si X_n et X_m (avec $m \in \mathbf{N}^*$) sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p)$ et $X_m \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(m,p)$, que dire (sans démonstration) de $X_n + X_m$?

Partie III — Une loi binomiale et une loi normale

5. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on note Y_m la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours avec alerte pendant les m premiers jours.

5.1) Justifier que Y_{n+k} suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5.2) Démontrer que les événements $\{X_n > k\}$ et $\{Y_{n+k} < n\}$ sont égaux.

6. Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et Z_n une variable aléatoire réelle suivant une loi normale de paramètres la moyenne de X_n et la variance de X_n.

6.1) Justifier que :

$$Z_n \hookrightarrow \mathscr{N}\left(\frac{nq}{p}, \frac{nq}{p^2}\right)$$

6.2) Énoncer précisément le théorème central limite et en déduire que les deux suites ci-dessous convergent vers une même limite ℓ qu'on donnera sous forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer :

$$\left(\mathbf{P}\left(a < \frac{\frac{X_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}, \quad \left(\mathbf{P}\left(a < \frac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}.$$

Problème 1.6 | G2E 2018 (Solution : 67) Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une somme ayant un ensemble d'indice vide est nulle. Dans la partie I, on considère deux fonctions réelles de deux variables réelles à partir desquelles on construit une fonction réelle d'une seule variable réelle dont on cherche par deux méthodes la limite en $\frac{1}{2}$. Cette dernière fonction est réutilisée dans la partie II où on étudie trois variables aléatoires. On calcule en particulier les espérances de deux d'entre elles. Enfin, dans la partie III, on s'intéresse à des probabilités de victoires dans deux jeux de hasard. Ces trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie I — Étude de trois fonctions

On considère la fonction f_k définie par :

$$\forall (x,y) \in\,]0,1[^2, \quad f_k(x,y) = x^k y - x y^k.$$

De plus, g_k et φ_k désignent les fonctions définies sur leur ensemble de définition par :

$$g_k(x,y) = \frac{f_k(x,y)}{x-y}, \quad \varphi_k(x) = g_k(x, 1-x).$$

1. Représenter à l'aide d'un schéma l'ensemble l'ensemble de définition de g_k noté $\mathscr{D}_1$ puis déterminer l'ensemble de définition de φ_k noté $\mathscr{D}_2$.

2. Dans cette question, on cherche par deux méthodes la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.

2.1) Calculer les dérivées partielles de f_k en tout $(x,y) \in\,]0,1[^2$ (on admet que f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[^2$) et en déduire le nombre dérivé de $x \mapsto f_k(x, 1-x)$ en $\frac{1}{2}$.

2.2) En déduire que :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}.$$

2.3) Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_1, \quad g_k(x,y) = xy \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}.$$

2.4) Retrouver alors la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que φ_k est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$. Dorénavant, on confond φ_k avec son prolongement par continuité.

4. Soit $x \in]0,1[$.

4.1) Calculer $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)$.

4.2) Démontrer que $x(1-x)^{k-1} \leqslant \varphi_k(x)$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$.

4.3) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x).$$

4.4) En déduire le sens de variation de la suite $(\varphi_k(x))_{k\in\mathbf{N}^\star}$.

4.5) Justifier que la série de terme général $\varphi_k(x)$ est convergente puis que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x) = 1.$$

Partie II — Trois variables aléatoires réelles Soit une pièce de monnaie pouvant tomber sur pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et sur face avec la probabilité $1-p$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer indéfiniment cette pièce. Ces lancers sont supposés mutuellement indépendants. En notant simplement p pour pile et f pour face, on obtient ainsi une suite à valeurs dans $\{\mathrm{p},\mathrm{f}\}$. Par exemple :

f f p p p f f p p f ...

Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, on note enfin p_k l'événement « p apparaît au k-ème lancer » et f_k l'événement « f apparaît au k-ième lancer ».

5. On note $\mathrm{T_p}$ le numéro du lancer où apparaît « pile » pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a $\mathrm{T} = 3$) et $\mathrm{T_{fp}}$ le numéro du lancer où apparait le motif « face pile » pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a également $\mathrm{T_{fp}} = 3$).

5.1) Justifier que $\mathrm{T_p}$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

5.2) Justifier que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $\quad \mathbf{P}\left(\mathrm{T_{fp}} = k+1 \middle| \mathrm{f_1}\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{T_p} = k\right)$.

5.3) À l'aide de la famille d'événements $(\mathrm{p_1}, \mathrm{f_1})$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(\mathrm{T_{fp}} = k+1\right) = p(1-p)^k + p\mathbf{P}\left(\mathrm{T_{fp}} = k\right).$$

5.4) La notation φ_k désignant la fonction introduite dans la partie précédente, en déduire que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(\mathrm{T_{fp}} = k\right) = \varphi_k(p).$$

6. **6.1)** Justifier qu'il est presque certain que le motif « face pile » apparaisse lors de l'expérience.

6.2) En distinguant le cas $p = \frac{1}{2}$ et $p \neq \frac{1}{2}$, démontrer que :

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{T_{fp}}\right) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

7. On note $\mathrm{T_{pp}}$ le numéro du lancer où apparait le motif « pile pile » pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a $\mathrm{T_{pp}} = 4$).

7.1) À l'aide de la famille d'événements $(\mathrm{f_1}, \mathrm{p_1} \cap \mathrm{p_2}, \mathrm{p_1} \cap \mathrm{f_2})$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = k+2\right) = (1-p)\mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = k+1\right) + p(1-p)\mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = k\right).$$

7.2) Démontrer que le polynôme $\mathrm{X}^2 - (1-p)\mathrm{X} - p(1-p)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 appartenant à $]-1,1[$, puis exprimer $r_1 + r_2, r_1 r_2$ en fonction de p.

7.3) Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = k\right) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

7.4) Calculer $\mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = 1\right)$ et $\mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = 2\right)$ et en déduire que $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0, \quad \lambda + \mu = \frac{p}{1-p}$ et $\lambda r_2 + \mu r_1 = p$.

8. **8.1)** On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\mathrm{T_{pp}} = k\right) = 1$. Que peut-on en conclure ?

8.2) Démontrer que :

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{T_{pp}}\right) = \frac{1+p}{p^2}.$$

Partie III — Deux jeux à pile ou face Alice, Bérénice et Candice décident de jouer à pile ou face en reproduisant l'expérience aléatoire décrite dans la partie précédente.

9. Dans un premier temps, Alice joue contre Bérénice. Alice gagne la partie si « pile » apparaît strictement avant le motif « face pile » et Bérénice gagne la partie si le motif « face pile » apparaît avant ou au même instant que « pile ». On note A l'événement « Alice gagne » et B l'événement « Bérénice gagne ».

- **9.1)** Calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.
- **9.2)** A quelle condition sur p, Bérénice a-t-elle une plus grande probabilité de victoire qu'Alice ?

10. Dans un second temps, Bérénice joue contre Candice. Bérénice gagne la partie si le motif « face pile » apparaît avant le motif « pile pile » et Candice gagne la partie si le motif « pile pile » apparaît avant le motif « face pile ». On note toujours B l'événement « Bérénice gagne » et C l'événement « Candice gagne ».

- **10.1)** Que peut-on dire de la famille d'événements (B, C) ?
- **10.2)** Démontrer que $\mathbf{P}(C) = p^2$ et en déduire à quelle condition sur p, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice.
- **10.3)** Est-il possible que la victoire de Bérénice soit plus probable que la victoire de Candice alors que le temps d'attente moyen du motif « face pile » est supérieur au temps d'attente moyen du motif « pile pile » ?

Chaînes de Markov Les chaînes de Markov sont des suites de variables aléatoires bien particulières : leur trajectoire future dépend uniquement de l'instant présent et pas du passé. Ces variables aléatoires peuvent être à valeurs entières, sur un graphe (voir le sujet Agro—Véto ci-dessous), sur un espace vectoriel, ou plus généralement sur un ensemble E. L'ensemble E est appelé *espace des états*.
Les chaînes de Markov sont des grands classiques dans les sujets d'écrits, mais également dans les planches d'oraux, dans la mesure où elles apparaissent dans un nombre important de contextes (marches aléatoires notamment). Pour cette raison, elles sont étudiées comme des objets à part entière.

Problème 1.7 | Agro—Véto 2018. Modèle de diffusion d'Ehrenfest (Solution : 74)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbf{N}^\star$. À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange. Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_1 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$Y_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad Y_{n,k} = \mathbf{P}(X_n = k).$$

Partie I — Matrice de transition

1. On suppose que $N = 2$.

- **1.1)** Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
- **1.2)** La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? La réponse sera justifiée.

Dans toute la suite $N \in \mathbf{N}^\star$ est fixé.

2. On considère la matrice $\mathrm{N} \in \mathbf{N}^{\star}$ est fixé :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est donc une matrice ne comportant que des termes non nuls sur la première sur-diagonale, et sur la première sous-diagonale.
Prouver que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_{n+1} = AY_n$.

3. Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$ l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^{\mathrm{T}}A$.
4. Prouver que, dans le cas général, la matrice ${}^{\mathrm{T}}A$ possède 1 comme valeur propre.
5. En déduire que la matrice ${}^{\mathrm{T}}(A - I_{N+1})$ est non inversible puis que la matrice A possède 1 comme valeur propre.

Partie II — Détermination de l'espérance de la variable X_n Dans la suite, $n \in \mathbf{N}$ est fixé.

6. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?
7. En déduire que : $\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbf{E}(X_n)$.
8. En déduire l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n et de $\mathbf{E}(X_0)$.
9. On suppose $N \geqslant 2$. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(X_n)$ lorsque n tend vers ∞, en donner une interprétation.

Partie III — Recherche d'une probabilité invariante On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

10. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Prouver que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $\quad x_k = \binom{N}{k} x_0$.
11. En déduire $\dim E_1$.
12. Calculer $\quad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.
13. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que : $\quad \sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$. On donnera son expression.
14. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!], \quad \forall k \in [\![0, N]\!], \quad \mathbf{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi de X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.

15. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞. Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.

Problème 1.8 | Calculs & Raisonnements 2021 (Solution : 79) Ce sujet a pour objectif l'étude de quelques propriétés mathématiques de modèles en génétique des populations : le modèle d'évolution de Wright-Fisher (partie I) et l'équilibre de Hardy-Weinberg (partie II). Ce dernier fait intervenir les lois du chi-deux qui seront étudiées en partie III.

Les trois parties sont indépendantes entre elles.

Partie I — Modèle d'évolution de Wright-Fisher Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0, 2N]\!]$ et on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, 2N]\!]$ vérifiant, pour tout entier n,

$$\forall (i,j) \in [\![0, 2N]\!]^2, \quad \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}.$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés A et a) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher, X_n représente le nombre d'allèles de type A à la génération n dans une population finie de taille N.

I — 1) Étude d'un cas particulier

On suppose ici que $N = 1$ et on note, pour tout entier n, $V_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n, on ait $V_{n+1} = MV_n$. *Une récurrence n'est pas nécessaire.*
2. Prouver que M est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.
3. Calculer M^n pour tout entier n.
4. En déduire que :
   4.1) pour tout entier n, on a $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_0)$,
   4.2) $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n \in \{0;2\}) = 1$.

I — 2) Cas général

On suppose désormais que $N \geqslant 1$. On cherche à généraliser les résultats de la question 4.

5. **5.1)** Soit $i \in [\![0\,,\,2N]\!]$. Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j\binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

   et en déduire sa valeur.
   5.2) En déduire que, pour tout entier n, on a $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X_n)$.
   5.3) Interpréter le résultat obtenu.
6. On considère la suite u de terme général $u_n = \mathbf{P}(X_n \in \{0;2N\})$.
   6.1) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![1, 2N-1]\!]$. Montrer que $\mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0;2N\} | X_n = k) \geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.
   6.2) En déduire que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.
   6.3) Soit α un réel appartenant à $]0,1[$. On considère la suite w définie par :

$$w_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad w_{n+1} = w_n + \alpha(1-w_n).$$

   Justifier que la suite w est convergente et donner sa limite.
   6.4) Conclure et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE II — ÉQUILIBRE DE HARDY-WEINBERG Soient p_1, p_2, p_3 trois réels strictement positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On considère N variables aléatoires $T_1, \dots, T_N$ indépendantes de même loi donnée par :

$$T_1(\Omega) = \{1,2,3\}, \quad \mathbf{P}(T_1 = 1) = p_1, \quad \mathbf{P}(T_1 = 2) = p_2, \quad \mathbf{P}(T_1 = 3) = p_3.$$

Cette suite permet de modéliser la répartition d'une population de N individus de type AA (type 1), aa (type 2) ou Aa (type 3) en fonction de leur génotype à un locus génétique donné. Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre d'individus de type i. On a donc $N_1 + N_2 + N_3 = N$.

7. Déterminer la loi de N_1.
8. Donner, sans justification, l'espérance et la variance de N_1.
9. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Exprimer la quantité

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(a \leqslant \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}} \leqslant b\right)$$

   sous forme d'une intégrale.
10. On considère la matrice $W = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(N_1) & \mathbf{Cov}(N_1,N_2) \\ \mathbf{Cov}(N_2,N_1) & \mathbf{Var}(N_2) \end{pmatrix}$.
    10.1) Justifier que W est une matrice diagonalisable.
    10.2) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Prouver que

$$\mathbf{V}(aN_1 + bN_2) = (a \quad b)W\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

    où l'on a identifié $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}$.
    10.3) En déduire que les valeurs propres de W sont positives.
    10.4) Prouver que les valeurs propres de W sont strictement positives.
    10.5) En déduire l'existence de deux matrices P et D appartenant à $\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, telles que :
    - D soit diagonale et inversible,
    - P soit inversible d'inverse ${}^{\mathbf{T}}P$,
    - $W = PD^2P^{-1}$.
11. On note $A = D^{-1}P^{-1}$ et on considère les variables aléatoires Y_1, Y_2 telles que :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix}.$$

    On admet que l'on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}(Y_1) & \mathbf{Cov}(Y_1,Y_2) \\ \mathbf{Cov}(Y_2,Y_1) & \mathbf{V}(Y_2) \end{pmatrix} = AW^{\mathbf{T}}A.$$

En déduire $\mathbf{V}(Y_1)$, $\mathbf{V}(Y_2)$ et $\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2)$.

12. **12.1)** Déterminer la variance de $N_1 + N_2$.

12.2) En déduire $\mathbf{Cov}(N_1, N_2)$ la covariance de N_1 et N_2.

12.3) Calculer l'inverse de W.

12.4) Déterminer ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{A}$ en fonction de W et en déduire que :

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{(N_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2 - Np_2)^2}{Np_2} + \frac{(N_3 - Np_3)^2}{Np_3}.$$

On pourrait prouver que, pour tout $(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$,

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \boldsymbol{P}\left(a \leqslant Y_1^2 + Y_2^2 \leqslant b\right) = \boldsymbol{P}\left(a \leqslant Z_1^2 + Z_2^2 \leqslant b\right)$$

où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite. Connaître la loi de $Z_1^2 + Z_2^2$ permettrait ainsi de tester la vraisemblance de ce modèle.

L'étude de cette loi est l'objet de la partie III.

Partie III — Étude de la loi limite On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

13. Prouver que Z^2 est une variable aléatoire de densité $f_{Z^2} : t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)$. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}$ est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ valant 1 sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et 0 ailleurs.

14. Déterminer l'espérance et la variance de Z^2.

15. On considère la fonction $h : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \mathrm{d}t$. On admet que h est correctement définie sur $\mathbf{R}_+^*$. Prouver que h est constante sur $\mathbf{R}_+^*$. On notera C cette constante. *On pourra utiliser le changement de variable $t = xu$.*

16. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.
On rappelle que, si deux variables aléatoires réelles U_1 et U_2 sont indépendantes de densité respectives f_{U_1} et f_{U_2}, alors $U_1 + U_2$ est une variable aléatoire de densité :

$$x \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1}(x-t) f_{U_2}(t) \mathrm{d}t.$$

16.1) Déterminer en fonction de C la loi de $Z_1^2 + Z_2^2$.

16.2) En déduire C puis l'espérance et la variance de $Z_1^2 + Z_2^2$.

Exercice 1.10 | **Inégalité de Chernoff pour une somme d'exponentielles** (Solution : 85) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On notera dans la suite $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ pour $x > 0$. On admet, ce n'est pas l'objet de l'exercice, que $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$, et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \geqslant 1$, et que $-\ln(U) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ si $U \hookrightarrow \mathscr{U}]0,1]$.

1. Écrire une fonction Python, d'en-tête `def simul_Y(n)`, qui permet de simuler la variable aléatoire Y_n.

2. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$, que Y_n admet pour densité :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_{Y_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t).$$

En déduire son espérance.

3. **3.1)** Pour tout réel strictement positif λ, montrer que $\varphi(\lambda) = \ln\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda(Y_n - \mathbf{E}(Y_n))}\right)\right) = n(\lambda - \ln(\lambda+1))$.

3.2) Montrer que $\forall \lambda > 0, \quad \varphi(\lambda) \leq \frac{n\lambda^2}{2}$.

4. **4.1)** Établir que pour tout réel λ strictement positif et tout réel x strictement positif, on a : $\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant e^{-\lambda x + \varphi(\lambda)}$.

4.2) Montrer que $\forall x > 0, \quad \mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant e^{-x^2/2n}$. *__Indication :__ On pourra chercher à trouver le meilleur paramètre λ possible....*

Problème 1.9 | **Agro—Véto 2018** (Solution : 87) Soit $c \in \mathbf{R}^{+\star}$. On considère une variable aléatoire réelle X de densité

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad t \longrightarrow \begin{cases} \frac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la fonction f : variations, limite en ∞, valeur du maximum. Tracer le graphe de la fonction f.

2. Vérifier que f est une densité de probabilité.

3. **3.1)** Rappeler, sans justification la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

3.2) En déduire que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

3.3) Prouver que la variable aléatoire X possède une espérance.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Prouver que si X^n possède une espérance, alors X^{n+2} possède une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}\left(X^{n+2}\right) = c^2(n+2)\mathbf{E}\left(X^n\right).$$

5. En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{E}\left(X^{2n}\right) = 2^n c^{2n} n!, \quad \mathbf{E}\left(X^{2n+1}\right) = \sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}.$$

6. **6.1)** Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

6.2) Déterminer $\mathbf{Var}(X)$.

6.3) En déduire $[\alpha, \beta]$ tel que $\mathbf{P}(X \in [\alpha, \beta]) \geqslant 99\%$.

7. Déterminer un réel positif γ tel que $\mathbf{P}(X \in [0, \gamma]) = 99\%$.

8. Comparer les intervalles obtenus aux questions précédentes. *On admettra que* $\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 10\sqrt{\frac{4-\pi}{2}} < 0$.

5. SOLUTIONS

Solution (exercice 1.1)

(Énoncé : 18)

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & -2 \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3-\lambda \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ -2-\lambda & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 0 & -8+(-2-\lambda) & -8+(-2-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 + (-2-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 9 & -\lambda^2+13 \\ 0 & -(10+\lambda) & \lambda^2-\lambda-14 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$=\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 9 & -\lambda^2+13 \\ 0 & 0 & 9(\lambda^2-\lambda-14)+(10+\lambda)(-\lambda^2+13) \end{pmatrix}. \qquad L_3 \leftarrow 9L_3 + (10+\lambda)L_2$$

En développant le polynôme obtenu et en simplifiant, on constate que -1 est racine évidente. En factorisant on trouve que $-2, 2$ sont également racines.

En conclusion, $\mathrm{Spec}(A) = \{-2, 2, 1\}$, donc puisque nous avons trois valeurs propres distinctes, la matrice A est bien diagonalisable. On obtient toujours après calculs une base propre qui convient, ici

$$\boxed{A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},} \quad D = \mathrm{Diag}(-2, 2, -1).$$

Par exemple, pour l'espace propre $E_{-1}(A)$, on cherche les $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tels que :

$$\begin{cases} -4x + \ y + \ 4z = 0 \\ \qquad 9y + 14z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4x + \ y + \ 4z = 0 \\ \qquad 9y + 14z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \qquad = -y \\ \qquad 3y = -4z \end{cases}.$$

L'ensemble de ces solutions est alors $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solution (exercice 1.2)

(Énoncé : 18) Notons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n - 2v_n - 2w_n, \\ v_{n+1} &= 4u_n - 2v_n - 4w_n, \\ w_{n+1} &= -4u_n + v_n + 3w_n, \end{cases}$$

est équivalent à

$$U_{n+1} = AU_n.$$

Montrons que $U_n = A^n U_0$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, alors $U_0 = I_3 U_0$, la propriété est donc initialisée.
- **Hérédité.** Supposons-là vraie au rang n. Alors $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

Elle est donc héréditaire et le résultat s'en suit :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_n = A^n U_0.$$

Pour calculer A^n, on réutilise la forme diagonalisée de A.

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Après méthode du pivot de Gauß, on trouve

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On montre là encore par récurrence que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$, d'où

$$\mathrm{A}^n == \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Après produits matriciels, on trouve

$$\boxed{\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n.2^n & -2.(-1)^n + 2.(-1)^n.2^n & -2.(-1)^n + 2.(-1)^n.2^n \\ -(-1)^n.2^n + 2^n & 4.(-1)^n - 2.(-1)^n.2^n - 2^n & 4.(-1)^n - 2.(-1)^n.2^n - 2.2^n \\ (-1)^n.2^n - 2^n & -3.(-1)^n + 2.(-1)^n.2^n + 2^n & -3.(-1)^n + 2.(-1)^n.2^n + 2.2^n \end{pmatrix}}.$$

On déduit ensuite les suites en fonction de n.

Solution (exercice 1.3)

(Énoncé : 19)

1. **1.1)** Le système se réécrit précisément : $\boxed{\mathrm{X}' = \mathrm{AX}.}$

   1.2) Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \text{ solution} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{X}' = \mathrm{AX} = (\mathrm{PY})' \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{X} = \mathrm{PDY} = \mathrm{PY}', \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{DY} = \mathrm{Y}' \text{ en simplifiant par P à gauche.} \end{aligned}$$

   Un point a été passé sous silence : $(\mathrm{PX})' = \mathrm{PX}'$. Comme P est une matrice qui ne dépend pas de la variable du système, on justifie sans peine la formule précédente.

   1.3) Nous avons donc à résoudre le système décorrèlé suivant : $\begin{cases} y_1' &= -2y_1 \\ y_2' &= 2y_2 \\ y_3' &= -y_3 \end{cases}.$

   Nous obtenons pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$y_1(x) = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{-2x}, \quad y_2(x) = \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{2x}, \quad y_3(x) = \mathrm{C}_3\mathrm{e}^{-x}, \quad \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3 \in \mathbf{R}.$$

2. On déduit alors l'ensemble des solutions.

Solution (exercice 1.4)

(Énoncé : 19)

1. Notons $\mathscr{D}$ la droite cherchée. Nous avons $\mathrm{M}(x, y) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\vec{u}$ colinéaires, ou de manière équivalente :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0.$$

   Ceci est encore équivalent à

$$\boxed{b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.}$$

2. **2.1)** Nous avons $\mathrm{M}(x, y) \in \mathrm{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n}$, donc si et seulement si

$$\boxed{3(x-1) - 4(y+2) = 0.}$$

   2.2) Notons $\mathrm{H}_0(x_0, y_0)$. On cherche l'unique point H_0 vérifiant : $\mathrm{H}_0 \in \mathrm{D}$ et $\overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0}$ colinéaire à $\vec{n}$, d'où :

$$\begin{cases} 3(x_0 - 1) - 4(y_0 + 2) &= 0, \\ \det\left(\overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0}, \vec{n}\right) &= 0. \end{cases}$$

   Ou de manière encore équivalente

$$\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 &= 11, \\ \begin{vmatrix} x_0 - 1 & 3 \\ y_0 + 2 & -4 \end{vmatrix} &= 0 \end{cases}.$$

   On résout ensuite le système, il est équivalent à :

$$\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 &= 11, \\ -4(x_0 - 1) - 3(y_0 + 2) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_0 - 4y_0 &= 11, \\ -4x_0 - 3y_0 &= 2 \end{cases}.$$

On trouve $\boxed{H_0(x_0,y_0)=(1,-2) \text{ comme unique solution.}}$ La distance est alors

$$d(M_0,\mathscr{D}) = H_0M_0 = \sqrt{(2-1)^2+(5+2)^2} = \boxed{\sqrt{50}}.$$

3. Notons $\mathscr{P}$ le plan cherché. Alors connaissant un vecteur normal, on sait que l'équation dudit plan est de la forme

$$\mathscr{P} \quad -x+z=d,$$

avec $d\in\mathbf{R}$ à trouver. Comme $A\in\mathscr{P}$, on déduit que $d=0$. Donc $\boxed{\mathscr{P}: -x+z=0.}$

4. Deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}(0,1,2)$. D'après le cours, une forme paramétrique du plan est alors

$$\boxed{\begin{cases} x & = 1-\lambda, \\ y(t) & = 1+\mu, \\ z(t) & = 1-\lambda+2\mu. \end{cases}}$$

Pour obtenir une forme cartésienne, on résout le système en λ,μ.

$$\begin{cases} x & = 1-\lambda \\ y & = 1+\mu \\ z & = 1-\lambda+2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = 1-x \\ \mu & = y-1 \\ z & = 1-(1-x)+2(y-1) \end{cases}$$

La dernière équation fournit l'équation cartésienne du plan, qui est donc $\boxed{\mathscr{P}: x+2y-z=2}$.

5. On considère l'ensemble (E) $\quad x^2+y^2+z^2-4x+6z=0$.

5.1) Il s'agit de transformer l'expression en une somme de carrés, on utilise donc l'expression canonique d'un polynôme.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-4x+6z=0 &\iff (x-2)^2-4+y^2+(z+3)^2-9=0 \\ &\iff (x-2)^2+y^2+(z+3)^2=13. \end{aligned}$$

Donc (E) est une sphère de $\boxed{\text{centre } \Omega(2,0,-3) \text{ et de rayon } \sqrt{13}.}$

5.2) Une forme paramétrique de la droite (Δ) est

$$\begin{cases} x & = 3+\lambda \\ y & = 1-2\lambda \\ z & = 2+3\lambda \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbf{R}.$$

Injectons ces expressions dans l'équation de (E). Pour $\lambda\in\mathbf{R}$, on obtient

$$(3+\lambda-2)^2+(1-2\lambda)^2+(2+3\lambda+3)^2=13.$$

Ceci est équivalent à

$$1+\lambda^2+2\lambda+4\lambda^2-4\lambda+1+25+9\lambda^2+15\lambda=13,$$

soit

$$14\lambda^2+28\lambda+14=0 \iff \lambda^2+2\lambda+1=0=(\lambda+1)^2.$$

Le point B correspond alors au point de Δ pour $\lambda=-1$, *i.e.* $\boxed{B(2,3,-1)}$

5.3) Un vecteur directeur de (ΩB) est $\overrightarrow{\Omega B}(2-2,3-0,-1+3)=(0,3,2)$, on calcule ensuite le produit scalaire des deux vecteurs directeurs :

$$\left\langle \overrightarrow{\Omega B} \middle| \vec{u} \right\rangle = \langle (0,3,2)|(1,-2,3)\rangle = 0.$$

Donc : $\boxed{\text{les droites } (\Omega B) \text{ et } \Delta \text{ sont perpendiculaires.}}$

5.4) Déterminons l'intersection de (E) et de l'ensemble Δ' d'équation $\begin{cases} x=2 \\ y=3-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ $t\in\mathbf{R}$ C'est la même technique qu'utilisée précédemment, on injecte les expressions paramétriques dans l'équation de (E).

$$\begin{aligned} & (2)^2+(3-2t)^2+(1-3t)^2-4.2+6(1-3t)=0 \\ \iff\ & 4+(9-12t+4t^2)+(1+9t^2-6t)-8+6-18t=0 \\ \iff\ & 13t^2=0. \end{aligned}$$

Donc le point d'intersection correspond à $t=0$, *i.e.* $\boxed{(2,3,-1).}$

5.5) Montrons que la droite $(\Omega\mathrm{B})$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ défini par les deux droites Δ et Δ'. Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs de Δ ($(1,-2,3)$ en est un) et Δ' ($(0,-2,3)$ en est un). Pour Δ cela a déjà été montré dans une question précédente.

$$\left\langle \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} \middle| (0,-2,3)\right\rangle = \langle (0,3,2) | (0,-2,3)\rangle = 0.$$

Donc $\boxed{(\Omega\mathrm{B}) \text{ est orthogonale au plan } \mathscr{P} \text{ défini par les deux droites } \Delta \text{ et } \Delta'.}$

Par définition, on sait que $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ est combinaison linéaire de deux vecteurs qui sont tous deux orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{BM}} \perp \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$, de ce fait le triangle $(\Omega\mathrm{BM})$ est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, nous avons

$$\begin{aligned} \Omega\mathrm{B}^2 + \mathrm{BM}^2 &= \Omega\mathrm{M}^2, \\ \Omega\mathrm{B}^2 = 13 &\leqslant \Omega\mathrm{M}^2 \end{aligned} \quad \mathrm{BM}^2 \geqslant 0$$

Donc $\boxed{\Omega\mathrm{M} > \sqrt{13}.}$ Que conclure pour le plan $\mathscr{P}$ et la sphère (E) ? Ainsi, le seul point d'intersection entre (E) et $\mathscr{P}$ est le point B, car tous les autres points $\mathrm{M} \neq \mathrm{B}$ de $\mathscr{P}$ sont à l'extérieur de la sphère ($\Omega\mathrm{M} > \sqrt{13}$).

Solution (exercice 1.5)

(Énoncé : 19)

1. 1.1) D'après la relation de Chasles, et puisque $\left\langle \overrightarrow{\mathrm{AH}_0} \middle| \vec{n}\right\rangle = 0$:

$$\left\langle \overrightarrow{\mathrm{AM}_0} \middle| \vec{n}\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{AH}_0} + \overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0} \middle| \vec{n}\right\rangle = \boxed{\left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0} \middle| \vec{n}\right\rangle} + 0.$$

1.2) Rappelons que $\mathrm{d}(\mathrm{M}_0, \mathscr{D})$ est la borne inférieure de toutes les quantités $\mathrm{d}(\mathrm{M}_0, \mathrm{A}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}_0}\right\|$ lorsque A décrit $\mathscr{D}$, qui est d'après le cours de 1ère année la distance $\mathrm{M}_0\mathrm{H}_0$. Or, par définition du produit scalaire,

$$\left|\left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0} \middle| \vec{n}\right\rangle\right| = \|\vec{n}\| \left\|\overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0}\right\| \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0}\right)\right| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0}\right\|.$$

On peut également retrouver ce fait à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : en effet, puisque les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{H}_0\mathrm{M}_0}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il réalisé l'égalité de Cauchy-Schwarz et on obtient directement l'égalité cherchée... En utilisant la question précédente vient alors de suite : $\boxed{\mathrm{d}(\mathrm{M}_0, \mathscr{D}) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{\mathrm{AM}_0} \middle| \vec{n}\right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|}}$. En utilisant les coordonnées explicites de $\vec{n}$, on obtient, en notant $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$, où les coordonnées de A vérifient $ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} = c$:

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}_0, \mathscr{D}) = \frac{|(x_\mathrm{A} - x_0)a + (y_\mathrm{A} - y_0)b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|(x_\mathrm{A} - x_0)a + (y_\mathrm{A} - y_0)b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1.3) Si $c = 0$, l'ensemble $\mathscr{D}$ devient un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$. Pour calculer $p_{\mathscr{D}}(\mathrm{M}_0)$, on utilise comme d'habitude la définition :

$$\begin{aligned}
(x_0', y_0') = p_{\mathscr{D}}(x_0, y_0) \\
&\iff \begin{cases} ax_0' + by_0' &= 0 \\ (x_0' - x_0, y_0' - y_0) &= \lambda\vec{n} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ax_0' + by_0' &= 0 \\ (x_0' - x_0, y_0' - y_0) &= \lambda(a,b), \lambda \in \mathbf{R} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda(a^2+b^2) + ax_0 + by_0 &= 0 \\ x_0' &= x_0 + \lambda a \\ y_0' &= y_0 + \lambda b \end{cases} .
\end{aligned}$$

On trouve alors $\lambda = -\frac{ax_0+by_0}{a^2+b^2}$. On peut ensuite facilement conclure sur la distance cherchée

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{M}_0, \mathscr{D}) &= \left\|(x_0, y_0) - p_{\mathscr{D}}(x_0, y_0)\right\| \\
&= \|\lambda(a,b)\| \\
&= |\lambda| \sqrt{a^2+b^2} \\
&= \boxed{\frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.
\end{aligned}$$

Solution (problème 1.1)

(Énoncé : 20)

PARTIE I — CONTEXTE Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. On considère une suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n.$$

1. Notons $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que $U_n = A^n U_0$.

- **Initialisation.** On a évidemment $U_0 = I_3 U_0$.
- **Hérédité.** Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$, alors $AU_n = \begin{pmatrix} a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$, de l'hypothèse de récurrence on déduit alors que $U_{n+1} = AU_n = A \cdot A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

On a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ U_n = A^n U_0.}$

PARTIE II — PREMIER EXEMPLE On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda(2-\lambda) & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_2 - (2-\lambda)L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2+2\lambda+1 & -2 \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1) \end{pmatrix}. && L_3 \leftrightarrow L_3 - (-\lambda^2+2\lambda+1)L_2
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $\lambda = -1, 1, 2$. Donc : $\boxed{\mathrm{Spec}\,A = \{-1, 1, 2\}.}$

Elle possède trois valeurs propres distinctes, donc $\boxed{\text{A est diagonalisable.}}$

2. Il existe donc une matrice P inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons D la matrice diagonale apparaissant. Alors $A = PDP^{-1}$, d'où par récurrence immédiate, $A^n = PD^nP^{-1}$, et

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En notant $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a : $D^n =$

$D_1 + D_2^n + D_3^n$. Donc

$$\begin{aligned}A^n &= PD_1P^{-1} + PD_2^nP^{-1} + PD_3^nP^{-1}\\ &= PD_1P^{-1} + (-1)^nP\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + 2^nP\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},\end{aligned}$$

qui est bien de la forme $\boxed{R_1 + (-1)^nR_2 + 2^nR_3}$ avec $R_1 = PD_1P^{-1}, R_2 = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$, et $R_3 = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$.

3. Soit u une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On obtient u_n en fonction de n en lisant la troisième coordonnée de chaque vecteur colonne dans l'égalité précédente. On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}u_n = &\left((R_1)_{3,1} + (-1)^n(R_2)_{3,1} + 2^n(R_3)_{3,1}\right)u_0\\ &+ \left((R_1)_{3,2} + (-1)^n(R_2)_{3,2} + 2^n(R_3)_{3,2}\right)u_1 + \left((R_1)_{3,3} + (-1)^n(R_2)_{3,3} + 2^n(R_3)_{3,3}\right)u_2.\end{aligned}$$

C'est bien une — longue! — $\boxed{\text{combinaison linéaire de} 2^n, 1 \text{ et } (-1)^n,}$ d'où l'existence des constantes.

Partie III — Second exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix}4&-5&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

4. Après calculs, on trouve deux espaces propres de dimension 1, et les valeurs propres 1 et 2, $\boxed{\text{la matrice n'est pas diagonalisable.}}$

5. Soit $X \in \mathrm{Vect}(U)$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X = \lambda U$. Donc $AX = \lambda AU = 2\lambda U \in d$ car $AU = 2U$. Donc :

$\boxed{\text{la droite vectorielle } d \text{ engendré par le vecteur U est stable par A.}}$

6. On pose $V = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

6.1) Il s'agit ici de montrer que les deux vecteurs V, AV ne sont pas colinéaires, auquel cas $\mathrm{Vect}(V, AV)$ sera un espace vectoriel de dimension deux. Puisque $AV = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$, les vecteurs AV et V ne sont pas colinéaires, donc

$\boxed{\text{l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V et AV est un plan vectoriel.}}$

6.2) Après calculs, $A^2V = \begin{pmatrix}-12\\-4\\0\end{pmatrix}$, on constate que $A^V = 2V + 3AV$ donc $\boxed{A^2V \in P.}$

6.3) Soit $X \in P$, alors $X = \lambda V + \mu AV$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, donc $AX = \lambda AV + \mu A^2V$ qui est la somme de deux vecteurs dans P donc est dans P comme P est stable par combinaison linéaire, ainsi $\boxed{\text{P est stable par A.}}$

Partie IV — Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ quelconque.

7. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons D stable par A, alors, puisque U appartient à D, on a $AU \in D$ donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $AU = \lambda U$ et donc U est un vecteur propre de A car non nul.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons U vecteur propre de A et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $AU = \lambda U$. Par ailleurs, soit $X = aU$ pour $a \in \mathbf{R}$, alors $AX = aAU = a\lambda U \in D$.

Nous avons donc montré que :

$\boxed{\text{D est stable par la matrice A si, et seulement si, U est un vecteur propre de la matrice A.}}$

8. Soit un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$. On considère une base (X_1, X_2) de P et X_3 un vecteur non nul normal à P.

8.1) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons P stable par A, alors puisque X_1 et X_2 sont dans P, c'est aussi le cas de AX_1 et AX_2 aussi.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que AX_1 et AX_2 appartiennent à P . Soit X un vecteur de P : comme $P = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$, il existe deux réels $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tels que $X = a_1X_1 + a_2X_2$; on a donc $AX = a_1AX_1 + a_2AX_2$, or AX_1, AX_2 appartiennent à P, donc $AX \in P$ (puisque P est stable par combinaison linéaire). Ceci est vrai pour tout X dans P, donc $\boxed{\text{P est stable par A.}}$

Nous avons donc montré que :

$\boxed{\text{P est stable par la matrice A si, et seulement si, les vecteurs } AX_1 \text{ et } AX_2 \text{ appartiennent à P.}}$

8.2) On a :

$$\begin{aligned}\left\langle {}^{\mathrm{T}}AX_3 \middle| X_1 \right\rangle = 0 &\iff {}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}AX_3\right)X_1 = 0\\ &\iff {}^{\mathrm{T}}X_3AX_1 = 0\\ &\iff \langle X_3|AX_1\rangle = 0.\end{aligned}$$

Or, P est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à X_3. Nous avons donc montré que :

$\boxed{AX_1 \text{ appartient au plan P si, et seulement si, les vecteurs } X_1 \text{ et } {}^{\mathrm{T}}AX_3 \text{ sont orthogonaux}}$.

8.3) On déduit des questions précédentes que P est stable par A si et seulement si X_1 et X_2 sont orthogonaux à ${}^{\mathrm{T}}AX_3$. Or, un vecteur U est normal à P si et seulement si il est orthogonal à X_1, X_2. De plus, un vecteur est normal au plan P si et seulement si il est colinéaire à X_3, qui engendre la droite normale à P. On déduit de ces deux derniers points que le vecteur ${}^{\mathrm{T}}AX_3$ est orthogonal à X_1 et X_2 si et seulement si il est vecteur propre de ${}^{\mathrm{T}}A$ (puisque X_3 est non nul), et donc que

$\boxed{\text{P est stable par A si et seulement si } X_3 \text{ est vecteur propre de } {}^{\mathrm{T}}A.}$

Partie V — Fin du second exemple

9. D'après la question 8, les droites stables par A sont les droites engendrées par les vecteurs propres de A. Comme cette matrice admet deux espaces propres de dimension 1, tous les vecteurs propres associés à une même valeur propre sont colinéaires et engendrent donc la même droite. La matrice A a donc exactement deux droites stables, qui sont E_1, E_2 et après calculs

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}}.$$

10. On admet que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{T}}A$ sont 1 et 2. Après calculs on trouve $E_1({}^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, E_2({}^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. D'après les questions précédentes, les plans stables sont donc $\boxed{x-3y+2z=0 \text{ et } x-2y+z=0.}$

11. On choisit $e_1 = U = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$, qui est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 2 pour A. On doit alors choisir e_2 parmi les vecteurs propres de A (pour que la droite qu'il engendre soit stable par A) associés à la valeur 1. On choisit $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On constate que e_2 est dans les deux plans stables de A. Il reste à choisir e_3 dans l'un de ces plans stables, et de sorte que (e_1, e_2, e_3) soit libre. Par exemple $e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ convient. On vérifie que cette famille de trois vecteurs est bien libre; c'est donc une base respectant de plus les conditions souhaitées par l'énoncé.

12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base Q

13. **13.1)** Par construction, on sait que $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_2) = e_2$. Il reste donc à calculer $f(e_3)$, par exemple matriciellement :

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Il reste à exprimer ce vecteur en fonction de e_1, e_2, e_3. On cherche alors x, y, z tels que $xe_1 + ye_2 + ze_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, on trouve $y = z = 1$ et $x = 0$. Donc

$$\boxed{\underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(f) = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

13.2) Il suffit de choisir $\delta = 1$.

13.3) On constate que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors émettre la conjecture suivante, que l'on peut montrer par récurrence,

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

14. On constate que les relations de récurrence peuvent s'écrire matriciellement ainsi :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix},$$

où A est la matrice du second exemple. Or, $A = PBP^{-1}$ donc par récurrence immédiate $A^n = PB^nP^{-1}$. Mais

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que A^n peut s'écrire sous la forme

$$A^n = 2^n R_1 + R_2 + nR_3$$

avec $R_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, R_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $R_3 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. En notant pour $i \in \{1,2,3\}$, $V_i = R_i \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = 2^n V_1 + V_2 + nV_3,$$

D'où en notant α, β et γ le troisième coefficient de V_1, V_2 et V_3, on obtient :

$$u_n = 2^n\alpha + \beta + n\gamma.$$

Solution (problème 1.2)

(Énoncé : 21)

Partie I — Premier exemple dans $\mathbf{R}^2$

1. Soit (E) l'équation $y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$. (E) est une équation différentielle homogène linéaire du second ordre, son équation caractéristique est l'équation :

$$r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} = 0$$

d'inconnue r complexe et de solution $\frac{1}{3}$. On en déduit que, pour toute fonction y dérivable deux fois sur $\mathbf{R}$, on a :

$$y \text{ solution de (E)} \iff y : t \longmapsto \exp\left(\frac{t}{3}\right) \times (\lambda_1 + \lambda_2 t).$$

2. **2.1)** Par produit, φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Pour tout entier naturel n, soit l'hypothèse $\mathscr{Z}(n)$ suivante :

$$\mathscr{Z}(n) : \text{« Il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que : } \varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n)\exp\left(\frac{t}{3}\right) \text{ ».}$$

Posons $a_0 = a$ $b_0 = b$, on a alors : $\varphi^{(0)} : t \mapsto (a_0 t + b_0)\exp\left(\frac{t}{3}\right)$ car $\varphi^{(0)}$ est, par définition, φ. $\mathscr{Z}(0)$ est donc vraie. Supposons désormais $\mathscr{Z}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Il existe alors deux réels a_n et b_n tels que : $\varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n)\exp\left(\frac{t}{3}\right)$. Pour tout réel t, on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(t) &= \left(a_n + \frac{b_n}{3} + \frac{a_n t}{3}\right)\exp\left(\frac{t}{3}\right) \\ &= (a_{n+1}t + b_{n+1})\exp\left(\frac{t}{3}\right) \end{aligned}$$

en posant $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$ et $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{3}$

La propriété $\mathcal{Z}(n+1)$ est alors vraie. $\mathcal{Z}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel n, $\mathcal{Z}(n)$ implique $\mathcal{Z}(n+1)$. Donc $\mathcal{Z}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

$$\boxed{\text{On a prouvé qu'il existe deux suites réelles } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ telles que : } \forall n\in\mathbf{N},\quad \varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n)\exp\left(\tfrac{t}{3}\right).}$$

2.2) Soit n un entier naturel, on a alors :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{3} \\ &= \frac{a_n}{3} + \frac{b_{n+1}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(b_{n+1} - \frac{b_n}{3}\right) + \frac{b_{n+1}}{3} \\ &= \frac{2}{3} b_{n+1} - \frac{1}{9} b_n \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n &= \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{3}{9}a_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}a_{n+1} \\ &= a_{n+2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n\in\mathbf{N},\quad a_{n+2} = \tfrac{2}{3}a_{n+1} - \tfrac{1}{9}a_n,\quad b_{n+2} = \tfrac{2}{3}b_{n+1} - \tfrac{1}{9}b_n.}$$

2.3) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, les solutions de son équation caractéristique, qui est l'équation $r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} = 0$ d'inconnue r complexe, étant $\frac{1}{3}$, on en déduit qu'il existe A et B deux réels tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (\mathrm{A} + \mathrm{B}n).$$

et, comme on connaît a_0 et a_1, on a facilement A et B :

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ a_1 &= \frac{a}{3} \end{cases} \text{donc : } \begin{cases} \mathrm{A} &= a \\ \mathrm{B} &= 0 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on a donc :

$$a_n = \frac{a}{3^n}$$

Ceci était évident car $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique et de raison $\frac{1}{3}$. De même, comme $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfont à la même relation de récurrence, il existe A et B deux réels tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (\mathrm{A} + \mathrm{B}n).$$

et, comme on connaît b_0 et b_1, on a facilement A et B :

$$\begin{cases} b_0 &= b \\ b_1 &= \frac{b}{3} + a \end{cases} \text{donc : } \begin{cases} \mathrm{A} &= b \\ \mathrm{B} &= 3a \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on a donc :

$$b_n = \frac{b}{3^n} + \frac{na}{3^{n-1}}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\tfrac{a}{3^n}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\tfrac{b}{3^n} + \tfrac{na}{3^{n-1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}.}$$

3. 3.1) Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \times \mathrm{X}_n &= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9a_{n+1} \\ -a_n + 6a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9a_{n+1} \\ 9a_{n+2} \end{pmatrix} \text{ d'après la question 2)b)} \\ &= 9\mathrm{X}_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \quad \forall n\in\mathbf{N},\quad \mathrm{X}_{n+1} = \tfrac{1}{9}\mathrm{A}\mathrm{X}_n.}$$

3.2) Soit λ un complexe. On sait que λ est valeur propre de f si et seulement si la matrice $A-\lambda I_2$ est non inversible, soit si et seulement si son déterminant est nul. Or :

$$\begin{aligned}\det\left(A-\lambda I_2\right) &= \det\left(\begin{pmatrix}-\lambda & 9\\ -1 & 6-\lambda\end{pmatrix}\right)\\ &= \lambda^2-6\lambda+9\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Spec} f=\{3\}$. $\boxed{\text{On peut donc affirmer que } \operatorname{Spec} f\subset \mathbf{R}_+.}$

3.3) On a $f(-2,1)=(9,-12-1)$ car $f:(x,y)\mapsto(9y,6x-y)$ car f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc : $f(-2,1)=(9,-13)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(-2,1)\cdot f(-2,1) &= -18+(-13)\\ &= -31\end{aligned}$$

De $(-2,1)\cdot f(-2,1)<0$, on déduit : $\boxed{f \text{ ne vérifie pas (P).}}$

Partie II — Une projection orthogonale dans $\mathbf{R}^3$

4. 4.1) Pour tout (x,y,z) dans $\mathbf{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \operatorname{Ker}(f) &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(A)\\
&\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}2x+2y-2z &=0\\ 2x+5y+z &=0\\ -2x+y+5z &=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x+y-z &=\\ 2x+5y+z &=0\\ 6y+6z &=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x &=2z\\ y &=-z\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f) &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \text{ tel que } x=2z \quad\text{et}\quad y=-z\}\\ &= \{(2z,-z,z) \text{ avec } z\in\mathbf{R}\}\\ &= \operatorname{Vect}((2,-1,1))\end{aligned}$$

La famille $((2,-1,1))$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus, cette famille est libre (un seul vecteur et il est non nul). C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. $\boxed{\text{Une base de } \operatorname{Ker}(f) \text{ est } ((2,-1,1)).}$ Soit x un élément de $\mathbf{R}^3$, on pose $(a,b,c)=x$. Comme f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a :

$$\begin{aligned}6(f(x)-x) &= (2a+2b-2c,2a+5b+c,-2a+b+5c)-(6a,6b,6c)\\ &= (-4a+2b-2c,2a-b+c,-2a+b-c)\\ &= (-2a+b-c)\,(2,-1,1)\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)-x\in\operatorname{Vect}((2,-1,1))$ et donc, d'après le résultat prouvé dans la première partie de cette question, que $f(x)-x\in\operatorname{Ker}(f)$. $\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}^3, \text{ on a bien : } f(x)-x\in\operatorname{Ker}(f).}$

4.2) $\mathrm{Im}(f)$ est, d'après le théorème du rang, un espace de dimension $3 - \dim(\mathrm{Ker}(f))$, *i.e.* 2. Or, $((1,1,-1),(2,5,1))$ est une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) de $\mathrm{Im}(f)$ (car c'est la famille $(f(3,0,0), f(0,6,0))$ ayant 2 éléments, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ est donc bien un plan $\mathscr{P}$. Soit (x,y,z) un vecteur de $\mathbf{R}^3$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ (x,y,z) = a(1,1,-1) + b(2,5,1)\\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \begin{cases} x &= a+2b \\ y &= a+5b \\ z &= -a+b \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \begin{cases} a+2b &= x \\ 3b &= y-x \\ 3b &= z+x \end{cases}\\
&\Leftrightarrow z+x = y-x.
\end{aligned}$$

(x,y,z) appartient donc à $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si on a $2x - y + z = 0$. On a prouvé ainsi l'égalité suivante :

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}.$$

Une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$ est $2x - y + z = 0$ et un vecteur normal est $(2,-1,1)$.

4.3) Soit x un élément de $\mathbf{R}^3$. Dès lors, $f(x)$ appartient à $\mathscr{P}$ par définition de $\mathscr{P}$. De plus, on a vu que $f(x) - x$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ qui est $\mathrm{Vect}((2,-1,1))$ (question 1)1)) qui est $\mathscr{P}^\perp$ (car on a vu dans la question précédente que $(2,-1,1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$). On déduit de ces deux résultats que f est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.

5. 5.1) Notons d la distance de x au plan $\mathscr{P}$. Comme f est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
d &= \|x - f(x)\|\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{(-2x_1 + x_2 - x_3)(2,-1,1)\cdot(-2x_1 + x_2 - x_3)(2,-1,1)}\\
&= \frac{|-2x_1 + x_2 - x_3|}{6}\sqrt{4+1+1}\\
&= \frac{|-2x_1 + x_2 - x_3|}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Par le théorème de Pythagore, comme $x - f(x)$ et $f(x)$ sont orthogonaux (puisque f est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$), on en déduit que $\|x - f(x)\|^2 + \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ ce qui prouve que $\|x - f(x)\| \leq \|x\|$. Or, on vient de voir que $\|x - f(x)\| = \dfrac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}}$ et on sait que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Cela signifie donc que : $\dfrac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

5.2) On vient de voir que : $\dfrac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, cela donne $0 \leq \dfrac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ puis, par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}^+$, on en déduit que :

$$|2x_1 - x_2 + x_3|^2 \leq \left(\sqrt{6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2}\right)^2$$

soit $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_1x_3 \leq 6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2$

Cela donne bien : $-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leq 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2$.

5.3) On a :

$$\begin{aligned}
6\langle x | f(x)\rangle &= (2x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 5x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 + 5x_3)\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= 2x_1^2 + 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_3^2\\
&= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - (-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3)
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on peut dire que $\langle x | f(x)\rangle \geq 0$ et donc f vérifie (P).

Partie III — Deux exemples dans $\mathbf{R}^n$ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul. I désigne la matrice identité de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ et pour tout $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $f^\star$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice transposée de A, notée ${}^{\mathbf{T}}(A)$.

6. 6.1) On rappelle que si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ sont les coordonnées de u un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ celles d'un vecteur v de $\mathbf{R}^n$, alors :

$$\langle u|v\rangle = {}^{\mathbf{T}}U \times V \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Soit x un élément de $\mathbf{R}^n$. On note X la matrice de ses coordonnées dans la base canonique, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(x)|x\rangle &= {}^{\mathbf{T}}(AX) \times X \text{ d'après le rappel} \\ &= {}^{\mathbf{T}}X \times \left({}^{\mathbf{T}}A \times X\right) \\ &= \langle x|f^\star(x)\rangle. \end{aligned}$$

Comme $\langle f(x)|x\rangle = \langle x|f(x)\rangle$, on en déduit : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x|f(x)\rangle = \langle x|f^\star(x)\rangle.}$

6.2) On peut procéder directement par équivalence dans cette question. En effet,

$$\begin{aligned} & f + f^\star \text{vérifie (P)} \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x|(f+f^\star)(x)\rangle \geqslant 0 \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x|f(x)\rangle + \langle x|f^\star(x)\rangle \geqslant 0 \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad 2\langle x|f(x)\rangle \geqslant 0 \\ \iff\ & f \text{ vérifie (P).} \end{aligned}$$

Linéarité à droite du produit scalaire

question précédente

6.3) $A + {}^{\mathbf{T}}(A)$ est une matrice symétrique (car ${}^{\mathbf{T}}\left(A + {}^{\mathbf{T}}(A)\right) = {}^{\mathbf{T}}(A) + A$) à coefficients réels. D'après le cours, on sait que cela entraîne qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ telle que ${}^{\mathbf{T}}(Q) = Q^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ telle que : $\boxed{A + {}^{\mathbf{T}}(A) = QDQ^{-1}}$.

6.4) On pose $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$, on a donc $\operatorname{Spec}(f+f^\star) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. On remarque que, si X est un vecteur colonne, alors ${}^{\mathbf{T}}(Q)X$ aussi. En utilisant ce fait, on obtient :

$$\begin{aligned} & f \text{ vérifie (P)} \\ \iff\ & f + f^\star \text{ vérifie (P) d'après la question 1)b)} \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad x \cdot (f+f^\star)(x) \geq 0 \\ \iff\ & \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad {}^{\mathbf{T}}X \times \left((A + {}^{\mathbf{T}}(A))X\right) \geq 0 \\ \iff\ & \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad {}^{\mathbf{T}}X \times \left(QD\,{}^{\mathbf{T}}QX\right) \geq 0 \\ \iff\ & \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad {}^{\mathbf{T}}({}^{\mathbf{T}}QX) \times D \times ({}^{\mathbf{T}}QX) \geq 0 \\ \iff\ & \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n, \quad {}^{\mathbf{T}}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \geq 0 \\ \iff\ & \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n, \quad {}^{\mathbf{T}}\begin{pmatrix} a_1\lambda_1 \\ a_2\lambda_2 \\ \vdots \\ a_n\lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \geq 0 \\ \iff\ & \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n, a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \cdots + a_n^2\lambda_n \geq 0 \\ \iff\ & \forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

d'après la question pré

Pour expliquer la dernière équivalence, il suffit de poser $a_1 = 1$ puis, pour tout i de $[\![2\,,\,n]\!]$, $a_i = 0$. Cela entraîne que $\lambda_1 \geq 0$. Après, on pose $a_2 = 1$ puis, pour tout i de $[\![1\,,\,n]\!]\setminus\{2\}$, $a_i = 0$. On obtient alors $\lambda_2 \geq 0$. On poursuit après le processus. $\boxed{\text{On a prouvé que } f \text{ vérifie (P) si et seulement si } \operatorname{Spec}(f+f^\star) \subset \mathbf{R}^+.}$

7. 7.1) On remarque que $B + {}^{\mathbf{T}}B$ est A. Comme les matrices caractérisent les applications, cela entraîne que $g + g^\star$ est f. Des questions précédentes, on déduit alors que g vérifie (P) si et seulement si $g + g^\star$ vérifie (P), soit si et seulement si f vérifie (P). $\boxed{\text{On a prouvé que } f \text{ vérifie (P) si et seulement si } g \text{ vérifie (P).}}$

7.2) Supposons g diagonalisable. B est donc diagonalisable. Or B a une seule valeur propre, c'est 1 car B est triangulaire et n'a que des 1 sur la diagonale. Il existe donc une matrice P inversible telle que $B = PI_nP^{-1}$, cela donne $B = I_n$ ce qui est absurde. $\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ n'est effectivement pas diagonalisable.}}$

7.3) $A - I$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Rg}(A - I)$ vaut 1. On en déduit que 1 est une valeur propre et que le sous-espace propre de A associé à 1, E_1, est, d'après le théorème du rang, de dimension $n-1$. On constate que :

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+n-1 \\ \vdots \\ 2+n-1 \end{pmatrix} = (n+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle, $n+1$ est donc une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à $n+1$, E_2, est au moins de dimension 1. A est une matrice de taille n. On vient de voir que $\dim(E_1) + \dim(E_2) \geq n$. On en déduit que A est diagonalisable et que ses valeurs propre sont 1 et $n+1$. Les valeurs propres de f sont donc aussi 1 et $n+1$. On a donc $\mathrm{Spec} f \subset \mathbf{R}^+$ soit $sp(g+g^\star) \subset \mathbf{R}^+$. D'après la question 1)d), cela suffit pour affirmer que g vérifie (P) et donc, d'après la question 2)a), que f vérifie (P). $\boxed{\text{Des valeurs propres de A, 1 et } n+1\text{, on en a conclu que } f \text{ vérifie (P).}}$

8. 8.1) Soit $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$. Si $i \neq j$, $\mathbf{E}(X_iX_j)$ vaut alors $\mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j)$, soit 1×1 soit 1. Ainsi, dans ce cas, $\mathbf{E}(X_iX_j)$ est bien le coefficient de A sur la i-ième ligne de la j-ième colonne.
Si $i = j$, $\mathbf{E}(X_iX_j)$ est $\mathbf{E}(X_i^2)$, soit, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbf{Var}(X_i) + (\mathbf{E}(X_i))^2$, *i.e.* 2. Dans ce cas, $\mathbf{E}(X_iX_j)$ est bien le coefficient de A sur la i-ième ligne de la j-ième colonne.

$\boxed{\text{La matrice A définie en 2. est bien la matrice dont le coefficient en } i\text{-ième ligne et } j\text{-ième colonne vaut } \mathbf{E}(X_iX_j) \text{ pour tout } (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2.}$

8.2) Calculons les deux membres de l'égalité et montrons qu'ils sont égaux. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et notons X sa matrice dans la base canonique.

$$\begin{aligned}\langle x | f(x) \rangle &= {}^{\mathrm{T}}XAX \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + 2x_n \end{pmatrix} \\ &= 2\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i x_j.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'espérance du moment d'ordre deux de la somme peut se calculer à l'aide de König-Huygens.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right)^2\right) \\ &= \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right) + \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right)^2 && \textit{König-Huygens} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \mathbf{Var}(X_i) + \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{E}(X_i)\right)^2 && \textit{Indépendance et linéarité de la variance} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i x_j.\end{aligned}$$

8.3) Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$. Alors $\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right)^2$ est une variable positive et ayant, par somme de telles variables, une espérance. Par croissance de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right)^2\right)$ est positif et donc que f vérifie (P). $\boxed{\text{On vient de prouver à nouveau que } f \text{ vérifie (P).}}$

Solution (problème 1.3)

(Énoncé : 24)

1. On regarde un maximum sur des quantités positives, donc $\boxed{\|M\| \geqslant 0 \text{ pour toute matrice } M}$. De plus, $\|M\| = 0$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,m]\!] \times [\![1\,,\,n]\!]$, $|m_{i,j}| = 0$. Ceci est équivalent à $m_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,m]\!] \times [\![1\,,\,n]\!]$, d'où la nullité de M.
2. Soient deux matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$. Alors d'après l'inégalité triangulaire classique sur la valeur absolue, nous avons

$$\forall i,j, \quad |m_{i,j} + n_{i,j}| \leqslant |m_{i,j}| + |n_{i,j}|.$$

Donc en prenant le maximum sur i, j, on obtient

$$\boxed{\|M+N\| \leqslant \|M\| + \|N\|.}$$

3.

```python
import numpy as np
def Norme_bis(M):
    """
    retourne la norme de la matrice M
    ne fonctionne pas sur les vecteurs ligne
    """
    maxi = 0
    for ligne in M:
        for coeff in ligne:
            if abs(coeff) > maxi:
                maxi = abs(coeff)
    return maxi
```

Pour une fonction qui marche aussi avec des lignes, on récupère d'abord les tailles, puis on utilise deux boucles classiques sur les entiers.

```python
import numpy as np
def Norme(M):
    """
    retourne la norme de la matrice M
    ne fonctionne pas sur les vecteurs ligne
    """
    if len(M.shape) > 1:
        n, p = M.shape
        maxi = 0
        for i in range(n):
            for j in range(p):
                if abs(M[i, j]) > maxi:
                    maxi = abs(M[i, j])
        return maxi
    else:
        maxi = 0
        for x in M:
            if abs(x) > maxi:
                maxi = abs(x)
        return maxi
```

Par exemple `Norme(np.array([[1,2],[2,3]]))` retourne 3.

4.

```python
import numpy as np
def Normalise(v):
    """
    retourne la version normalisée de v
    """
    return v/Norme(v)
```

Par exemple, `Normalise(np.array([[1], [2], [3]]))` renvoie [[0.33333333] [0.66666667] [1.]].

5.

```python
import numpy as np
def simu_v0(p):
    """
    retourne une colonne donnée sous forme de tableau numpy avec
    ↪ des réels aléatoires entre 0 et 1
    """
    v0 = np.zeros((p, 1))
    for i in range(p):
        v0[i] = rd.random()
    return v0
```

6. On initialise v à une matrice colonne aléatoire. Puis, avec une boucle `for`, on calcule de proche en proche v_1, v_2,..., v_n, en utilisant la fonction `Normalise`. En sortie de boucle, la matrice colonne v correspond au dernier terme calculé, c'est à dire v_n.

```python
import numpy as np
import random as rd
def PuissanceIteree(A, n):
    """
    retourne vn associé à A
    """
    p, _ = A.shape # ou p = A.shape[0]
    v = simu_v0(p)
    for _ in range(1, n+1):
        v = Normalise(A@v)
    return v
A = np.array([[1,0],[0,2]])
```

Par exemple, un exécution de `PuissanceIteree(A, 10)` renvoie [[7.94109821e-04] [1.00000000e+00]].

7. **7.1)** La commande `v = np.array([[rd.random()] for _ in range(10)])` crée une colonne de taille 10 contenant des réels entre 0 et 1 simulés de manière uniforme. Elle sera utilisée pour créer v_0 dans la suite.

7.2) Les programmes A et C sont corrects. Cependant la boucle `while` du programme B ne possède aucune condition d'arrêt dans la mesure où l'écart n'est pas modifié. Dans la plupart des cas (précisément ceux où l'algorithme nécessite plus d'une étape), ce programme ne se terminera donc pas. Testons l'algorithme sur un exemple. Soit la matrice T triangulaire ci-dessous.

```python
T = np.array([[1, 1], [0, 2]]) #la plus grande valeur
↪ propre en module est 2
def VecteurPropre(A, e):
    d = A.shape
    v = np.array([[rd.random()] for _ in range(d[0])])
    v = Normalise(v)
    while Norme(v - Normalise(A*v)) >= e:
        v = Normalise(A*v)
    return Normalise(A*v)
V = VecteurPropre(T, 10**(-3))
```

Pour savoir si V est effectivement un vecteur propre, on calculer `T@V - 2*V`. Cette commande retourne
[[-7.80881230e-04 9.99219119e-01] [0.00000000e+00 0.00000000e+00]], un vecteur quasiment égal au vecteur nul.

Solution (problème 1.4)

(Énoncé : 26)

Partie I — Modèle discret non structuré en âge

1. **1.1)** Puisque $\varphi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est bien définie.}}$

1.2) La monotonie d'une telle suite récurrente provient de : le signe de la fonction $x \in \mathrm{I} \longmapsto x - \varphi(x)$ s'il est connu, ou alors, et c'est ce que nous ferons ici, on distingue deux cas. Tout d'abord, si $u_1 \leqslant u_0$ alors en appliquant n fois φ de chaque côté de l'inégalité (conservée, car φ est croissante), on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} \leqslant u_n \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \text{ est croissante.}$$

De-même, si $u_0 \geqslant u_1$ alors en utilisant à nouveau la croissance de φ, on obtient : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} \geqslant u_n \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \text{ est décroissante.}$$

En résumé : $\boxed{(u_n) \text{ est monotone.}}$

2. Nous avons : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) - x = -ax^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(1-2ax)$. D'où le tableau de signe ci-dessous

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2a}$		$+\infty$
$\varphi(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $\boxed{\mathrm{M} = \frac{1}{2a}.}$

3. 3.1) Il s'agit de montrer que $\varphi(]0,\mathrm{M}[) \subset]0,\mathrm{M}[$. Cherchons donc les variations de la fonction φ. C'est un trinôme à coefficient dominant négatif, donc φ est croissante sur $\left]-\infty, \frac{3}{4a}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{3}{4a}, +\infty\right[$. Comme $\mathrm{M} < \frac{3}{4a}$, on déduit que φ est croissante sur $]0,\mathrm{M}[$. Or, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ et φ est continue donc $\varphi(]0,\mathrm{M}[) =]0,\mathrm{M}[$. D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 < u_n < \mathrm{M}.}$

3.2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une suite monotone d'après les résultats de la première question appliqués à $\varphi|_{]0,\mathrm{M}[}$ qui est une fonction croissante, et bornée donc convergente par théorème de la limite monotone. Puisque φ est de plus continue, $\boxed{\text{elle converge vers un } \ell \in \mathbf{R} \text{ vérifiant } \ell = \varphi(\ell).}$

3.3) Or, $\ell \in \{0, \mathrm{M}\}$ d'après le tableau de variations de $\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$. Pour savoir quelle limite choisir il faut maintenant préciser un peu plus la monotonie de (u_n). Sur $]0,\mathrm{M}[$, la fonction $x \longmapsto \varphi(x) - x$ est positive donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geqslant u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante, dès lors $u_n \geqslant u_0 > 0$ pour tout n donc la suite ne peut converger vers zéro. En conclusions $\boxed{u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \mathrm{M}.}$

4. 4.1) La seule différence par rapport à la question précédente est que la fonction $x \longmapsto \varphi(x) - x$ est décroissante sur l'intervalle $\left]\mathrm{M}, \frac{3}{2}\mathrm{M}\right[$. En revanche, φ y est toujours croissante. Donc par continuité de φ, $\varphi\left(\left]\mathrm{M}, \frac{3}{2}\mathrm{M}\right[\right) = \left]\mathrm{M}, \varphi\left(\frac{3}{2}\mathrm{M}\right)\right[\subset \left]\mathrm{M}, \frac{3}{2}\mathrm{M}\right[$ puisque $\varphi\left(\frac{3}{2}\mathrm{M}\right) \leqslant \frac{3}{2}\mathrm{M}$ en utilisant le signe de $x \longmapsto \varphi(x) - x$. Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{M} < u_n < \frac{3}{2}\mathrm{M}.}$

4.2) Puisque pour tout $x \in \left]\mathrm{M}, \frac{3}{2}\mathrm{M}\right[$, $\varphi(x) \leqslant x$, nous obtenons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n) \leqslant u_n$, donc la décroissance de la suite. Puisqu'elle est minorée, elle converge, et comme précédemment vers 0 ou M pour les mêmes raisons que dans la question précédente. Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_0 < \mathrm{M}$, elle ne peut converger vers M donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0.}$

Partie II — Modèle continu non structuré en âge

5. 5.1) On dérive. Soit $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \mathrm{N}'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{N}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{N}(t)(1 - 2a\mathrm{N}(t))\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{N}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ &= \mathrm{N}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{2} - a\mathrm{N}(t) - \frac{1}{2}\right) \\ &= -f(t)a\mathrm{N}(t). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est solution de } y' = -a\mathrm{N}y.}$

5.2) Donc d'après le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 nous obtenons :

$$f(t) = \mathrm{K}\mathrm{e}^{-a\widehat{\mathrm{N}}},$$

où $\widehat{\mathrm{N}}$ désigne la primitive de N qui s'annule en zéro. Cette fonction existe puisque N est continue car dérivable. En faisant $t = 0$, on obtient $f(0) = \mathrm{K} = \mathrm{N}_0 > 0$. $\boxed{\text{D'où l'existence de K comme demandé.}}$

6. On définit dès lors $h = \frac{1}{\mathrm{N}}$.

6.1) La fonction h est dérivable en tant qu'inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas.

6.2) Soit $t \in \mathbf{R}^+$. Alors

$$h'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)^2} = -\frac{\frac{1}{2}N(t)(1-2aN(t))}{N(t)^2} = -\frac{\frac{1}{2}(1-2aN(t))}{N(t)} = \boxed{-\frac{1}{2}h(t)+a.}$$

6.3) D'après le cours, et en cherchant une solution particulière sous forme d'une constante, on obtient :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \boxed{h(t) = \mathrm{L}e^{-\frac{1}{2}t} + 2a, \quad \mathrm{L} \in \mathbf{R}.}$$

6.4) Il reste à tenir compte de la condition initiale : en faisant $t = 0$, on obtient $h(0) = \mathrm{L} + 2a$ soit $\mathrm{L} = \frac{1}{N_0} - 2a$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad h(t) = \left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-\frac{1}{2}t} + 2a.$$

puis :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \boxed{N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-\frac{1}{2}t} + 2a},}$$

7. 7.1) Par règles classiques sur les limites, nous avons $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = \frac{1}{2a}.}$

7.2) Soit $t \in \mathbf{R}^+$. Alors :

$$N'(t) = -\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-\frac{1}{2}t}}{\left[\left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-\frac{1}{2}t} + 2a\right]^2}$$

Donc : $\quad N'(t) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{N_0} \geqslant 2a$. Ainsi : — N est croissante si et seulement si $N_0 \leqslant \frac{1}{2a}$,
— N est décroissante si et seulement si $N_0 \geqslant \frac{1}{2a}$.

8. Soit $t \in \mathbf{R}^+$,

$$\begin{aligned}
N''(t) &= \frac{1}{2}\left(N'(t)(1-2\sin(t)) + \frac{1}{2}N(t)(-2aN'(t)\right) \\
&= \frac{1}{4}N(t)(1-2aN(t))^2 - \frac{a}{2}N(t)^2(1-2aN(t)) \\
&= \frac{1}{2}N(t)(1-2aN(t))\left(\frac{1}{2}(1-2aN(t)) - aN(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}N(t)(1-2aN(t))\left(\frac{1}{2} - 2aN(t)\right)
\end{aligned}$$

On résout ensuite l'équation ci-dessous

$$N''(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad N(t) = 0 \quad \text{ou} \quad N(t) = \frac{1}{2a} \quad \text{ou } N(t) = \frac{1}{4a}\ (\star).$$

La première équation n'a pas de solution car nous avons déjà établi que N ne s'annule pas. La seconde est équivalente après simplifications à

$$\frac{1}{N_0} - 2a = 0,$$

condition non vérifiée sous l'hypothèse $0 < N_0 < \frac{1}{4a}$. Enfin, intéressons-nous à la dernière.

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-t/2} + 2a} = \frac{1}{4a} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-\frac{t}{2}} + 2a = 4a \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{N_0} - 2a\right)e^{-\frac{t}{2}} = 2a \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{2}} = \frac{2a}{\frac{1}{N_0} - 2a} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{t = -2\ln\left(\frac{2a}{\frac{1}{N_0} - 2a}\right).}
\end{aligned}$$

Reste à constater que la solution obtenue est bien positive. En effet, c'est le cas si

$$\frac{2a}{\frac{1}{N_0}-2a}<1 \iff \frac{1}{\frac{1}{2aN_0}-1}<1 \iff 0<N_0<\frac{1}{4a}.$$

9. Il s'agit de constater que $\frac{1}{2}\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} N(t)=N(t_0)$. Or, t_0 a été calculé comme l'unique solution de l'équation $N(t)=\frac{1}{4a}$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} N(t)=\frac{1}{2a}$. On en déduit alors l'égalité demandée.

10. 10.1) Puisque $N(t_0)=\frac{1}{4a}$, on a :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)e^{-\frac{1}{2}t_0}+2a}=\frac{1}{4a}$$

$$e^{t_0/2}=\boxed{\frac{1}{2aN_0}-1}.$$

Nous nous servirons dans la suite plutôt de e^{t_0}, qui s'obtient en élevant au carré l'égalité précédente :

$$e^{t_0}=\left(\frac{1}{2aN_0}-1\right)^2.$$

10.2) La fonction N n'est pas, dans la forme de l'énoncé, facilement primitivable. Cependant multiplions numérateur et dénominateur par $e^{t/2}$, on obtient pour tout $t\in\mathbf{R}^+$:

$$N(t)=\frac{e^{t/2}}{\frac{1}{N_0}-2a+2ae^{t/2}},$$

qui se primitive alors en une fonction notée $\widehat{N}$ et définie pour tout $t\in\mathbf{R}^+$ par :

$$\widehat{N}(t)=\frac{1}{a}\ln\left|\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)+2ae^{t/2}\right|.$$

Mais comme $\frac{1}{N_0}-2a\geqslant 0$ (conséquence de l'hypothèse $0<N_0<\frac{1}{4a}$), et $2ae^{t/2}\geqslant 0$, on peut enlever la valeur absolue. On obtient alors comme primitive :

$$\boxed{\widehat{N}:t\in\mathbf{R}^+\longrightarrow\frac{1}{a}\ln\left(\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)+2ae^{t/2}\right)}.$$

10.3) La valeur moyenne de la taille de la population est

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t_0}\int_0^{2t_0}N(t)\,dt&=\frac{1}{2t_0}\left[\widehat{N}\right]_0^{2t_0}\\&=\frac{1}{2at_0}\ln\left[\frac{\left(\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)+2ae^{2t_0/2}\right)}{\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)+2a}\right]\\&=\frac{1}{2at_0}\ln\left[\frac{\left(\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)+2a\left(\frac{1}{2aN_0}-1\right)^2\right)}{\left(\frac{1}{N_0}-2a\right)+2a}\right]\\&=\frac{1}{2at_0}\ln\left(1-2aN_0+2aN_0\left(\frac{1}{(2aN_0)^2}+1-\frac{1}{aN_0}\right)\right)\\&=\frac{1}{2at_0}\ln\left(\frac{1}{2aN_0}-1\right)=\frac{1}{2at_0}\ln\left(e^{\frac{t_0}{2}}\right)=\frac{1}{4a}.\end{aligned}$$

Développement du carré

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{2t_0}\int_0^{2t_0}N(t)\,dt=\frac{1}{2}\lim_{t\longrightarrow\infty}N(t)}.$$

Partie III — Modèle discret structuré en âge

11. L'effectif total est déterminé par les effectifs de chaque classe d'âge. Plus précisément, $\boxed{n_s=n_{s,1}+\cdots+n_{s,p}.}$

12. 12.1) Nous avons ici deux classes d'âge donc $p=2$. De plus, d'après l'énoncé une souris ne survit pas plus de 2 ans, donc $\boxed{P_2=0 \text{ et } P_1=0,25.}$ On a aussi $\boxed{F_1=1, F_2=8.}$

12.2) Le nombre de souris juveniles au temps suivant est donné par la somme du :

- nombre de naissances parmi les souris adultes, sachant qu'il y en avait $n_{s,2}$ avant et que chacune d'entre elles donne 8 enfants nous en avons donc $8n_{s,2}$ au temps suivant.
- Et du nombre de naissances des juvéniles (1 en moyenne et il y en avait $n_{s,1}$.

D'où la relation de récurrence

$$\boxed{n_{s+1,1} = n_{s,1} + 8n_{s,2}}.$$

La deuxième identité s'établit de la même manière en rappelant que les souris de la deuxième classe meurent ensuite, donc le nombre de souris dans la seconde classe dépend simplement du nombre de juvéniles au temps précédent.

12.3) On obtient, pour ce modèle, une matrice de Leslie donnée par $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}}$.

12.4) D'après le tableau nous semblons avoir :

$$\boxed{\lim_{s\longrightarrow\infty} \frac{n_{s,1}}{n_s} = 0,89, \quad \lim_{s\longrightarrow\infty} \frac{n_{s,2}}{n_s} = 0,11.}$$

12.5) Un calcul d'éléments propres donne :

$$\boxed{A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

12.6) Récurrence sur $s \in \mathbf{N}$.

■ **Initialisation.** La propriété est évidemment vérifiée pour $s = 0$ puisque $N_0 = I_2 N_0$.

■ **Hérédité.** Supposons-là vraie au rang s. Alors $N^{s+1} = NN^s N_0 = NN^s N_0 = N^{s+1} N_0$. Donc par principe de récurrence, nous avons montré que :

$$\boxed{\forall s \in \mathbf{N}, \quad N^s = A^s N_0.}$$

12.7) Un calcul de déterminant montre que $P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$. Donc

$$A^s = PD^sP^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^s & 0 \\ 0 & (-1)^s \end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel on trouve

$$A^s = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8.2^s - 4(-1)^{s+1} & 8.2^{s+2} - 32(-1)^s \\ 2^s + (-1)^{s+1} & 2^{s+2} + 8(-1)^s \end{pmatrix}.$$

Puis, en tenant compte de $N_s = A^s N_0$, avec $N_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$n_{s,1} = \frac{20}{12}\left(8.2^s - 4(-1)^{s+1}\right) = \boxed{\frac{40}{3}2^s + \frac{20}{3}(-1)^s}$$

$$n_{s,2} = \frac{20}{12}\left(2^s + (-1)^{s+1}\right) = \boxed{\frac{5}{3}(2^s - (-1)^s).}$$

Puis l'expression de n_s en sommant les deux quantités précédentes.

12.8) L'idée est par exemple de se baser sur les valeurs des limites des quotients $\frac{n_{s,1}}{n_s}$ et $\frac{n_{s,2}}{n_s}$ lorsque $s \longrightarrow \infty$. Divisons les deux lignes du modèle par n_s :

$$\begin{cases} \frac{n_{s+1}}{n_s}\frac{n_{s+1,1}}{n_{s+1}} & = \frac{n_{s,1}}{n_s} + K_1\frac{n_{s,2}}{n_s} \\ \frac{n_{s+1}}{n_s}\frac{n_{s+1,2}}{n_{s+1}} & = K_2\frac{n_{s,1}}{n_s} \end{cases}.$$

Alors en passant à la limite en $s \longrightarrow \infty$ et en conjecturant

$$\frac{n_{s+1}}{n_s} \xrightarrow{s\longrightarrow\infty} 2, \quad \frac{n_{s,1}}{n_s} \xrightarrow{s\longrightarrow\infty} 0,89, \quad \frac{n_{s,2}}{n_s} \xrightarrow{s\longrightarrow\infty} 0,11,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} 2 \times 0,89 & = 0,89 + K_1 0,11, \\ 2 \times 0,11 & = K_2 \times 0,89. \end{cases}$$

Système que l'on peut ensuite résoudre en (K_1, K_2) pour avoir une valeur approchée des constantes.

13. **13.1)** La quantité $n_{s+1,1}$ est l'effectif de la classe d'âge C_1 après $(s+1)$ unités de temps. Or dans C_1 se trouvent exactement tous ceux qui viennent de naitre (en nombre F_i depuis la classe C_i pour tout i) entre l'instant s et l'instant $s+1$. Il faut noter que les éléments qui étaient dans C_1 après s unités de temps sont, un instant plus tard, soit morts, soit dans C_2, en tout cas ils ne sont plus dans C_1. Ainsi : $\boxed{n_{s+1,1} = n_{s,1}F_1 + n_{s,2}F_2 + \ldots + n_{s,p}F_p = \sum_{i=1}^{p} n_{s,i}F_i.}$

13.2) Soit $i \in [\![2\,,\,p-1]\!]$. Alors $n_{s+1,i}$ est le nombre d'individus de la classe C_{i-1} qui survivent entre les instants s et $s+1$. Numérotons les individus de C_{i-1} et notons $X_1,\ldots,X_{n_{s,i-1}}$ des variables aléatoires indépendantes à support $\{0,1\}$, qui valent 1 si l'individu d'indice associé survit, et 0 sinon. Alors :

$$n_{s+1,i} = \sum_{k=1}^{n_{s,i-1}} X_k = n_{s,i-1}\left(\frac{1}{n_{s,i-1}}\sum_{k=1}^{n_{s,i-1}} X_k\right).$$

D'après la loi faible des grands nombres, le terme entre parenthèse est, puisque l'effectif est supposé grand, proche de l'espérance commune des X_k, *i.e.* P_{i-1} d'après l'énoncé. En conclusion, l'approximation proposée repose sur $\boxed{\text{la loi faible des grands nombres.}}$ La dernière classe d'age C_p est à part puisqu'en plus des éléments de C_{p-1} qui peuvent passer dans la classe C_p, il faut ajouter les éléments de C_p qui survivent et qui restent donc dans C_p.

13.3) Résumons :

$$\left\{\begin{aligned}
n_{s+1,1} &= F_1 \times n_{s,1} + F_2 \times n_{s,2} + F_3 \times n_{s,3} + \ldots + F_{p-1} \times n_{s,p-1} + F_p \times n_{s,p}\\
n_{s+1,2} &= P_1 \times n_{s,1} + 0 \times n_{s,2} + 0 \times n_{s,3} + \ldots + 0 \times n_{s,p-1} + 0 \times n_{s,p}\\
n_{s+1,3} &= 0 \times n_{s,1} + P_2 \times n_{s,2} + 0 \times n_{s,3} + \ldots + 0 \times n_{s,p-1} + 0 \times n_{s,p}\\
&\;\;\vdots\\
n_{s+1,i} &= 0 \times n_{s,1} + \ldots + 0 \times n_{s,i-2} + P_{i-1} \times n_{s,i-1} + 0 \times n_{s,i} + \ldots + 0 \times n_{s,p}\\
&\;\;\vdots\\
n_{s+1,p-1} &= 0 \times n_{s,1} + \ldots + 0 \times n_{s,p-3} + P_{p-2} \times n_{s,p-2} + 0 \times n_{s,p-1} + 0 \times n_{s,p}\\
n_{s+1,p} &= 0 \times n_{s,1} + \ldots\ldots + 0 \times n_{s,p-2} + P_{p-1} \times n_{s,p-1} + P_p \times n_{s,p}
\end{aligned}\right.$$

On traduit ceci matriciellement :

$$\boxed{N_{s+1} = MN_s \text{ avec } M = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_{p-1} & F_p\\ P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & P_2 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & P_{p-2} & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & P_{p-1} & P_p \end{pmatrix}.}$$

14. **(Les drosophiles)**

14.1) Ici il y a trois classes d'âge donc, d'après la question précédente : $N_{s+1} = AN_s$ avec A la matrice d'ordre 3 qui est donnée par : $A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3\\ P_1 & 0 & 0\\ 0 & P_2 & P_3\end{pmatrix}$ Avec les données de l'énoncé on a bien :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12\\ \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}}.$$

14.2) i) Soit λ un réel.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3 &= \begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 13 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow 4\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 13-4\lambda^2 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_2+\lambda\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 \\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 13-4\lambda^2 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3, \\
&\underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & \mathrm{P}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_3-(13-4\lambda^2)\mathrm{L}_2
\end{aligned}$$

où $\mathrm{P}(\lambda) = 12-(13-4\lambda^2)(-2\lambda) = 2(6+13\lambda-4\lambda^3)$. Ainsi $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible si et seulement si λ est une racine de P, c'est à dire une racine de $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 4\mathrm{X}^3-13\mathrm{X}-6$. On remarque que : $\mathrm{Q}(2) = 4\times 8-13\times 2-6 = 0 = \mathrm{Q}(-1/2)$, qui sont les deux racines fournies par l'énoncé. On cherche enfin λ tel que :

$$-8(\mathrm{X}-2)\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)(\mathrm{X}-\lambda) = 2(6+13\mathrm{X}-4\mathrm{X}^3).$$

En évaluant par exemple en 1 et en résolvant l'équation on trouve $\lambda = -\frac{3}{2}$. En conclusion : $\boxed{\text{A possède trois valeurs propres : } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\tfrac{3}{2},\ \lambda_3 = -\tfrac{1}{2}.}$ On les a bien numérotées de façon à ce que $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.
Puisque A est une matrice d'ordre 3 et que A possède trois valeurs propres distinctes : $\boxed{\text{A est diagonalisable.}}$

ii) Après opérations élémentaires sur les lignes nous avons obtenu que la réduite de Gaußde $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & \mathrm{P}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

On recherche désormais une base des espaces propres en reprenant le système précédent.

— pour $\lambda = 2$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_2(\mathrm{A})$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x-8y = 0 \\ y-4z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} \in \boxed{\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

— pour $\lambda = -\frac{3}{2}$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_{-\frac{3}{2}}(\mathrm{A})$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x+6y = 0 \\ y+3z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} \in \boxed{\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

— pour $\lambda = -\frac{1}{2}$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{A})$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x+2y = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \in \boxed{\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Les vecteurs $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3$ étant trois vecteurs propres pour la même matrice A associés à trois valeurs propres distinctes, la famille $\mathscr{V}$ =

(V_1, V_2, V_3) est forcément libre. De plus cette famille contient trois vecteurs de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et la dimension de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ est égale à 3, donc : $\boxed{\text{La famille } \mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de } \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R}).}$

14.3) i) On sait que $AV_i = \lambda_i V_i$. Une récurrence immédiate prouve que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$ pour tout entier $s \in \mathbf{N}$. Donc :

$$\begin{aligned} N_s &= A^s N_0 \\ &= A^s(c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3) \\ &= c_1A^sV_1 + c_2A^sV_2 + c_3A^sV_3 \\ &= (\lambda_1^s c_1)V_1 + (\lambda_2^s c_2)V_2 + (\lambda_3^s c_3)V_3. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall s \in \mathbf{N}, \quad N_s = (\lambda_1^s c_1)V_1 + (\lambda_2^s c_2)V_2 + (\lambda_3^s c_3)V_3.}$$

ii) On a alors : $N_s = \lambda_1^s(c_1V_1 + \varepsilon_s)$. avec : $\varepsilon_s = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s c_2V_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s c_3V_3$. Or $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{s\to\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s = \lim\limits_{s\to\infty} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s = 0$. Ainsi on a bien : $\boxed{N_s = \lambda_1^s(c_1V_1 + e_s) \text{ avec les coefficients de } \varepsilon_s \text{ qui tendent tous vers } 0 \text{ quand } s \text{ tend vers } +\infty.}$

iii) On a, en notant $\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{s,1} \\ \varepsilon_{s,2} \\ \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$:

$$N_s = \lambda_1^s \begin{pmatrix} 32c_1 + \varepsilon_{s,1} \\ 4c_1 + \varepsilon_{s,2} \\ c_1 + \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit :

$$\boxed{n_{s,1} = \lambda_1^s(32c_1 + \varepsilon_{s,1})}, \quad \boxed{n_{s,2} = \lambda_1^s(4c_1 + \varepsilon_{s,2})},$$

$$\boxed{n_{s,3} = \lambda_1^s(c_1 + \varepsilon_{s,3}).}$$

Remarquons que c_1 est non nul. En effet, si $c_1 = 0$ on aurait : $N_s = (-3/2)^s c_2V_2 + (-1/2)^s c_3V_3$, ce qui rendrait des coordonnées de N_s négatives pour certaines valeurs de s, ce qui est absurde (on signale aussi que c_1, c_2, c_3 ne peuvent pas être tous nuls sinon la population est réduite à 0 individus dès le départ). On a ainsi, lorsque $s \to +\infty$:

— $\frac{n_{s,1}}{n_{s,3}} = \frac{\lambda_1^s(32c_1+\varepsilon_{s,1})}{\lambda_1^s(c_1+\varepsilon_{s,3})} \xrightarrow{s\to\infty} \frac{32c_1}{c_1} \boxed{= 32}$. — $\frac{n_{s,2}}{n_{s,3}} = \frac{\lambda_1^s(4c_1+\varepsilon_{s,2})}{\lambda_1^s(c_1+\varepsilon_{s,3})} \xrightarrow{s\to\infty} \frac{4c_1}{c_1} \boxed{= 4}$.

Interprétation : en temps long il y aura environ 32 fois plus d'individus dans la première classe que dans la dernière, et environ 4 fois plus d'individus dans la seconde classe que dans la dernière.

Partie IV — Modèle discret structuré en âge

15. La fonction $f : a \in [0, a_\dagger] \longrightarrow n_{s,\leq a}$ est pour tout s une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si f est solution, alors par continuité de f, on a en dérivant par rapport à a : $f(s,a) = \frac{dn_{s,\leq a}}{da}$. Inversement, puisque $n_{s,\leq 0} = 0$, nous avons bien la relation

$$n_{s,\leq a} = \int_0^a f(s,b)\,db.$$

16. Simple application de la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} n_{s,[a_1,a_2]} &= n_{s,\leq a_2} - n_{s,\leq a_1} \\ &= \int_0^{a_2} f(s,b)\,db - \int_0^{a_1} f(s,b)\,db, \\ &= \boxed{\int_{a_1}^{a_2} f(s,b)\,db.} \end{aligned}$$

17. $f(0,t)$ représente la densité de population d'âge nul au temps t. Découpons l'intervalle $[0, a_\dagger]$ en intervalles de même longueur de bornes $a_k = \frac{k}{n} a_\dagger$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, d'après la méthode des rectangles,

$$f(0,t) = \int_0^{a_\dagger} F(a) f(t,a)\,da \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(a_k)\left(\frac{a_\dagger}{n} f(t,a_k)\right).$$

Rappelons que $\frac{a_\dagger}{n}$ correspond à la largeur de la subdivision, la quantité $\frac{a_\dagger}{n} f(t,a_k)$ correspond alors à une approximation d'un nombre d'individus d'âge entre a_k et a_{k+1}. Ainsi, $F(a_k)\left(\frac{a_\dagger}{n} f(t,a_k)\right)$ serait le nombre d'enfants des individus de classe d'âge $[a_k, a_{k+1}]$, qui est donc égal à $f(0,t)$ la densité de population d'âge 0. Cela légitime la terminologie taux de reproduction.

18. D'après le raisonnement fait précédemment, l'équation ($\star$) est analogue à l'équation de 13.1) donnant le nombre d'individus de la première classe en fonction des enfants des autres.

19. Soit $t \in [0, a_\dagger - c]$.

19.1) En utilisant la formule de la chaîne, applicable puisque f et $t \longmapsto (t, t+c)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial a}(t, t+c) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, t+c) \\ &= -\mathrm{M}(t+c) f(t, t+c) \quad \text{EDP de l'énoncé} \\ &= \boxed{-\mathrm{M}(t+c) g(t).} \end{aligned}$$

19.2) Ainsi, g est solution d'une équation différentielle linéaire. Et le cours nous livre la solution, puisque $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \mathrm{M}(s+c)\,\mathrm{d}s$ est une primitive de $t \longmapsto \mathrm{M}(t+c)$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathrm{K} \exp\left(-\int_0^t \mathrm{M}(s+c)\,\mathrm{d}s\right),\ \mathrm{K} \in \mathbf{R} \\ &= \Phi(c) \exp\left(-\int_0^t \mathrm{M}(s+c)\,\mathrm{d}s\right) \quad \text{condition initiale} \end{aligned}$$

Solution (exercice 1.6)

(Énoncé : 30)

1. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{(y-1)\ln t}$ est, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ une fonction continue positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, l'intégrale associée est éventuellement généralisée en 0. De plus

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1 - x < 1 \iff x > 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{t^x}{x}\right]_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2^x} - \varepsilon^x\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \displaystyle\int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2 - \ln \varepsilon & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Par opérations sur les limites quand $\varepsilon \to 0$, on retrouve la convergence de l'intégrale si et seulement si $x > 0$. Or, en utilisant l'équivalent, on obtient pour t assez grand,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{t^{1-x}} \leqslant t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{t^{1-x}},$$

donc par théorème de comparaison sur les fonctions positives, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff x > 0.}$$

2. Faisons le changement de variable affine $u = 1 - t$, licite car l'application $t \longmapsto 1 - t$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ strictement monotone de $[0, 1/2]$ vers $[1/2, 1]$. Alors, en cas de convergence des deux intégrales, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{1/2} (1-u)^{x-1} u^{y-1}(-\mathrm{d}u) \\ &= \boxed{\int_{1/2}^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

De plus, la formule de changement de variable précise que les natures des deux intégrales sont les mêmes.

3. Par définition d'une intégrale convergente sur un intervalle du type $]a, b[$ avec $a < b$ deux réels, nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ \iff\ & \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,\ \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ convergent,} \quad \text{question précédente en échangeant } x \text{ et } y \\ \iff\ & \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{1/2} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad \text{première question} \\ \iff\ & \boxed{x > 0, y > 0.} \end{aligned}$$

4. Il s'agit de vérifier les différentes hypothèses d'une densité de probabilité.

4.1) La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est une fonction continue positive (car notamment la fonction B est positive en tant qu'intégrale d'une fonction positive) sauf éventuellement en 0 et 1.

4.2) De plus, $\int_{\mathbf{R}} f_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_0^1 \left(\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Or, d'après les questions précédentes, cette intégrale converge puisque $\alpha,\beta \in \mathbf{R}^{+,\star}$. Par linéarité de l'intégrale, elle vaut $\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\mathrm{B}(\alpha,\beta) = 1$.

Soit X une variable aléatoire associée à cette densité. Alors X admet une espérance si et seulement si

$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 \left|x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right| \mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

Ceci est équivalent à la convergence de $\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$, qui converge d'après les questions précédentes si et seulement si $\alpha - 1 > 0, \beta > 0$, *i.e.* $\boxed{\alpha > 1, \beta > 0.}$ De plus, par définition de la fonction B :

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}}.$$

Solution (exercice 1.7)

(Énoncé : 30) La fonction admet des dérivées partielles secondes en tant que composée de telles fonctions. De plus, pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x+y)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(2x+y)^2}.$$

On peut ensuite redériver :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2.2(2x+y).2}{(1+(2x+y)^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(2x+y)}{(1+(2x+y)^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{-2.2(2x+y)}{(1+(2x+y)^2)^2}.$$

Ainsi, les dérivées partielles secondes de f sont continues car produits et inverses de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

Solution (exercice 1.8)

(Énoncé : 30)

1. L'ensemble des fonctions F vérifiant la condition est l'ensemble des fonctions du type :

$$\mathrm{F}(u,v) = v\mathrm{C}(u) + \mathrm{D}(u), \qquad \mathrm{C},\mathrm{D} \text{ dérivables.}$$

2. Dérivons l'identité $\mathrm{F}(\varphi(x,y)) = f(x,y)$ par rapport à x et par rapport) y. On notera plus simplement $(u,v) = \varphi(x,y)$ dans la suite au lieu de $(u(x,y), v(x,y)) = \varphi(x,y)$:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(u,v) - 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(u,v) \end{cases}}.$$

Puis on redérive.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(u,v) \\ &= 4\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v\partial u}(u,v) + 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v\partial u}(u,v) + 1\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v^2}(u,v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 1\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u^2}(u,v) - 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v\partial u}(u,v) - 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v\partial u}(u,v) + 4\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v^2}(u,v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u^2}(u,v) + 1\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v\partial u}(u,v) - 4\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v\partial u}(u,v) - 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v^2}(u,v). \end{cases}$$

3. En réécrivant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ à l'aide des dérivées partielles calculées précédemment, nous obtenons la bonne équation aux dérivées partielles. Donc $F(u,v) = vC(u) + D(u)$ avec C, D dérivables. Donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $\boxed{f(x,y) = (x-2y)C(2x+y) + D(2x+y).}$

Solution (exercice 1.9)

(Énoncé : 30) ...

Solution (problème 1.5)

(Énoncé : 31)

1. 1.1) L'ensemble $X_1(\Omega)$ est $\mathbf{N}$: en effet, l'alerte peut avoir lieu le premier jour ($\{X_1 = 0\}$ a alors lieu) ou bien le deuxième ($\{X_1 = 1\}$ a alors lieu) ou bien le troisième ($\{X_1 = 2\}$ a alors lieu)....). On note que la valeur de X_1 n'est pas définie si il n'y a jamais d'alerte. Cela n'est pas si gênant car on peut établir facilement que la probabilité de cet événement est de 0.
Soit k un élément de $X_1(\Omega)$, c'est-à-dire un entier naturel. Pour tout entier naturel i, on appelle A_i l'événement « Il y a une alerte le i-ième jour ». $\{X_1 = k\}$ est donc, par définition, l'événement ${}^{C}A_1 \cap \cdots \cap {}^{C}A_k \cap A_{k+1}$. Par mutuelle indépendance, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 = k) &= \mathbf{P}({}^{C}A_1 \cap \cdots \cap {}^{C}A_k \cap A_{k+1})\\ &= \mathbf{P}({}^{C}A_1) \times \cdots \times \mathbf{P}({}^{C}A_k) \times \mathbf{P}(A_{k+1})\\ &= (1-p)^k \times p\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{X_1(\Omega) = \mathbf{N} \text{ et, pour tout } k \in X_1(\Omega),\ \mathbf{P}(X_1 = k) = (1-p)^k p.}$

1.2) Donc $\boxed{(1+X_1)(\Omega) = \mathbf{N}^\star}$ et pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(1 + X_1 = k\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = k-1\right) = (1-p)^{k-1}p,$$

donc $\boxed{1 + X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p).}$

2. 2.1) Soit $(j,k) \in \mathbf{N}^2$, on distingue deux cas :

- Si $k < j$ alors, comme la seconde alerte doit avoir lieu après la première, on en déduit que $\mathbf{P}(X_2 = k | X_1 = j) = 0$.
- Si $k \geq j$ et si $\{X_1 = j\}$ a lieu alors $\{X_2 = k\}$ aura lieu si et seulement si on a $k - j$ jours sans alerte après la première puis la seconde alerte. On en déduit (en raisonnant comme dans la première question) que $\mathbf{P}(X_2 = k | X_1 = j) = (1-p)^{k-j}p$ si $k \geq j$.

$$\boxed{\text{On a donc prouvé que : } \mathbf{P}(X_2 = k | X_1 = j) = \begin{cases}(1-p)^{k-j}p & \text{si } k \geq j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.}$$

2.2) $X_2(\Omega)$ est $\mathbf{N}$: en effet, on peut avoir lieu une alerte le premier jour et le deuxième jour ($\{X_2 = 0\}$ a alors lieu) ou bien une alerte le premier jour, rien le deuxième jour et une alerte le troisème jour ($\{X_2 = 1\}$ a alors lieu).... On note de nouveau que la valeur de X_2 n'est pas définie s'il n'y a jamais de deuxième alerte. Cela n'est pas si gênant car on peut établir facilement que la probabilité de cet événement est de 0.

2.3) Soit k un élément de $X_2(\Omega)$, c'est-à-dire un entier naturel. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_2 = k\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_2 = k | X_1 = j) \times \mathbf{P}(X_1 = j)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{k}(1-p)^{k-j}p \times \mathbf{P}(X_1 = j)\right) + \sum_{j=k+1}^{+\infty} 0 \times \mathbf{P}(X_1 = j) && \textit{d'après la question précédente}\\ &= \sum_{j=0}^{k}(1-p)^{k-j}p \times (1-p)^j \times p && \textit{d'après la première question}\\ &= \sum_{j=0}^{k}(1-p)^k p^2\\ &= (k+1)q^k p^2\end{aligned}$$

$\boxed{X_2(\Omega) \text{ est } \mathbf{N} \text{ et, pour tout } k \in X_2(\Omega),\ \mathbf{P}(X_2 = k) = (k+1)q^k p^2.}$

Partie I — Généralisation de la situation précédente On généralise l'étude précédente et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant une n-ième alerte.

3. 3.1) On introduit, pour tout entier naturel k, l'hypothèse $\mathscr{P}_k$ suivante : « $\binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j}$. »

■ **Initialisation.** $\mathbf{P}(0)$ vraie est une évidence puisque $\binom{n}{0} = 1$ et $\sum_{j=0}^{0} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n-1}{0}$ donc $\sum_{j=0}^{0} \binom{n+j-1}{j} = 1$ et donc $\binom{n+0}{0} = \sum_{j=0}^{0} \binom{n+j-1}{j}$.

■ **Hérédité.** Supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un certain entier naturel k. Par la formule de Pascal, comme n est un entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned}\binom{n+k+1}{k+1} &= \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k} \\ &= \binom{n+k}{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} \quad \text{d'après } \mathscr{P}_k \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j-1}{j}\end{aligned}$$

$\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie si $\mathscr{P}_k$ l'est. On a donc prouvé que : $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j}.}$

3.2) On introduit, pour tout entier naturel non nul n, l'hypothèse $\mathscr{P}_n$ suivante « pour tout entier naturel k, $\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n$ ».

■ **Initialisation.** $\mathscr{P}_0$ vraie puisque d'après la question 1)1), pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k) &= (1-p)^k p \\ &= \binom{1+k-1}{k} q^k p^n. \quad \text{car } \binom{k}{k} = 1\end{aligned}$$

■ **Hérédité.** Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. Fixons k et j deux entiers naturels. En effectuant le même raisonnement que dans la question 2)1) de la partie I, on obtient que :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k | \mathrm{X}_n = j) = \begin{cases} (1-p)^{k-j} p & \text{si } k \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui donne par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k | \mathrm{X}_n = j) \times \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = j) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k} (1-p)^{k-j} p \times \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = j) \right) + \sum_{j=k+1}^{+\infty} 0 \times \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} q^{k-j} p \times \binom{n+j-1}{j} q^j p^n \quad \text{d'après } \mathscr{P}_n \\ &= q^k p^{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} \quad \text{d'après la question 1)1) de la partie II} \\ &= q^k p^{n+1} \binom{n+k}{k}.\end{aligned}$$

ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie si $\mathscr{P}_n$ l'est. On a donc prouvé que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier naturel non nul n, $\mathscr{P}_n$ implique $\mathscr{P}(n+1)$. $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n non nul d'après le principe de récurrence. Par principe de récurrence, on a donc prouvé que : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n, \text{ pour tout entier naturel } k, \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n.}$

4. 4.1) On introduit, pour tout entier naturel non nul n, l'hypothèse $\mathscr{P}_n$ suivante : « Si $\left(\mathrm{X}_1^{(i)}\right)_{i \in [\![1\,,\,n]\!]}$ est une famille de n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que $\mathrm{X}_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p)$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ alors $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p)$. »

■ **Initialisation.** $\mathbf{P}(1)$ est vraie. En effet, supposons que $\mathrm{X}_1^{(1)}$ est une variable aléatoire telle que $\mathrm{X}_1^{(1)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p)$ alors $\mathrm{X}_1^{(1)}(\Omega) = \mathbf{N}$ et pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_1^{(1)} = k\right) &= (1-p)^k p \\ &= \binom{1+k-1}{k} q^k p^n \text{car} \binom{k}{k} = 1\end{aligned}$$

autrement dit $\mathrm{X}_1^{(1)} \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(1,p)$. On a donc finalement prouvé que si $\left(\mathrm{X}_1^{(i)}\right)_{i \in \{1\}}$ est une famille de $n = 1$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que $X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p)$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ alors $\sum_{i=1}^{1} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(1,p)$, soit $\mathbf{P}(1)$. $\boxed{\mathbf{P}(1) \text{ est effectivement vraie.}}$

■ **Hérédité.** Soit $\left(X_1^{(i)}\right)_{i\in[\![1\,,\,n+1]\!]}$ est une famille de $n+1$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors $\sum_{k=1}^{n} X_1^{(k)}$ et $X_1^{(n+1)}$ sont indépendantes car $\sum_{k=1}^{n} X_1^{(k)}$ est une fonction de $\left(X_1^{(i)}\right)_{i\in[\![1\,,\,n]\!]}$, famille à laquelle n'appartient pas $X_1^{(n+1)}$. Par mutuelle indépendance de la famille $\left(X_1^{(i)}\right)_{i\in[\![1\,,\,n+1]\!]}$ et le lemme des coalitions, on sait que : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} X_1^{(k)} \text{ et } X_1^{(n+1)} \text{ sont indépendantes.}}$

4.2) Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. Soit $\left(X_1^{(i)}\right)_{i\in[\![1\,,\,n+1]\!]}$ est une famille de $n+1$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que $X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p)$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Comme $X_1^{(n+1)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p)$ alors $X_1^{(n+1)}(\Omega) = \mathbf{N}$. Par hypothèse, $\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p)$ donc $\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)}(\Omega) = \mathbf{N}$. Par indépendance (d'après la question précédente), on a donc $\left(X_1^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)}\right)(\Omega) = \mathbf{N}$, soit $\sum_{i=1}^{n+1} X_1^{(i)}(\Omega) = \mathbf{N}$. Fixons k un entier naturel. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_1^{(i)} = k\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_1^{(i)} = k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = j\right) \times \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X_1^{(n+1)} = k - j \,|\, \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = j\right) \times \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X_1^{(n+1)} = k - j\right) \times \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = j\right) \quad \textit{par indépendance} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}\left(X_1^{(n+1)} = k - j\right) \times \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathrm{P}\left(X_1^{(n+1)} = k - j\right) \times q^j p^n \binom{n+j-1}{j} \quad \textit{HR} \\
&= \sum_{j=0}^{k} q^{k-j} p \times q^j p^n \binom{n+j-1}{j} \quad \textit{car } X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p) \\
&= q^k p^{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} \\
&= q^k p^{n+1} \binom{n+k}{k}. \quad \textit{d'après la question 1)2) de la partie II}
\end{aligned}$$

$\mathbf{P}(n+1)$ est donc vraie si $\mathscr{P}_n$ l'est. Par principe de récurrence, on a donc prouvé que :

$\boxed{\text{Si } \left(X_1^{(i)}\right)_{i\in[\![1\,,\,n]\!]} \text{ est une famille de } n \text{ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que } X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{-1}(p) \text{ pour tout } i \in [\![1\,,\,n]\!] \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p)}$

4.3) Si X_n et X_m (avec $m \in \mathbf{N}^*$) sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n,p)$ et $X_m \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(m,p)$ alors : $\boxed{X_n + X_m \hookrightarrow \mathscr{B}^{-1}(n+m,p).}$ Cela peut se justifier rapidement en décomposant X_n et X_m en sommes grâce aux questions précédentes, puis en utilisant le lemme des coalitions, mais cela n'était pas demandé.

Partie II — Une loi binomiale et une loi normale

5. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on note Y_m la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours avec alerte pendant les m premiers jours.

5.1) On a $\boxed{Y_{n+k} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+k, p).}$ En effet, appelons succès le fait d'avoir une alerte un jour donné. La probabilité d'un succès est toujours de p et on répète $n+k$ fois cette expérience (avoir ou non une alerte) de façons indépendantes et Y_{n+k} compte le nombre de succès. On sait que cela suffit pour affirmer que : $\boxed{Y_{n+k} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+k, p).}$

5.2) Les événements $\{X_n > k\}$ et $\{Y_{n+k} < n\}$ sont égaux; en effet :

$$\begin{aligned}\{X_n > k\} &= \{k+1 \text{ jours sans alerte avant la } n\text{-ième alerte}\}\\ &= \{\text{lors des } n+k \text{ premiers jours, on a eu strictement moins de} n \text{alertes}\}\\ &= \{Y_{n+k} < n\}.\end{aligned}$$

6. Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et Z_n une variable aléatoire réelle suivant une loi normale de paramètres la moyenne de X_n et la variance de X_n.

6.1) Comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n, p)$ on sait qu'on peut écrire :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)}$$

avec $\left(X_1^{(i)}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que $X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}(p)$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$. Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$. Comme $X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}(p)$, on sait que $1+X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et donc, d'après le cours, on peut affirmer que :

$$\mathbf{E}(1+X_1^{(i)}) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{Var}\left(1+X_1^{(i)}\right) = \frac{1-p}{p^2}$$

soit $\mathbf{E}(X_1^{(i)}) = \dfrac{1-p}{p}$ (par linéarité) et $\mathbf{Var}\left(X_1^{(i)}\right) = \dfrac{1-p}{p^2}$ (d'après le cours).

Comme $X_n = \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)}$, on a donc :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_1^{(i)}) \text{ par linéarité et } \mathbf{Var}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_1^{(i)}) \text{ par indépendance}$$

d'où, avec ce qu'on vient de dire, $\mathbf{E}(X_n) = \dfrac{nq}{p}$ et $\mathbf{Var}(X_n) = \dfrac{nq}{p^2}$. Or, on sait que Z_n une variable aléatoire réelle suivant une loi normale de paramètres la moyenne de X_n et la variance de X_n, Z_n suit donc une loi normale de paramètres $\dfrac{nq}{p}$ et $\dfrac{nq}{p^2}$, soit :

$$\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{nq}{p}, \frac{nq}{p^2}\right)}$$

6.2) Le théorème central limite dit que : Soient m un réel et σ un réel strictement positif. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, mutuellement indépendante admettant une moyenne m et un écart-type σ. Pour tout entier strictement positif n, on pose : $\overline{X_n} = \dfrac{\dfrac{(X_1 + \cdots + X_n)}{n} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Pour tout $(a, b) \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$ tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) = \mathbf{P}(a \leq N \leq b)$$

avec N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Appliquons ce théorème dans le premier cas. Soit $(W_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendante telle que, pour tout entier naturel non nul i, on ait :

$$W_i \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}(p).$$

On sait que $\sum_{i=1}^{n} W_i \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n, p)$. On peut donc décomposer X_n sous la forme $X_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$. La suite $(W_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est donc une suite de variables aléatoires de même loi, mutuellement indépendante admettant une moyenne $\dfrac{q}{p}$ et un écart-type $\dfrac{\sqrt{q}}{p}$. Pour tout entier strictement positif n, on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{\dfrac{(W_1 + \cdots + W_n)}{n} - \dfrac{q}{p}}{\dfrac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}$$

soit $\overline{X_n} = \dfrac{\dfrac{X_n}{n} - \dfrac{q}{p}}{\dfrac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}$. D'après le théorème central limite, $\left(P\left(a < \frac{\frac{X_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $P(a \leq N \leq b)$ avec N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, soit vers $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.
Appliquons ce théorème dans le deuxième cas. Soit $(W_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendante telle que, pour tout entier naturel non nul i, on ait :

$$W_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{p^2}\right).$$

On sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} W_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{nq}{p}, \frac{nq}{p^2}\right)$. On peut donc décomposer Z_n sous la forme $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} W_i$. $(W_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est donc une suite de variables aléatoires de même loi, mutuellement indépendante admettant une moyenne $\dfrac{q}{p}$ et un écart-type $\dfrac{\sqrt{q}}{p}$. Pour tout entier strictement positif n, on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{\dfrac{(W_1 + \cdots + W_n)}{n} - \dfrac{q}{p}}{\dfrac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}$$

soit $\overline{X_n} = \dfrac{\dfrac{Z_n}{n} - \dfrac{q}{p}}{\dfrac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}$. D'après le théorème central limite, $\left(\mathbf{P}\left(a < \frac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $\mathbf{P}(a \leq N \leq b)$ avec N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, soit vers $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

$$\boxed{\text{Ces deux suites convergent vers } \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.}$$

Solution (problème 1.6)

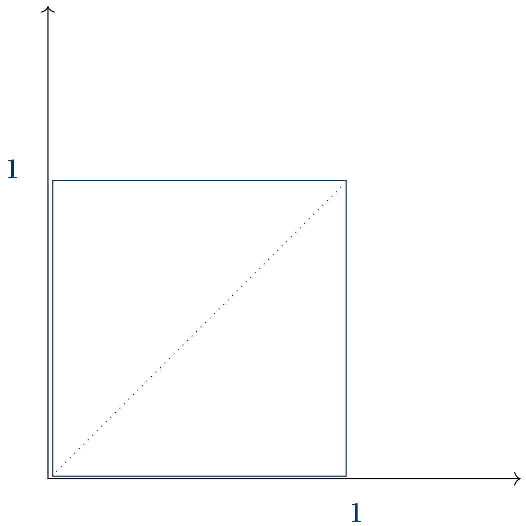
(Énoncé : 32)

Partie I — Étude de trois fonctions

1. Pour tout (x, y) dans $\mathbf{R}^2$, par quotient, on a :

$$(x,y) \in \mathscr{D}_1 \iff \begin{cases} x-y & \neq 0 \\ 0<x & <1 \\ 0<y & <1 \end{cases} \iff \begin{cases} y & \neq x \\ 0<x & <1 \\ 0<y & <1 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{D}_1$ est donc l'ensemble du carré OABC (avec O l'origine du plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,1)$ et $\mathrm{C}(0,1)$) privé de la première bissectrice.



Pour tout réel x, par composition, on a :

$$x \in \mathscr{D}_2 \iff (x, 1-x) \in \mathscr{D}_1 \iff \begin{cases} x & \neq 1-x \\ 0<x & <1 \\ 0<1-x & <1 \end{cases} \iff x \neq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0<x<1.$$

Donc $\boxed{\mathscr{D}_2 \text{ est donc } \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[.}$

2. 2.1) On admet que f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[^2$. Pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$, on a alors :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y - y^k \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^k - xky^{k-1}.}$$

On note $h : x \mapsto f_k(x, 1-x)$. Par composition, h est dérivable en $\frac{1}{2}$ et :

$$\begin{aligned} h'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) \\ &= k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(1-\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 2k\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \boxed{(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.} \end{aligned}$$

2.2) $h'\left(\frac{1}{2}\right)$ est par définition $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{h(x)-h\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right)$, soit $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{f_k(x,1-x)-f_k\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right)$. Or $f_k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{f_k(x,1-x)}{x-\frac{1}{2}}\right) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ce qui, en divisant par 2 des deux côtés donnent :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{f_k(x,1-x)}{x-(1-x)}\right) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

ce qui signifie précisément que $\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(\varphi_k(x)) = \frac{k-1}{2^k}.}$

2.3) Supposons $k \geq 2$. Par définition, pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}_1$, on a $y \neq 0$ (car $0 < y <$

1) et :

$$\begin{aligned}
xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} xy^{k-1} &= xy^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{x}{y}\right)^i \quad \text{car } y \neq 0 \\
&= \frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{k-1}}{1-\frac{x}{y}} xy^{k-1} \\
&= \frac{y\left(\frac{x}{y}\right)^{k-1} - y}{x-y} \times xy^{k-1} \\
&= \frac{x^{k-1}-y^{k-1}}{x-y} \times xy \\
&= g_k(x,y).
\end{aligned}$$

somme de termes géométriques

en reconnaissant une somme géométrique de raison différente de 1 car $y \neq x$

De plus, si $k = 1$ alors $g_k(x,y) = 0$ car $f_k(x,y) = 0$. Comme $k-2 < 0$ alors, comme cette somme a un ensemble d'indice vide, on a aussi $xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} = 0$ et donc de nouveau $g_k(x,y) = xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}$. *Petite imperfection de l'énoncé à ce niveau, il faudrait plutôt parler de «convention» lorsque* $k-2 < 0$. On a donc bien montré : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathscr{D}_1, \quad g_k(x,y) = xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}.}$

2.4) De la question précédente, on déduit que pour tout x dans $\mathscr{D}_2$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= g_k(x, 1-x) \\
&= x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i}
\end{aligned}$$

Ainsi, par propriété sur les sommes de limites, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}} (\varphi_k(x)) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-2-i} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&= \frac{1}{4}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&= (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}$$

Donc on a bien retrouvé que : $\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}} (\varphi_k(x)) = \frac{k-1}{2^k}.}$

3. Pour tout x dans $\mathscr{D}_2$, on a d'après une question précédente :

$$\varphi_k(x) = x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i}$$

Par somme, on constate que φ_k est continue sur $\mathscr{D}_2$. De plus, elle n'est pas définie en $\frac{1}{2}$ et y admet, d'après la question précédente, une limite finie qui est $\frac{k-1}{2^k}$. Pour toutes ces raisons, on en déduit que : $\boxed{\varphi_k \text{ est prolongeable par continuité en } \frac{1}{2} \text{ en posant } \varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2^k}.}$

4. **4.1)** Comme $|x| < 1$ et donc $|1-x| < 1$, on en déduit que :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(x^k\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\left((1-x)^k\right) = 0.$$

Or $\varphi_k(x) = \frac{x^k(1-x)-x(1-x)^k}{2x-1}$. Par somme, on en déduit : $\boxed{\text{On a donc : } \lim_{k\to+\infty}(\varphi_k(x)) = 0.}$

4.2) Supposons $k \geq 2$. On a vu que :

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i} \\
&= x(1-x)\left((1-x)^{k-2} + \sum_{i=1}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i}\right) \\
&= x(1-x)^{k-1} + x(1-x)\sum_{i=1}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i}
\end{aligned}$$

Or, par somme de termes positifs, on en déduit que $x(1-x)\sum_{i=1}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i}$ est positif. Ainsi, on a prouvé que : $\boxed{x(1-x)^{k-1} \leq \varphi_k(x) \text{ pour tout entier naturel } k \geq 2.}$

4.3) Fixons k un entier supérieur à 2. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1}(x) &= x(1-x)\sum_{i=0}^{k-1} x^i(1-x)^{k-1-i} \\
&= x(1-x)\left(\sum_{i=1}^{k-1} x^i(1-x)^{k-1-i} + (1-x)^{k-1}\right) && \textit{sortie du premier terme} \\
&= x(1-x)^k + x(1-x)\sum_{i=1}^{k-1} x^i(1-x)^{k-1-i} && \textit{On rentre } 1-x \textit{ dans la somme} \\
&= x(1-x)^k + x\sum_{i=1}^{k-1} x^i(1-x)^{k-i} && \textit{changement de variable «} j=i-1 \textit{»} \\
&= x(1-x)^k + x\sum_{j=0}^{k-2} x^{j+1}(1-x)^{k-j-1} \\
&= x(1-x)^k + x\,x(1-x)\sum_{j=0}^{k-2} x^j(1-x)^{k-2-j} \\
&= \boxed{x(1-x)^k + x\varphi_k(x).}
\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat souhaité. De plus, on se rend compte que :

$$x(1-x)(2x-1) = -2x^3+3x^2-x \quad \text{et} \quad x^2(1-x)-x(1-x)^2 = -2x^3+3x^2-x$$

ce qui prouve que $\frac{x^2(1-x)-x(1-x)^2}{2x-1} = x(1-x)$ et donc $\varphi_{1+1}(x) = x(1-x)^1 + x\varphi_1(x)$. La formule est donc également vérifiée pour $k = 1$. $\boxed{\text{Finalement, on a prouvé que : } \forall k \in \mathbf{N}^\star,\quad \varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x).}$

4.4) Soit k un entier non nul. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) &= x(1-x)^k + (x-1)\varphi_k(x) \\
&= (1-x)\left(x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x)\right).
\end{aligned}$$

Or $1-x$ est positif (car x appartient à $]0,1[$) et $x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x)$ est négatif d'après une question précédente donc, par produit, $\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \leq 0$ et donc : $\boxed{(\varphi_k(x))_{k\in\mathbf{N}^\star} \text{ est décroissante.}}$

4.5) D'après la question 4.3), on a :

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = x(1-x)^k + (x-1)\varphi_k(x)$$

ce qui donne, comme x n'est pas égal à 1, l'égalité suivante :

$$\varphi_k(x) = \frac{\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)}{x-1} + x(1-x)^{k-1}.$$

- Or $\left(\sum \frac{\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)}{x-1}\right)_{k\geqslant 1}$ converge car c'est une série télescopique et $(\varphi_k(x))_{k\in\mathbf{N}^\star}$ est une suite convergente d'après la question 4.1.
- De plus, $\left(\sum x(1-x)^{k-1}\right)$ est aussi une série convergente car c'est une série géométrique dont la raison, $1-x$, est strictement comprise entre -1 et 1.

Par somme, $\sum_{k\geq 1}\varphi_k(x)$ converge et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k(x) &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)}{x-1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x(1-x)^{k-1}\right) \\
&= \frac{\lim_{k\to+\infty}(\varphi_k(x)) - \varphi_1(x)}{x-1} + x\frac{1}{1-(1-x)} \\
&= \frac{0-0}{x-1} + x\frac{1}{x} \quad \text{d'après la question 4.1.} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k(x) \text{ existe donc et vaut } 1.}$

Partie II — Trois variables aléatoires réelles

5. 5.1) T_p donne le rang du premier succès en appelant succès le fait d'avoir "pile". Les expériences sont mutuellement indépendantes, la probabilité de succès vaut toujours p. De tout cela, on peut déduire : $\boxed{T_p \hookrightarrow \mathscr{G}(p).}$

5.2) Soit k un entier naturel non nul. Si f_1 a lieu alors $(T_{fp} = k+1)$ aura lieu si et seulement si $\{T_p = k\}$ a alors lieu. En effet, imaginons que f_1 ait lieu, on aura alors que des faces jusqu'au premier pile. Lors de ce premier pile, on aura alors à la fois la première apparition du pile mais aussi le premier motif face-pile. Entre l'événement f_1 et la première apparition du motif face-pile a donc lieu un événement de même probabilité que $(T_p = k)$.

$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbf{N}^\star, \text{ on a bien : } \mathbf{P}\left(T_{fp} = k+1 \middle| f_1\right) = \mathbf{P}(T_p = k).}$

5.3) Avec le système complet d'événements $\{p_1, f_1\}$ et la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(T_{fp} = k+1)\\
&= \mathbf{P}\left(T_{fp} = k+1 \middle| f_1\right)\mathbf{P}(f_1) + \mathbf{P}\left(T_{fp} = k+1 \middle| p_1\right)\mathbf{P}(p_1)\\
&= \mathbf{P}(T_p = k)(1-p) + p\mathbf{P}\left(T_{fp} = k+1 \middle| p_1\right).
\end{aligned}$$

question précédente

Si p_1 a lieu alors $(T_{fp} = k+1)$ aura lieu si et seulement si $(T_{fp} = k)$ a alors lieu. En effet, tout se passe comme si on ne démarrait pas du premier tirage mais du second, le premier étant pile et qu'on attendait alors la première apparition du motif face-pile. On obtient donc :

$$\mathbf{P}(T_{fp} = k+1) = \mathbf{P}(T_p = k)(1-p) + p\mathbf{P}\left(T_{fp} = k\right).$$

$\boxed{\text{On a prouvé que que pour tout entier naturel non nul } k, \text{ on a : } \mathbf{P}(T_{fp} = k+1) = p(1-p)^k + p\mathbf{P}(T_p = k).}$

5.4) Pour tout entier naturel non nul k, on appelle $\mathscr{P}_k$ la propriété $\mathscr{P}_k$: « $\mathbf{P}\left(T_{fp} = k\right) = \varphi_k(p)$ ». $\mathscr{P}_1$ est vraie car $\mathbf{P}\left(T_{fp} = 1\right) = 0$ (il faut faire au moins deux tirs pour avoir "face" puis "pile") et on a vu que φ_1 était la fonction nulle. On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour un certain entier naturel non nul k, montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est alors vraie. En appliquant en p le résultat de la question 4.3) de la partie précédente (possible car $0 < p < 1$) et d'après la question précédente, on sait que :

$$\mathbf{P}(T_{fp} = k+1) = p(1-p)^k + p\mathbf{P}(T_p = k) \quad \text{et} \quad \varphi_{k+1}(p) = p(1-p)^k + p\varphi_k(p).$$

Or, d'après $\mathscr{P}_k$, $\mathbf{P}(T_p = k) = \varphi_k(p)$. On en déduit que $p(1-p)^k + p\mathbf{P}(T_p = k) = p(1-p)^k + p\varphi_k(p)$ puis $\mathscr{P}_{k+1}$ en exploitant les égalités ci-dessus. $\mathscr{P}_1$ est vraie et pour tout entier naturel non nul k, $\mathscr{P}_k$ implique $\mathscr{P}_{k+1}$. La propriété $\mathscr{P}_k$ est donc vraie pour tout entier naturel non nul k d'après le principe de récurrence. On a donc prouvé : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } k, \text{ on a : } \quad \mathbf{P}\left(T_{fp} = k\right) = \varphi_k(p).}$

6. 6.1) L'événement « le motif "face pile" apparaît lors de l'expérience » est l'événement $\cup_{k=1}^{+\infty}\left(T_{fp} = k\right)$. Or, comme les $\left\{T_{fp} = k\right\}_{k \in \mathbf{N}^\star}$ sont deux-à-deux incompatibles, par σ-additivité d'une probabilité, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left\{T_{fp} = k\right\}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p)\\
&= \boxed{1.}
\end{aligned}$$

6.2) **(Supposons que $p = \frac{1}{2}$)** On a vu qu'on avait posé $\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2^k}$. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on sait, d'après le cours sur les séries géométriques dérivées, que $\left(\sum k\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ converge, car c'est $\left(\sum k(k-1)\frac{1}{2^k}\right)_{k\geqslant 1}$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^k} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}\\
&= 4\\
&= \boxed{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}}.
\end{aligned}$$

On a donc, dans ce cas, $\sum_{k=1}^{+\infty} k\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}$.

(Supposons que $p \neq \frac{1}{2}$) Par définition de φ_k, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1} k\varphi_k(p) &= \left(\frac{1}{2p-1}\sum_{k\geqslant 1} kp^k(1-p)\right) - \frac{1}{2p-1}\sum_{k\geqslant 1} kp(1-p)^k\\
&= \left(\frac{1}{2p-1}\sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(X = k)\right) - \frac{1}{2p-1}\sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(Y = k)
\end{aligned}$$

reconnaitre des lois géométriques

avec $X \hookrightarrow \mathscr{G}(1-p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. D'après le cours, X et Y admettent des espérances et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(X=k) = \frac{1-(1-p)}{1-p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(Y=k) = \frac{1-p}{p}.$$

On en déduit que, par somme, $\sum_{k\geq 1} k\varphi_k(p)$ converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\varphi_k(p) &= \left(\frac{1}{2p-1}\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(X=k)\right) - \frac{1}{2p-1}\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(Y=k)\\ &= \frac{1}{2p-1} \times \left(\frac{1-(1-p)}{1-p} + \frac{1-p}{p}\right)\\ &= \frac{p^2-(1-p)^2}{(2p-1)p(1-p)}\\ &= \boxed{\frac{1}{p(1-p)}.}\end{aligned}$$

7. 7.1) Avec le système complet d'événements $(f_1, p_1 \cap p_2, p_1 \cap f_2)$ et la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(T_{pp} = k+2)\\ &= \mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|f_1\Big)\mathbf{P}(f_1) + \mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|p_1\cap p_2\Big)\mathbf{P}(p_1\cap p_2)\\ &+ \mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|p_1\cap f_2\Big)\mathbf{P}(p_1\cap f_2)\\ &= (1-p)\mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|f_1\Big) + p^2\mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|p_1\cap p_2\Big)\\ &+ p(1-p)\mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|p_1\cap f_2\Big).\end{aligned}$$

par indépendance des tirs

Or, sachant $p_1 \cap p_2$, alors $T_{pp} = k+2$ n'aura pas lieu car on obtient alors le motif "pile pile" au deuxième rang et, comme k est non nul, pas en $k+2$. On a donc : $\mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|p_1\cap p_2\Big) = 0$. Par ailleurs, sachant f_1 a lieu alors $T_{pp} = k+2$ a lieu si et seulement si $T_{pp} = k+1$ a alors lieu. En effet, tout se passe comme si on ne démarrait pas du premier tirage mais du second, le premier étant face et qu'on attendait alors la première apparition du motif pile-pile. On a donc :

$$\mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|f_1\Big) = \mathbf{P}(T_{pp} = k+1).$$

Et enfin, si $p_1 \cap f_2$ a lieu alors $\Big\{T_{pp} = k+2\Big\}$ a lieu si et seulement si $\Big\{T_{pp} = k\Big\}$ a alors lieu. En effet, tout se passe comme si on ne démarrait pas du premier tirage mais du troisième, les deux premiers étant pile puis face et qu'on attendait alors la première apparition du motif pile-pile. On a donc :

$$\mathbf{P}\Big(T_{pp} = k+2\Big|p_1\cap f_2\Big) = \mathbf{P}(T_{pp} = k).$$

En rassemblant ces différents résultats, on obtient bien le résultat escompté :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } k, \text{ on a : } \mathbf{P}(T_{pp} = k+2) = (1-p)\mathbf{P}(T_{pp} = k+1) + p(1-p)\mathbf{P}(T_{pp} = k)}$$

7.2) Notons $P = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$.

- Son discriminant vaut $(1-p)^2 + 4p(1-p)$, soit $(1-p)(1+3p)$. Comme $0 < p < 1$, P a un discriminant strictement positif et a bien deux racines réelles distinctes.
- On calcule aisément $\mathbf{P}(1)$ et $\mathbf{P}(-1)$. On obtient :

  $$\mathbf{P}(-1) = 1 + (1-p)^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(1) = p^2.$$

  On constate que $P(-1)$ et $P(1)$ sont strictement positifs. Or, comme P est de degré 2 et de cœfficient dominant strictement positif, on sait qu'il est négatif entre ces racines. On en déduit que ses deux racines sont dans $]-1,1[$.
- Comme P est unitaire, on sait que son cœfficient constant est le produit de ses racines et que la somme de ses racines est l'opposé du terme du premier degré. Autrement dit :

  $$r_1 + r_2 = 1-p \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = -p(1-p).$$

Donc :

$$\boxed{\text{P admet deux racines distinctes } r_1 \text{ et } r_2 \text{ et } r_1 + r_2 = 1-p \text{ et } r_1 r_2 = -p(1-p).}$$

7.3) Pour tout entier naturel non nul k, on a : $\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k+2) = (1-p)\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k+1) + p(1-p)\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k)$. La suite $(\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k))_{k\in\mathbf{N}^\star}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est l'équation suivante : $x^2 = (1-p)x + p(1-p)$ d'inconnue x complexe. On vient de voir que cette équation avait deux racines r_1 et r_2. D'après le cours, il existe donc λ et μ deux réels tels que, pour tout entier naturel non nul k, on ait : $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.}$

7.4)
- Il est évident que $\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = 1) = 0$ (on a besoin d'au moins deux tirs pour avoir deux "pile" de suite). D'après la question précédente, on en déduit que $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$.
- Il est évident que $\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = 2) = p^2$ (($\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = 2$) a lieu signifie qu'on a eu deux "pile" de suite dès le début). D'après la question précédente, on en déduit que $\lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2$.

L'équation $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$ donne $\lambda r_1 r_2 + \mu r_2^2 = 0$ et $\lambda r_1^2 + \mu r_2 r_1 = 0$, soit, à l'aide de la question 3.2), les égalités suivantes :

$$\lambda p(1-p) = \mu r_2^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda r_1^2 = \mu p(1-p)$$

puis en ajoutant, en comparant à $\lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2$ et en signalant que $1-p \neq 0$, on obtient bien :

$$\lambda + \mu = \frac{p}{1-p}.$$

$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$ donne, avec $r_1 + r_2 = 1-p$ vu à la question 3.2), la relation suivante :

$$(\lambda+\mu)(1-p) = \lambda r_2 + \mu r_1$$

soit $\frac{p}{1-p} \times (1-p) = \lambda r_2 + \mu r_1$ puis le résultat attendu.

$\boxed{\text{On a : } \mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = 1) = 0,\ \mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = 2) = p^2 \text{ et } \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu = \frac{p}{1-p} \text{ et } \lambda r_2 + \mu r_1 = p.}$

8. 8.1) $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k) = 1$ implique, en reproduisant le raisonnement de la question 2.1), que $\boxed{\text{il est donc bien quasi-certain que le motif "pile pile" apparaisse lors de l'expérience.}}$

8.2) D'après le cours sur les séries géométriques dérivées, comme $|r_1| < 1$, on sait que $\sum_{k\geq 1} k r_1^k$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k r_1^k = \frac{r_1}{(1-r_1)^2}.$$

On raisonne de même avec $\sum_{k\geq 1} k r_2^k$. Par somme et en invoquant la question 3.3), on obtient que $\sum_{k\geq 1} k\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k)$ converge et :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{pp}} = k) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} r_1^k + \mu \sum_{k=1}^{+\infty} r_2^k \\
&= \frac{\lambda r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{\mu r_2}{(1-r_2)^2} \\
&= \frac{\lambda r_1 (1-r_2)^2 + \mu r_2 (1-r_1)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \\
&= \frac{(\lambda r_1 + \mu r_2) - 2 r_1 r_2 (\lambda + \mu) + r_1 r_2 (\lambda r_2 + \mu r_1)}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \\
&= \frac{(0) - 2 r_1 r_2 \left(\frac{p}{1-p}\right) + r_1 r_2 p}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \qquad \textit{en exploitant la question précédente} \\
&= \frac{-2 r_1 r_2 \left(\frac{p}{1-p}\right) + r_1 r_2 p}{(1-(r_1+r_2) + r_1 r_2)^2} \\
&= \frac{2p(1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right) - p^2(1-p)}{(1-(1-p) - p(1-p))^2} \qquad \textit{d'après la question 3.2)} \\
&= \frac{2p^2 - p^2(1-p)}{(p - p(1-p))^2} \\
&= \boxed{\frac{1+p}{p^2}}.
\end{aligned}$$

Partie III — Deux jeux à pile ou face

9. 9.1) $(\mathrm{p}_1, \mathrm{f}_1)$ est un système complet d'événements. Il serait aussi possible de se lancer dans le calcul de $\mathbf{P}\left(\mathrm{T}_\mathrm{p} < \mathrm{T}_{\mathrm{fp}}\right)$, mais c'est beaucoup plus difficile. Donc, en utilisant plutôt le système complet d'évènements précédent :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{p}_1)\,\mathbf{P}(\mathrm{p}_1) + \mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{f}_1)\,\mathbf{P}(\mathrm{f}_1)$$
$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{p}_1)\,\mathbf{P}(\mathrm{p}_1) + \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{f}_1)\,\mathbf{P}(\mathrm{f}_1)$$

- Si p_1 a lieu alors Alice a gagné car le premier pile est bien arrivé strictement avant le premier motif "face pile".
- Si f_1 a lieu alors Bérénice a gagné car, tant qu'on a des "face", personne ne gagne et dès le le premier pile, le premier "pile" arrive en même temps que le premier motif "face pile" ce qui conduit à la victoire de Bérénice. On a utilisé le fait que l'événement "n'avoir que des faces" est négligeable (car on sait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{T}_\mathrm{p} = k)$ existe et vaut 1 car on a vu que $\mathrm{T}_\mathrm{p} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$).

On déduit alors des formules précédentes :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1\mathbf{P}(\mathrm{p}_1) + 0\mathbf{P}(\mathrm{f}_1)$$
$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 0\mathbf{P}(\mathrm{p}_1) + 1\mathbf{P}(\mathrm{f}_1)$$

puis que :

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{A}) = p \text{ et } \mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1 - p.}$$

9.2) Bérénice a donc une plus grande probabilité de victoire qu'Alice si et seulement si $1 - p \geq p$, soit $\boxed{p \leq \frac{1}{2}.}$

10. 10.1) Comme "pile" n'est pas "face", les événements B et C sont incompatibles. De plus, on a vu qu'il est presque certain que le motif "pile pile" apparaisse lors de l'expérience et que le motif "face pile" apparaisse aussi. On peut donc affirmer : $\boxed{\text{La famille d'événements (B, C) est un système quasi-complet d'événements.}}$

10.2) La famille d'événements $(\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2, \mathrm{f}_1, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)$ est un système complet d'événements.

- Comme Candice gagne la partie si le motif "pile pile" apparaît avant le motif "face pile" alors C a lieu si $\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2$ a lieu (si on fait face au premier lancer, alors nécessairement le motif "face pile" apparaitra dès le premier pile et Candice perd la partie) et $\mathbf{P}(\mathrm{C}|\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2) = 1$.
- Si f_1 a lieu alors au premier pile, on aura un tirage du style $\mathrm{f}\,\mathrm{f} \cdots \mathrm{f}\,\mathrm{p}$ et on voit apparaître le motif "face pile" avant le motif "pile pile", donc $\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{f}_1) = 1$.
- Si $\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2$ a lieu alors au second pile, on aura un tirage du style $\mathrm{p}\,\mathrm{f}\,\mathrm{f}\ \mathrm{f}\,\mathrm{p}$ et on voit apparaître de nouveau le motif "face pile" avant le motif "pile pile", ainsi $\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2) = 1$.

On en déduit que $\mathrm{C} = \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2$ et $\mathrm{B} = \mathrm{f}_1 \cup (\mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)$ et donc, par incompatibilité et mutuelle indépendance, les égalités suivantes : $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{C}) = p^2 \text{ et } \mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1 - p^2.}$ Bérénice a donc une plus grande probabilité de victoire que Candice si et seulement si $1 - p^2 \geq p^2$, soit $\boxed{p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.}$

10.3)
- On a vu que Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice si et seulement si $p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- En exploitant les résultats de la partie II, on en déduit que le temps d'attente moyen du motif "face pile" est supérieur au temps d'attente moyen du motif "pile pile" si et seulement si $\frac{1}{p(1-p)} \geq \frac{1+p}{p^2}$. Or, pour tout p de $]0,1[$, $p > 0$ et $1 - p > 0$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(1-p)} \geq \frac{1+p}{p^2} &\iff p \geq (1+p)(1-p) \\
&\iff p^2 + p - 1 \geq 0 \\
&\iff p \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right[.
\end{aligned}$$

grâce à l'étude du polynôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$ sur $]0,1[$

Ainsi, si et seulement si p appartient à $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, on a la victoire de Bérénice plus probable que la victoire de Candice alors que le temps d'attente moyen du motif "face pile" est supérieur au temps d'attente moyen du motif "pile pile". Cette situation est possible car $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (qui vaut environ 0,7) est supérieur à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (qui vaut environ 0,62).

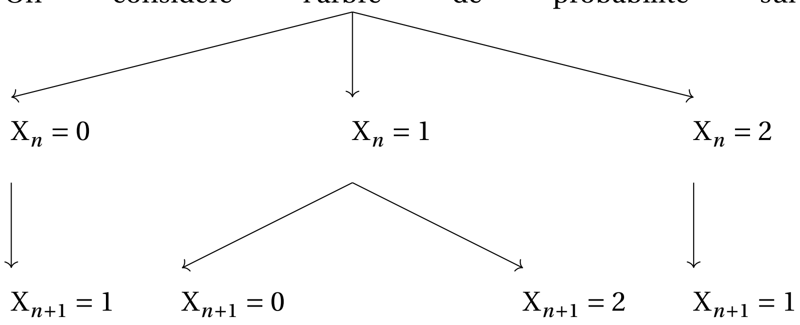
Solution (problème 1.7)

(Énoncé : 34)

Partie I — Matrice de transition

1. **1.1)** Avec $N = 2$, on a $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}$.

On considère l'arbre de probabilité suivant :



Justification des probabilités écrites sur les arrètes de l'arbre.

- Lorsque $X_n = 0$, l'urne U_1 ne contient aucune boule, or le nombre tiré est 1 ou 2 (nombre entre 1 et N dans le cas général), donc on déplacera forcément une boule de l'urne U_2 vers l'urne U_1, et X_{n+1} prend la valeur 1.
- Lorsque $X_n = 1$, l'urne U_1 contient une boule, donc si on fait 1 (probabilité 1/2), cette boule est déplacée vers l'urne U_2 et X_{n+1} prend alors la valeur 0, sinon (probabilité 1/2 aussi), c'est la boule de l'urne U_2 qui vient dans l'urne U_1 et X_{n+1} vaudra 2.
- Lorsque $X_n = 2$, on déplace forcément une boule de l'urne U_1 vers l'urne U_2 donc X_{n+1} prend la valeur 1.

D'où, par la formule des probabilités totales appliquées trois fois pour le système complet d'évènements $\{X_n = i\}_{i\in[\![0,2]\!]}$.

- $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1)$;
- $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 2)$;
- $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1)$.

Ces trois égalités correspondent bien au produit matriciel $Y_{n+1} = A.Y_n$, avec la matrice A annoncée.

$\boxed{\text{D'où } Y_{n+1} = AY_n.}$

1.2) On va déterminer le spectre de A_2. On sait qu'un réel λ est valeur propre de A_2 si et seulement si le rang de $A_2 - \lambda I_3$ est strictement inférieur à 3 ; on détermine ce rang par pivot. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$A_2 - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_3 - 2\left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right)L_2$$

Donc $\mathrm{Rg}(A_2 - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 0$ ou $1 - \lambda^2 = 0$. Le spectre de A_2 est donc $\{0; 1; -1\}$. La matrice A_2 est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes : $\boxed{\text{elle est donc diagonalisable}}$. On ne demande pas de déterminer les espaces propres pour le moment, on s'arrète donc ici !

2. Notons $(a_{i,j})$ les coefficients de la matrice A, avec i et j entiers entre 0 et N. On va montrer que pour tout $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, on a $Y_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{N} a_{k,j} Y_{n,j}$ (c'est la formule du produit matriciel). On distingue les valeurs $k = 0$ et $k = N$ des autres, car ce sont des cas particuliers (comme on a vu avec $N = 2$). Pour tout entier n, on notera D_n le résultat du tirage aléatoire de l'entier qui permet de réaliser le n-ième échange ; et on notera $U_1 \leftrightarrow U_2$ et $U_2 \leftrightarrow U_1$ *resp.* le fait de déplacer une boule de l'urne U_1 vers l'urne U_2 ou de l'urne U_2 vers l'urne U_1.

- Pour $k = 0$: l'événement $X_{n+1} = 0$ ne peut se produire que si $X_n = 1$ (il faut vider l'urne U_1), on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbf{P}(X_n=1)\cap(U_1\leftrightarrow U_2)\\ &= \mathbf{P}\big(U_1\leftrightarrow U_2\big|X_n=1\big)\,\mathbf{P}(X_n=1)\\ &= \mathbf{P}(D_{n+1}=1)\mathbf{P}(X_n=1)\\ &= \frac{1}{N}Y_{n,1}\end{aligned}$$

C'est bien l'égalité voulue pour démontrer l'égalité matricielle au niveau de la première ligne (ligne $k=0$).

- Pour $k=N$: l'événement $X_{n+1}=N$ ne peut se produire que si $X_n=N-1$, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=N) &= \mathbf{P}\big((X_n=N-1)\cap(U_2\leftrightarrow U_1)\big)\\ &= \mathbf{P}\big(U_2\leftrightarrow U_1\big|X_n=N-1\big)\,\mathbf{P}(X_n=N-1)\\ &= \mathbf{P}(D_{n+1}=N)\mathbf{P}(X_n=N-1)\\ &= \frac{1}{N}Y_{n,N-1}\end{aligned}$$

ce qui correspond bien aux coefficients de la dernière ligne de A.

- Pour $1\le k\le N-1$: l'événement $X_{n+1}=k$ ne peut se produire que si $X_n=k-1$ ou $X_n=k+1$ (on ne peut ajouter ou enlever qu'une boule à chaque étape), on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1}=k) &= \mathbf{P}(((X_n=k-1)\cap(U_2\leftrightarrow U_1))\cup((X_n=k+1)\cap(U_1\leftrightarrow U_2)))\\ &= \mathbf{P}((X_n=k-1)\cap(U_2\leftrightarrow U_1))+\mathbf{P}((X_n=k+1)\cap(U_1\leftrightarrow U_2)))\\ &= \mathbf{P}\big(U_2\leftrightarrow U_1\big|X_n=k-1\big)\,\mathbf{P}(X_n=k-1)+\mathbf{P}\big(U_1\leftrightarrow U_2\big|X_n=k+1\big)\,\mathbf{P}(X_n=k+1)\\ &= \mathbf{P}(D_{n+1}\in[\![k\,,N]\!])\mathbf{P}(X_n=k-1)+\mathbf{P}(D_{n+1}\in[\![1\,,k+1]\!])\mathbf{P}(X_n=k+1)\\ &= \frac{N-k+1}{N}Y_{n,k-1}+\frac{k+1}{N}Y_{n,k+1}.\end{aligned}$$

Là encore, on reconnaît les coefficients de A : les $\frac{N-(k-1)}{N}$ sous la diagonale, et les $\frac{k+1}{N}$ au-dessus.

On a donc bien montré que $Y_{n+1}=A.Y_n$, en étudiant chaque ligne de cette égalité matricielle.

3. Notons F_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^{\mathbf{T}}A$.

- Cas $N=2$: ${}^{\mathbf{T}}A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/2&0&1/2\\0&1&0\end{pmatrix}$; on sait que $F_1=\mathrm{Ker}({}^{\mathbf{T}}A-I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1/2&-1&1/2\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

  On a donc : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F_1 \iff \begin{cases}-x+y=0\\(1/2)x-y+(1/2)z=0\\y-z=0\end{cases}\iff x=y=z.$

  Ainsi, $\boxed{F_1=\mathrm{Vect}((1,1,1)).}$

- Cas $N=3$:

  $A=\begin{pmatrix}0&1/3&0&0\\1&0&2/3&0\\0&2/3&0&1\\0&0&1/3&0\end{pmatrix}$; ${}^{\mathbf{T}}A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1/3&0&2/3&0\\0&2/3&0&1/3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$; ${}^{\mathbf{T}}(A-I_4)=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\1/3&-1&2/3&0\\0&2/3&-1&1/3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$.

  On a donc :

  $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in F_1\iff\begin{cases}-x+y=0\\(1/3)x-y+(2/3)z=0\\(2/3)y-z+(1/3)t=0\\z-t=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\\x=z\\(2/3)y-z+(1/3)t=0\\z=t\end{cases}\iff x=y=z=t.$$

  Ainsi, $\boxed{F_1=\mathrm{Vect}((1,1,1,1))}$.

4. On peut conjecturer que le vecteur V_1 dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est vecteur propre de ${}^{\mathbf{T}}A$ pour la valeur propre 1 ; pour le vérifier, il faut montrer que ${}^{\mathbf{T}}A.V_1=V_1$, ce qui est équivalent, en transposant, à ${}^{\mathbf{T}}V_1.A={}^{\mathbf{T}}V_1$.
On peut remarquer que les coordonnées du vecteur ${}^{\mathbf{T}}V_1.A$ sont les sommes des

coefficients des colonnes de A (du fait que toutes les coordonnées de V_1 sont égales à 1). Or on voit sur la matrice A que la somme des coefficients de la colonne j vaut :

- 1 pour $j = 0$ et $j = N$ car ces colonnes ont un seul coefficient non nul et il vaut 1 ;
- $j/N + (N - j)/N$, soit encore 1, pour j entre 1 et $N - 1$.

Donc on a bien ${}^{\mathbf{T}}V_1.A = {}^{\mathbf{T}}V_1$, et donc 1 est valeur propre pour ${}^{\mathbf{T}}A$, avec V_1 pour vecteur propre.

5. La matrice ${}^{\mathbf{T}}A - I_{N+1}$ n'est pas inversible puisque son noyau est l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^{\mathbf{T}}A$, et donc il n'est pas réduit à $\{0\}$. Or ${}^{\mathbf{T}}A - I_{N+1} = {}^{\mathbf{T}}(A - I_{N+1})$ donc cette matrice n'est pas inversible.
On sait qu'une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est, donc $A - I_{N+1}$ est aussi non inversible, donc son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc 1 est valeur propre de A.

6. La variable $X_{n+1} - X_n$ est la variation du nombre de boules dans l'urne U_1 ; or le nombre de boules dans cette urne ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1, donc $\boxed{\text{la variable } X_{n+1} - X_n \text{ ne peut prendre que les valeurs 1 et } -1.}$

7. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet proposé par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) &= 1 \times \mathbf{P}(X_{n+1} - X_n = 1) + (-1) \times \mathbf{P}(X_{n+1} - X_n = -1)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\big(U_2 \leftrightarrow U_1 \big| X_n = k\big)\,\mathbf{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\big(U_1 \leftrightarrow U_2 \big| X_n = k\big)\,\mathbf{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\big(D_{n+1} \geq k+1 \big| X_n = k\big)\,\mathbf{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\big(D_{n+1} \leq k \big| X_n = k\big)\,\mathbf{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{P}\big(D_{n+1} \geq k+1 \big| X_n = k\big) - \mathbf{P}\big(D_{n+1} \leq k \big| X_n = k\big)\,\mathbf{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{N-k}{N} - \frac{k}{N}\right)\mathbf{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(1 - 2\frac{k}{N}\right)\mathbf{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(X_n = k) - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N} k\mathbf{P}(X_n = k)\\
&= 1 - \frac{2}{N}\mathbf{E}(X_n).
\end{aligned}$$

8. Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbf{E}(X_{n+1}) - \mathbf{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbf{E}(X_n)$, d'où $\mathbf{E}(X_{n+1}) = 1 + (1 - \frac{2}{N})\mathbf{E}(X_n)$. On reconnaaît une suite arithmético-géométrique. On utilise une des méthodes du cours pour trouver l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$: on commence par chercher un réel ℓ tel que $\ell = 1 + (1 - \frac{2}{N})\ell$, on trouve $\ell = \frac{N}{2}$.
On pose $u_n = \mathbf{E}(X_n) - \ell$. On a alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbf{E}(X_{n+1}) - \ell\\
&= 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)(u_n + \ell) - \ell\\
&= \left(1 - \frac{2}{N}\right)u_n
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique, de raison $1 - \frac{2}{N}$. On a donc $u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n u_0$ d'où $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left(\mathbf{E}(X_0) - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}}$.

9. On a $\left|1 - \frac{2}{N}\right| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \frac{N}{2}.$$

Après un grand nombre d'échanges, les effectifs s'équilibrent entre les deux urnes. On pouvait s'y attendre puisque lorsque l'effectif d'une urne est plus grand que celui de l'autre, on a plus de chances de déplacer une boule vers l'urne qui en contient le moins.

10. D'après la matrice A, on a :

$$X \in E_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1/N)x_1 = x_0 \\ x_0 + (2/N)x_2 = x_1 \\ ((N-1)/N)x_1 + (3/N)x_3 = x_2 \\ \dots \\ (2/N)x_{N-2} + x_N = x_{N-1} \\ (1/N)x_{N-1} = x_N \end{cases}$$

On va démontrer la relation demandée par récurrence forte sur k.

■ **Initialisation.** Pour $k = 0$, la relation est vérifiée, car $\binom{N}{0} = 1$; pour $k = 1$, la première ligne du système ci-dessus donne $x_1 = Nx_0 = \binom{N}{1}x_0$.

■ **Hérédité.** Supposons que pour un $k \in [\![0\,,\,N]\!]$ donné, on ait $\forall i \leq k, x_i = \binom{N}{i}x_0$. Sur la ligne $k+1$ du système ci-dessus, on a :

$$\frac{N-(k-1)}{N}x_{k-1} + \frac{k+1}{N}x_{k+1} = x_k$$

d'où :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{N}{k+1}\left(x_k - \frac{N-k+1}{N}x_{k-1}\right) \\ &= \frac{N}{k+1}\left(\binom{N}{k} - \frac{N-k+1}{N}\binom{N}{k-1}\right)x_0 \\ &= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{N-k+1}{N}\frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}\right)x_0 \\ &= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}\right)x_0 \\ &= \frac{N}{k+1}\frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}\left(\frac{N}{k} - 1\right)x_0 \\ &= \frac{N!}{(k+1)!(N-k)!}(N-k)x_0 \\ &= \frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!}x_0 \\ &= \binom{N}{k+1}x_0. \end{aligned}$$

Donc par récurrence, on a bien $x_k = \binom{N}{k}x_0$ pour tout $k \in [\![0\,,\,N]\!]$.

11. On vient de prouver que E_1 est engendré par le vecteur dont les coordonnées sont les $\binom{N}{k}$ pour $k \in [\![0\,,\,N]\!]$. Sa dimension est donc 1.

12. Par la formule du binôme de Newton, cette somme vaut $(1+1)^N$ c'est-à-dire 2^N.

13.

- Existence :
  Le vecteur π dont les coordonnées sont les $\pi_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ pour $k \in [\![0\,,\,N]\!]$ convient : la somme de ses coordonnées vaut 1 d'après la question 3, et il est dans E_1 d'après la question 1, avec $x_0 = \frac{1}{2^N}$.
- Unicité :
  Un tel vecteur π, étant dans E_1, doit être multiple du vecteur de coordonnées $\binom{N}{k}$, il existe donc un réel x_0 tel que $\forall k \in [\![0\,,\,N]\!] : \pi_k = \binom{N}{k}x_0$. La somme des coordonnées de π vaut alors $x_0 \times 2^N$ d'après la question 3), or elle doit valoir 1, donc $x_0 = \frac{1}{2^N}$.

14. On reconnaaît la loi binomiale de paramètres N et 1/2 : en effet, $P(X_\infty = k) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k} = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$.

$\boxed{\text{Son espérance vaut } \frac{N}{2} \text{ et sa variance vaut } N\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{N}{4}.}$

15. Puisque X_0 suit cette loi, le vecteur Y_0 est dans E_1, donc $A.Y_0 = Y_0$, *i.e.* $Y_1 = Y_0$; par une récurrence immédiate, on a donc $Y_n = Y_0$ pour tout entier n, et donc puisque la loi de X_n est donnée par les coordonnées de Y_n, X_n suit la même loi que X_0. Cela justifie le terme de « probabilité stationnaire » : la probabilité que l'urne U_1 soit dans un état donné ne dépend pas du nombre d'échanges qui ont été effectués. Par exemple, la probabilité que l'urne soit vide est $\frac{1}{2^N}$, à tout instant.

Solution (problème 1.8)

(Énoncé : 35)

Partie I — Etude d'un cas particulier

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Dans cette partie $N = 1$ donc $X_n(\Omega) = [\![0\,,\,2]\!]$ et ainsi la famille $\{X_n = 0, X_n = 1, X_n = 2\}$ forme un système complet d'événements. On fixe j dans $[\![0\,,\,2]\!]$.
En appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $\{X_{n+1} = j\}$ avec le système complet $\{X_n = 0, X_n = 1, X_n = 2\}$, on obtient :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}(X_n = i) \times \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Ces relations obtenues pour $j = 0$, $j = 1$ et $j = 2$ s'écrivent matriciellement

$$\boxed{V_{n+1} = MV_n, \quad M = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) & \mathbf{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 1) & \mathbf{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0) & \mathbf{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1) & \mathbf{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2|X_n = 0) & \mathbf{P}(X_{n+1} = 2|X_n = 1) & \mathbf{P}(X_{n+1} = 2|X_n = 2) \end{pmatrix}}$$

On peut expliciter M avec la formule donnée par l'énoncé :

$$\forall (i,j) \in [\![0\,,\,2]\!]^2, \quad \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \binom{2}{j}\left(\frac{i}{2}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2}\right)^{2-j}.$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.}$$

On fera attention, dans les calculs, au terme 0^0 qui vaut 1.

2. On remarque qu'il y a deux vecteurs propres évidents, puisque :

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ensuite on note que :

$$M\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

On définit les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. La famille (u_1, u_2, u_3) est clairement libre et contient trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée par des vecteurs propres de M. Ainsi $\boxed{\text{M est diagonalisable.}}$ Plus précisément, on a

$$\boxed{M = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. **3.1)** Pour tout entier n on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».

- **Initialisation.** D'une part $M^0 = I_3$. D'autre part $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Fixons n dans $\mathbf{N}$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$M^{n+1} = M^nM = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : le principe de récurrence permet de conclure que pour tout entier n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}.$$

Passons maintenant au calcul de PD^n :

$$\mathrm{PD}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de P^{-1} se fait par la méthode habituelle (miroir ou résolution de $\mathrm{PX} = \mathrm{Y}$) et ne pose aucune difficulté. On obtient :

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin :

$$\boxed{\mathrm{M}^n = (\mathrm{PD}^n)\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}}.$$

3.2) On montre par une récurrence simple que pour tout entier n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0$. Ainsi

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1)$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \frac{1}{2^n}\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1)$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1) + \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 2).$$

4. 4.1) On peut alors calculer $\mathbf{E}(\mathrm{X}_n)$:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}_n) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1) + 2\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1) + 2\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 2) = \mathbf{E}(\mathrm{X}_0).}$$

4.2) Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1) + \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 2).$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n \in \{0,2\}) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 0) + \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1) + \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 2) = 1.}$$

On dit que les états $1, 2$ sont absorbants, on y revient presque-sûrement pourvu que l'on attende assez longtemps.

I — 1) Cas général.

5. 5.1) Soit i dans $[\![0\,,\,2\mathrm{N}]\!]$. La somme S_i est l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}\left(2\mathrm{N}, \frac{i}{2\mathrm{N}}\right)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{S}_i = 2\mathrm{N} \times \frac{i}{2\mathrm{N}}}.$$

5.2) Soit n dans $\mathbf{N}$. On va calculer $\mathbf{E}(\mathrm{X}_{n+1})$ en faisant apparaître les termes S_i, grâce à la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathrm{X}_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2\mathrm{N}} j\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{2\mathrm{N}} \left(j \sum_{i=0}^{2\mathrm{N}} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = i)\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1} = j | \mathrm{X}_n = i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{2\mathrm{N}} \left(\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = i) \sum_{j=0}^{2\mathrm{N}} j\mathbf{P}(\mathrm{X}_{n+1} = j | \mathrm{X}_n = i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{2\mathrm{N}} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = i)\mathrm{S}_i \\
&= \sum_{i=0}^{2\mathrm{N}} i\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = i).
\end{aligned}$$

L'interversion des deux sommes est possible car ce sont des sommes finies. En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}\left(X_{n+1}\right) = \mathbf{E}\left(X_n\right)}.$$

5.3) $\boxed{\text{La suite } (\mathbf{E}\left(X_n\right))_{n\in\mathbf{N}} \text{ est donc constante égale à } \mathbf{E}\left(X_0\right).}$

6. 6.1) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![1\,,\,2N-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = k) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = k) + \mathbf{P}(X_{n+1} = 2N | X_n = k)\\ &= \left(\frac{2N-k}{2N}\right)^{2N} + \left(\frac{k}{2N}\right)^{2N}.\end{aligned}$$

Tout d'abord, $k \geq 1$ donc : $\left(\frac{k}{2N}\right)^{2N} \geq \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. Ensuite, $k \leq 2N-1$ donc $2N-k \geq 1$ puis : $\left(\frac{2N-k}{2N}\right)^{2N} \geq \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in [\![1\,,\,2N-1]\!], \quad \mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = k) \geq 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}}.$$

6.2) Soit $n \in \mathbf{N}$. En utilisant la formule des probabilités totales, puis la question précédente :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2N} \mathbf{P}(X_n = k) \times \mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = k)\\ &\geqslant \mathbf{P}(X_n = 0) \times \mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 0)\\ &+ \mathbf{P}(X_n = 2N) \times \mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 2N) + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbf{P}(X_n = k).\end{aligned}$$

D'après l'énoncé en début de partie I,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 0) = \mathbf{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) + \mathbf{P}(X_{n+1} = 2N | X_n = 0) = 1 + 0 = 1.$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 2N) = 0 + 1 = 1.$$

On a donc :

$$u_{n+1} \geq \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 2N) + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \left(1 - \mathbf{P}(X_n = 0) - \mathbf{P}(X_n = 2N)\right).$$

Enfin, puisque $\mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 2N) = u_n$, on obtient :

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n + 2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}}.$$

6.3) Soit $\alpha \in]0,1[$. Remarquons que pour tout entier n, $w_{n+1} = (1-\alpha)w_n + \alpha$. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $w_n \in [0,1]$. Lorsque $n = 0$, $w_0 = u_0 \in [0,1]$ car u_0 est une probabilité. Supposons, pour n entier fixé, que $w_n \in [0,1]$. Puisque $\alpha > 0$, on a alors : $0 \leq (1-\alpha)w_n \leq 1-\alpha$. Puis $\alpha \leq w_{n+1} \leq 1$, donc $w_{n+1} \in [0,1]$. Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbf{N}, w_n \in [0,1]$. On en déduit que pour tout entier n, $w_{n+1} - w_n = \alpha(1-w_n) \geq 0$. Ainsi la suite (w_n) est croissante, de plus cette suite est majorée par 1, donc (w_n) converge. Notons $L = \lim w_n$ et passons à la limite dans l'égalité : $w_{n+1} = w_n + \alpha(1-w_n)$. On obtient $L = L + \alpha(1-L)$, ce qui équivaut à $\alpha(1-L) = 0$. Or $\alpha \neq 0$, donc $L = 1$. En conclusion : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers 1.}}$

6.4) Posons $\alpha = 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $N \in \mathbf{N}^*$, $\alpha \in]0,1[$. Donc le résultat de (c) est applicable. Reprenons la suite (w_n) définie en (c). On va montrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq w_n$. Déjà $w_0 = u_0$ donc $u_0 \geq w_0$. On fixe un entier n et on suppose $u_n \geq w_n$. Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &\geqslant u_n + \alpha(1-u_n)\\ &\geqslant \alpha + (1-\alpha)u_n\\ &\geqslant \alpha + (1-\alpha)w_n\\ &\geqslant w_{n+1}.\end{aligned}$$

Le principe de récurrence permet de conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq w_n.$$

De plus (u_n) est majorée par 1 car chaque terme u_n est une probabilité, et la suite (w_n) converge vers 1. Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$ Interprétation : il est quasi-certain qu'à un moment donné X_n soit égal à 0 ou à 2N. On vient de mettre en évidence un phénomène de dérive génétique.

Partie II — Équilibre de Hardy-Weinberg

7. On reconnaît un schéma binomial. En effet il y a N individus qui ont chacun la probabilité p_1 d'être de type 1, ceci indépendamment les uns des autres. Donc $\boxed{\mathrm{N}_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathrm{N}, p_1).}$

8. D'après le cours sur la loi binomiale : $\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{N}_1) = \mathrm{N}p_1 \text{ et } \mathbf{Var}(\mathrm{N}_1) = \mathrm{N}p_1(1-p_1).}$

9. La variable aléatoire $\mathrm{N}_1^* = \frac{\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}p_1}{\sqrt{\mathrm{N}p_1(1-p_1)}}$ est la variable centrée réduite associée à la variable binomiale N_1. D'après le théorème central limite, $\boxed{\lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty} \mathbf{P}(a \leq \mathrm{N}_1^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.}$ Le théorème central limite est légitimé par le fait qu'une loi binomiale possède une variance.

10. **10.1)** Puisque $\mathbf{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) = \mathbf{Cov}(\mathrm{N}_2, \mathrm{N}_1)$, la matrice W est une matrice symétrique réelle. Donc d'après le théorème spectral, elle est $\boxed{\text{diagonalisable et est à valeurs propres réelles.}}$ Une matrice de passage associée est même orthogonale, ce fait sera exploité plus tard.

10.2) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Var}(a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2) \\
&= \mathbf{Cov}(a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2, a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2) \\
&= \mathbf{Cov}(a\mathrm{N}_1, a\mathrm{N}_1) + \mathbf{Cov}(a\mathrm{N}_1, b\mathrm{N}_2) + \mathbf{Cov}(b\mathrm{N}_2, a\mathrm{N}_1) + \mathbf{Cov}(b\mathrm{N}_2, b\mathrm{N}_2), \\
&= a^2\mathbf{Var}(\mathrm{N}_1) + 2ab\mathbf{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) + b^2\mathbf{Var}(\mathrm{N}_2).
\end{aligned}$$

bilinéarité de la covariance

symétrie de la covariance

Par un calcul de produit matriciel, on constate ensuite que

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathrm{W} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2\mathbf{Var}(\mathrm{N}_1) + 2ab\mathbf{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) + b^2\mathbf{Var}(\mathrm{N}_2).$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{Var}(a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathrm{W} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.}$$

10.3) Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}\mathrm{W}$, et notons $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors $\mathrm{WX} = \lambda\mathrm{X}$. D'après la question précédente, en choisissant $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathrm{X}$, on obtient alors

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \mathrm{W} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda(a^2 + b^2) = \mathbf{Var}(a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2) \geqslant 0,$$

dès lors, on obtient puisque X est non nul (ce qui entraîne $a^2 + b^2 \neq 0$) :

$$\lambda = \frac{\mathbf{Var}(a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2)}{a^2 + b^2} \geqslant 0.$$

Donc : $\boxed{\text{les valeurs propres sont positives.}}$

10.4) Avec les notations de la question précédente, si $\lambda = 0$, alors $a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2$ est une variable aléatoire constante presque-sûrement. Or lorsque $\mathrm{N}_1 = 0$ et $\mathrm{N}_2 = 0$ alors $a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2 = 0$, lorsque $\mathrm{N}_1 = 1$ et $\mathrm{N}_2 = 0$ alors $a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2 = a$, et lorsque $\mathrm{N}_1 = 0$ et $\mathrm{N}_2 = 1$ alors $a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2 = b$, or $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, donc $a\mathrm{N}_1 + b\mathrm{N}_2$ n'est pas constante. Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de W sont strictement positives.}}$

10.5) D'après le théorème spectral, il existe $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice diagonale, et P inversible de taille 2×2 telles que :

$$\mathrm{W} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}{}^{\mathbf{T}}\mathrm{P}.$$

Alors constatons que $\sqrt{\lambda_i}^2 = \lambda_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ car les λ_i sont positifs. Notons $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$. Alors

$$\boxed{\mathrm{W} = \mathrm{PD}^2\,{}^{\mathbf{T}}\mathrm{P}.}$$

C'est ce que l'on voulait.

11. Calculons le produit matriciel du membre de droite. On a

$$\mathrm{AW}^{\mathbf{T}}\mathrm{A} = (\mathrm{D}^{-1}\mathrm{P}^{-1})(\mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1})(\mathrm{PD}^{-1}) = \mathrm{I}_2$$

après simplifications. On déduit alors :

$$\boxed{\mathbf{Var}(\mathrm{Y}_1) = 1 = \mathbf{Var}(\mathrm{Y}_2), \quad \mathbf{Cov}(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) = 0.}$$

12. 12.1) On sait que $N_1+N_2 = N - N_3$, donc $\boxed{varN_1+N_2 = \mathbf{V}(N_3) = Np_3(1-p_3)}$.

12.2) On déduit alors la covariance.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(N_1,N_2) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{Var}(N_1+N_2) - \mathbf{V}(N_1) - \mathbf{Var}(N_2)\right)\\
&= \frac{N}{2}\left(p_3(1-p_3) - p_1(1-p_1) - p_2(1-p_2)\right)\\
&= \frac{N}{2}\left((1-p_1-p_2)(p_1+p_2) - p_1(1-p_1) - p_2(1-p_2)\right)\\
&= \frac{N}{2}\left(p_2 - p_1p_2 - p_1p_2 - p_2\right)\\
&= -Np_1p_2.
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\mathbf{Cov}(N_1,N_2) = -Np_1p_2.}$

12.3) On peut remarquer que $W^{-1} = P\left(D^{-1}\right)^2P^{-1}$, mais il est clair que l'énoncé demande des coefficients explicites. On peut donc utiliser la formule d'inversion d'une matrice 2×2 puisque

$$\mathbf{Var}(N_1)\,\mathbf{Var}(N_2) - \mathbf{Cov}(N_1,N_2)^2 = Np_1(1-p_1)Np_2(1-p_2) - N^2p_1^2p_2^2 = Np_1p_2(1-p_1-p_2) \neq 0$$

d'où

$$W^{-1} = \frac{1}{Np_1p_2(1-p_1-p_2)}\begin{pmatrix} Np_2(1-p_2) & Np_1p_2\\ Np_1p_2 & Np_1(1-p_1)\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{W^{-1} = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\begin{pmatrix} \frac{N(1-p_2)}{p_1p_3} & \frac{1}{Np_3}\\ \frac{1}{Np_3} & \frac{N(1-p_1)}{p_2p_3}\end{pmatrix}.}$$

On peut encore simplifier un petit peu :

$$\boxed{W^{-1} = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\begin{pmatrix} p_2(1-p_2) & p_1p_2\\ p_1p_2 & p_1(1-p_1)\end{pmatrix}.}$$

12.4) On a ${}^{\mathrm{T}}AA = PD^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-2}P^{-1} = \boxed{W^{-1}}$. Ensuite on reconnait que $Y_1^2+Y_2^2$ est la norme de $\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ au carré, donc ${}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$. Donc en utilisant la définition de $\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$, on obtient :

$$Y_1^2+Y_2^2 = \begin{pmatrix}N_1-Np_1 & N_2-Np_2\end{pmatrix}\left({}^{\mathrm{T}}A.A\right)\begin{pmatrix}N_1-Np_1\\N_2-Np_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}N_1-Np_1 & N_2-Np_2\end{pmatrix}W^{-1}\begin{pmatrix}N_1-Np_1\\N_2-Np_2\end{pmatrix},$$

soit encore

$$Y_1^2+Y_2^2 = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\begin{pmatrix}N_1-Np_1 & N_2-Np_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2(1-p_2) & p_1p_2\\ p_1p_2 & p_1(1-p_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1-Np_1\\N_2-Np_2\end{pmatrix}.$$

On obtient la formule

$$\boxed{Y_1^2+Y_2^2 = \frac{(N_1-Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2-Np_2)^2}{Np_2} + \frac{(N_3-Np_3)^2}{Np_3}}$$

après avoir effectué le produit matriciel.

Partie III — Étude de la loi limite Dans cette partie Z suit la loi normale centrée réduite, on notera Φ sa fonction de répartition.

13. Posons $R = Z^2$. Alors R prend ses valeurs dans $[0,\infty[$. Soit donc $t \geqslant 0$, on a :

$$F_R(t) = \mathbf{P}(Z^2 \leq t) = \mathbf{P}(-\sqrt{t} \leq Z \leq \sqrt{t}) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}).$$

On sait que pour tout réel x, $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$, donc :

$$F_R(t) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{t})-1 & \text{si } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Puisque Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, F_R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. De plus $\lim\limits_{t\to 0} F_R(t) = 2\Phi(0)-1 = 0 = F_R(0) = \lim\limits_{t\to 0^-} F_R(t)$, donc F_R est continue en 0, et ainsi F_R est continue sur $\mathbf{R}$. Finalement R est une variable à densité, de densité :

$$f_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi(\sqrt{t}) & \text{si } t>0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En utilisant l'expression de la densité de la loi normale centrée réduite, on déduit que :

$$\boxed{f_{Z^2} : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

14. D'après la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{Var}(Z) + (\mathbf{E}(Z))^2 = 1 + 0,$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(Z^2) = 1.}$ Pour $\mathbf{E}(R^2) = \mathbf{E}(Z^4)$ on applique le théorème de transfert. Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbf{E}(Z^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

L'intégrande étant paire, en cas de convergence, on a :

$$\mathbf{E}(Z^4) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

Soit $A \geqslant 0$, alors avec une intégration par parties, en dérivant $u(t) = t^3$ et en primitivant $v'(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$, u et v étant des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, on déduit :

$$\int_0^A t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 3\int_0^A t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt + \left[-t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A \xrightarrow{A \to \infty} 3\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt + 0.$$

croissances comparées

Or, le moment d'ordre deux d'une loi normale nous donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \sqrt{2\pi},$$

ou encore par parité de l'intégrande :

$$\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Donc finalement

$$\mathbf{E}(Z^4) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(3\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) = \boxed{3}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens :

$$\boxed{\mathbf{V}(R) = \mathbf{V}(Z^2) = \mathbf{E}(Z^4) - (\mathbf{E}(Z^2))^2 = 2}$$

15. Soit $x > 0$. On considère l'intégrale

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \, dt$$

qui est impropre en 0 et en x. On effectue le changement de variable $t = xu$, ce qui est possible puisque la convergence de l'intégrale $h(x)$ est admise par l'énoncé et que la fonction $t \longmapsto xu$ est de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone. On a $dt = x\,du$. Ainsi :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{xu(x-xu)}} \, du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \, du.$$

Puisque cette dernière quantité ne dépend plus de x, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur } \mathbf{R}_+^*, \text{ égale à } C = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \, du.}$

16. **16.1)** Notons $R_1 = Z_1^2$, $R_2 = Z_2^2$ et $T = R_1 + R_2$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Les variables aléatoires R_1 et R_2 sont indépendantes, on peut donc appliquer la formule du produit de convolution rappelée dans l'énoncé. Alors :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R_1}(x-t) f_{R_2}(t) \, dt.$$

Les variables R_1 et R_2 ont la même densité f_R. De plus

$$f_{R_1}(x-t) f_{R_2}(t) \neq 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant x, x \geqslant 0.$$

Donc pour $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
f_T(x) &= \int_0^x f_R(x-t) f_R(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\frac{e^{-(t-x)}}{\sqrt{t-x}} \\
&= \frac{e^{-\frac{x}{2}}h(x)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x, \quad f_T(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{2}}h(x)}{2\pi} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

16.2) Puisque f_T est une densité de probabilité, $\int_0^{+\infty} f_T(x)\,dx = 1$. Or,

$$\int_0^{+\infty} f_T(x)\,dx = \frac{C}{2\pi}\lim_{A\longrightarrow\infty}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^A = \frac{C}{\pi}.$$

On en conclut que :

$$\boxed{C = \pi}.$$

Ceci permet d'affirmer que :

$$\forall x \geq 0, \quad f_T(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Donc $\boxed{\text{T suit la loi exponentielle } \mathscr{E}\left(\frac{1}{2}\right)}$, et $\boxed{\mathbf{E}(T) = 2 \text{ et } \mathbf{V}(T) = 2^2 = 4.}$

Solution (exercice 1.10)

(Énoncé : 37)

1. >_

```python
import random as rd
import math as ma
def simul_Y(n):
    """
    retourne une simulation de Y
    """
    S = 0
    for _ in range(n):
        S += -ma.log(rd.random())
    return S
```

2. ■ **Initialisation.** Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $\frac{1}{\Gamma(1)}t^{n-1}e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. En effet, $\Gamma(1) = 0! = 1$.

■ **Hérédité.** Supposons que pour $n \in \mathbf{N}^\star$, nous avons :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_{Y_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t).$$

Alors puisque $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$, et que $Y_n \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$, Y_{n+1} est à densité et une densité est donnée par la convolée des deux densites.

$$\begin{aligned}
f_{Y_{n+1}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_n}(s) f_{X_{n+1}}(t-s)\,ds, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} s^{n-1}e^{-s}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(s)e^{-(t-s)}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t-s)\,ds, \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t s^{n-1}e^{-s}e^{-(t-s)}\,ds & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0.\end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{te^{-t}}{\Gamma(n)}\frac{t^n}{n} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Mais comme $n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! = \Gamma(n+1)$ nous avons donc montré que Y_{n+1} a pour densité $t \longmapsto \frac{1}{\Gamma(n+1)}t^n e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t)$. Par principe de récurrence, on déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\boxed{f_{Y_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t)}.$$

La variable aléatoire Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} t^n e^{-t}\, dt \quad \text{converge.}$$

On reconnaît l'intégrande intervenant dans la fonction $\Gamma(n+1)$. Ainsi, elle admet une espérance, et par linéarité de l'intégrale égale à

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

Donc : $\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = n.}$

3. 3.1) Soit un réel strictement positif λ. Alors par propriété de l'exponentielle :

$$e^{-\lambda(Y_n - \mathbf{E}(Y_n))} = \prod i = 1^n e^{-\lambda X_i} e^{\lambda n}.$$

Or, les variables aléatoires $e^{-\lambda X_i}$ possèdent une espérance. En effet, soit $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-\lambda t} e^{-t}\, dt = -\frac{1}{\lambda+1}\left[e^{-(\lambda+1)t}\right]_0^A$$

donc puisque $1 + \lambda > 0$:

$$\int_0^A e^{-\lambda t} e^{-t}\, dt \xrightarrow{A \longrightarrow \infty} \frac{1}{\lambda+1}.$$

Donc par théorème de transfert, les $e^{-\lambda X_i}$ possèdent bien une espérance. Donc par indépendance, $e^{-\lambda(Y_n - \mathbf{E}(Y_n))}$ en possède une aussi, et maintenant calculons-là.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{-\lambda(Y_n - \mathbf{E}(Y_n))}\right) &= \prod i = 1^n \mathbf{E}\left(e^{-\lambda X_i}\right) e^{\lambda n} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^n e^{\lambda n}\end{aligned}$$

En prenant le logarithme, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= -n\ln(\lambda+1) + n\lambda \\ &= \boxed{n(\lambda - \ln(\lambda+1)).}\end{aligned}$$

3.2) Soit $\lambda > 0$, alors $\varphi(\lambda) \leq \frac{n\lambda^2}{2}$ équivaut à :

$$\lambda - \ln(\lambda+1) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

Introduisons la fonction $f : x > 0 \longrightarrow x - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}$ et montrons qu'elle est négative. En effet, elle est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - x, \quad f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 1 = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Donc f' est décroissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$, et $\lim_{x \longrightarrow 0+} f'(x) = 0$ donc f' est négative sur ce même intervalle et f est alors décroissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Mais comme $\lim_{x \longrightarrow 0+} f(x) = 0$, la fonction f est bien négative. En conclusion, on a bien montré $\boxed{\varphi(\lambda) \leq \frac{n\lambda^2}{2}.}$

4. 4.1) Soit λ strictement positif et x strictement positif. Alors nous allons chercher à appliquer l'inégalité de MARKOV en prenant d'abord l'exponentielle dans l'évènement.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) &= \mathbf{P}\left(\lambda\left(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n\right) \geqslant \lambda x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(e^{\lambda(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n)} \geqslant e^{\lambda x}\right) \\ &\leqslant \mathbf{E}\left(e^{\lambda(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n)}\right) e^{-\lambda x} \\ &= e^{\varphi(\lambda) - \lambda x}.\end{aligned}$$

application de l'expo

$e^{\lambda(E(Y_n) - Y_n)} \geqslant 0$, *possède une espérance*

Donc on a bien montré que : $\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant e^{-\lambda x + \varphi(\lambda)}.}$

4.2) D'après les deux questions précédentes,

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant e^{-\lambda x + \frac{n\lambda^2}{2}}.$$

Puisque λ est quelconque, on peut chercher λ qui minimise la fonction $\lambda \longrightarrow -\lambda x + \frac{n\lambda^2}{2}$. Puisqu'il s'agit d'un trinôme, on sait qu'il est minimal en $\lambda = \frac{x}{2\frac{n}{2}} = \frac{x}{n}$. La valeur du minimum vaut alors

$$-\frac{x^2}{n}x + \frac{nx^2}{2n^2} = -\frac{x^2}{2n}.$$

On obtient alors pour $\lambda = \frac{x}{n}$ le majorant souhaité : $\boxed{\forall x > 0,\quad \mathbf{P}(\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) - \mathrm{Y}_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2n}.}$

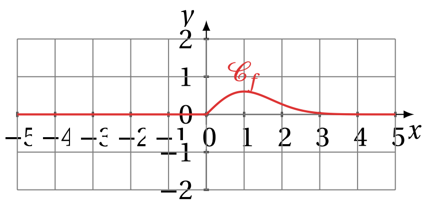
Solution (problème 1.9)

(Énoncé : 37)

1. La fonction f est définie par deux formules différentes, une pour $\mathbf{R}_-$ et une pour $\mathbf{R}^{+\star}$; on constate qu'elle est continue en 0 puisque $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 = \lim_{t\to 0^-} f(t)$. La fonction f est constante sur $\mathbf{R}_-$. Il y a seulement à l'étudier sur $\mathbf{R}^{+\star}$, où elle est définie par $f(t) = \frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions qui le sont, et sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)} + \frac{t}{c^2} \times \left(-\frac{2t}{2c^2}\right) \times \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)} \\ &= \left(\frac{c^2 - t^2}{c^4}\right)\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)} \end{aligned}$$

Cette dérivée est du signe de $c^2 - t^2$, donc positive pour $0 < t \leq c$ et négative pour $t \geq c$. La fonction f est donc croissante jusqu'À c, puis décroissante. Elle admet donc un maximum en c, qui vaut $f(c) = \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-1/2}$.
En $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$; on pose, pour $t > 0$, $x = t^2/(2c^2)$, ce qui donne $t = c\sqrt{2}\sqrt{x}$, et $f(t) = \frac{c\sqrt{2}\sqrt{x}}{c^2}\mathrm{e}^{-x}$; on a alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{c}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparée. Par exemple, pour $c = 1$, nous obtenons :



2. Il s'agit de vérifier trois points :

- que la fonction f est positive : c'est visiblement le cas ;
- qu'elle est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points : c'est le cas, elle est même continue sur $\mathbf{R}$ tout entier ;
- et que son intégrale sur $\mathbf{R}$ converge et vaut 1, on le vérifie : sous réserve de convergence, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}dt \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^{+\infty} \\ &= -0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

3. **3.1)** Cette intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$ d'après le cours.

3.2) On fait le changement de variable $u(t) = t/c$, possible car u est une fonction de t de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone ; on a $\mathrm{d}u = 1/c\,\mathrm{d}t$, et $u(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$. D'après le théorème de changement de variable dans les intégrales généralisées, les intégrales suivantes sont de même nature, et de même valeur si elles convergent :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2} \times c\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2} \times c\,\mathrm{d}u \quad \text{par parité} \\ &= c\sqrt{2\pi}/2 \end{aligned}$$

Donc l'intégrale proposée converge, et vaut $\boxed{c\sqrt{\pi/2}.}$

3.3) La variable X admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} t \times \frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On réalise une intégration par parties : toutes les fonctions écrites sont bien continues, et on a donc sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[t\times\left(-\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}1\times\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,dt$$

Le premier terme converge par croissance comparée, le deuxième converge d'après la question précédente; donc $\boxed{\text{X admet bien une espérance.}}$ La valeur n'est pas demandée mais on l'a sous les yeux : $\mathbf{E}(\mathrm{X})=0+c\sqrt{\pi/2}$.

4. On suppose que X^n admet une espérance, et on utilise le théorème de transfert pour montrer que X^{n+2} admet alors une espérance. Toutes les fonctions écrites sont positives sur $\mathbf{R}^+$ donc la convergence, si elle a lieu, est absolue. On a donc, sous réserve de convergence, et grÃ¢ce à une intégration par parties analogue à la précédente :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{X}^{n+2}) &= \int_0^{+\infty} t^{n+2}\times\frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t^{n+2}\times\left(-\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}(n+2)t^{n+1}\times\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t^{n+2}\times\left(-\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty}+(n+2)c^2\int_0^{+\infty}t^n\times\frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le premier terme converge par croissance comparée, et vaut 0. Le deuxième terme converge par hypothèse, et vaut $(n+2)c^2\mathbf{E}(\mathrm{X}^n)$. Donc X^{n+2} admet une espérance, et cette espérance est égale à $(n+2)c^2\mathbf{E}(\mathrm{X}^n)$.

5. ■ **Initialisation.** Pour $n=0$, il s'agit de montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{X}^0)=2^0c^00!$ *i.e.* que $\mathbf{E}(1)=1$: c'est vrai; et que $\mathbf{E}(\mathrm{X}^1)=\sqrt{2\pi}\frac{1!c^1}{2^11!}$; on a vu en 3)3) que $\mathbf{E}(\mathrm{X})=c\sqrt{2\pi}/2$, ce qui est bien la valeur voulue.

■ **Hérédité.** Supposons les deux relations vraies. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{X}^{2n+2}) &= c^2(2n+2)\mathbf{E}(\mathrm{X}^{2n})\\ &= c^2(2n+2)2^nc^{2n}n!\\ &= c^{2n+2}2(n+1)2^nn!\\ &= c^{2n+2}2^{n+1}(n+1)!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{X}^{2n+3}) &= c^2(2n+3)\mathbf{E}(\mathrm{X}^{2n+1})\\ &= c^2(2n+3)\sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{(2n+2)2^{n+1}n!}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2(n+1)2^{n+1}n!}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2^{(n+1)+1}(n+1)!}\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, les deux formules sont donc vraies pour tout entier naturel n.

6. **6.1)** Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux, et soit a un réel strictement positif. Alors on a :

$$\mathbf{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|\geq a)\leq\frac{\mathbf{Var}(\mathrm{X})}{a^2}$$

6.2) On a $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right)=2^1c^21!=2c^2$ d'après la question 5), d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(\mathrm{X}) &= \mathbf{E}(\mathrm{X}^2)-\mathbf{E}(\mathrm{X})^2\\ &= 2c^2-(c\sqrt{\pi/2})^2\\ &= c^2(2-\pi/2)\\ &= c^2\frac{4-\pi}{2}\end{aligned}$$

6.3) On transforme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour avoir une probabilité « supérieure à » plutôt que « inférieure à » :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(|X-E(X)|\geq a)\leq \tfrac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\\
\iff\quad & \mathbf{P}(X-E(X)\geq a \text{ ou } X-E(X)\leq -a)\leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\\
\iff\quad & 1-\mathbf{P}(X-E(X)< a \text{ et } X-E(X)> -a)\leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\\
\iff\quad & 1-\mathbf{P}(E(X)-a< X< E(X)+a)\leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\\
\iff\quad & \mathbf{P}(X\in]E(X)-a,E(X)+a[)\geq 1-\frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}
\end{aligned}$$

Pour a fixé, si on pose $\alpha=\mathbf{E}(X)-a$ et $\beta=\mathbf{E}(X)+a$, on a donc $\mathbf{P}(X\in]\alpha,\beta[)\geq 1-\frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}$; et c'est encore vrai avec l'intervalle fermé $[\alpha,\beta]$ puisque la probabilité qu'une variable à densité prenne une valeur réelle donnée est nulle. Pour avoir $\mathbf{P}(X\in]\alpha,\beta[)\geq 99\%$, il suffit donc d'avoir $1-\frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\geq 99\%$; on simplifie :

$$\begin{aligned}
1-\frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\geq 99\% \quad&\iff\quad \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}\leq 0,01\\
&\iff\quad a^2\geq 100\mathbf{Var}(X)\\
&\iff\quad a\geq 10\sigma(X)
\end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$\alpha=\mathbf{E}(X)-10\sigma(X)=c\sqrt{\pi/2}-10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}};\beta=\mathbf{E}(X)+10\sigma(X)=c\sqrt{\pi/2}+10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}.$$

7.

$$\mathbf{P}(X\in[0,\gamma])=\int_0^\gamma \frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2}\,dt=\left[-e^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^\gamma=1-e^{-\gamma^2/(2c^2)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X\in[0,\gamma])=99\% \quad&\iff\quad 1-e^{-\gamma^2/(2c^2)}=99\%\\
&\iff\quad e^{-\gamma^2/(2c^2)}=0,01\\
&\iff\quad -\gamma^2/(2c^2)=\ln(1/100)\\
&\iff\quad \gamma^2=2c^2\ln(100)=4c^2\ln(10)\\
&\iff\quad \gamma=2c\sqrt{\ln(10)}
\end{aligned}$$

8. D'après l'inégalité donnée par l'énoncé, on a $\alpha<0$; on a donc, puisque la densité de X est nulle sur $\mathbf{R}_-$,

$$\mathbf{P}(X\in[\alpha,\beta])=\mathbf{P}(X\in[0,\beta])\geq 99\%=\mathbf{P}(X\in[0,\gamma])$$

soit, en notant F la fonction de répartition de X :

$$F(\beta)\geq F(\gamma).$$

Or les fonctions de répartition sont croissantes, donc $\beta\geq\gamma$.
L'intervalle $[0,\gamma]$ est donc inclus dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$.

Chapitre 2.

Préparation aux Oraux

Résumé & Plan

Vous trouverez dans cette partie du polycopié des anciens sujets d'oraux de tous types : des planches hybrides Mathématiques & Informatique pour Agro—Véto, et des planches individuelles par domaine pour G2E. Je remercie tous les collègues & étudiants ayant bien voulu les partager (que ce soit au lycée ou *via* l'UPA).

1 Banque Agro & Véto — Mathématiques & Informatique 1

1.1 Notes sur le fonctionnement de Geogebra . . . 2

1.2 Algèbre & Géométrie . . . 2

1.3 Analyse . . . 7

1.4 Aléatoire . . . 11

2 Banque G2E — Mathématiques 17

2.1 Algèbre & Géométrie . . . 17

2.2 Analyse . . . 18

2.3 Aléatoire . . . 18

2.4 Session 2021 . . . 20

3 Banque G2E — Informatique 22

4 Solutions 23

Il n'y a pas de réussite facile, ni d'échecs définitifs

— Marcel Proust

1. BANQUE AGRO & VÉTO — MATHÉMATIQUES & INFORMATIQUE

La plupart des heures en classe entière de préparation aux oraux fonctionnera selon le principe ci-après :

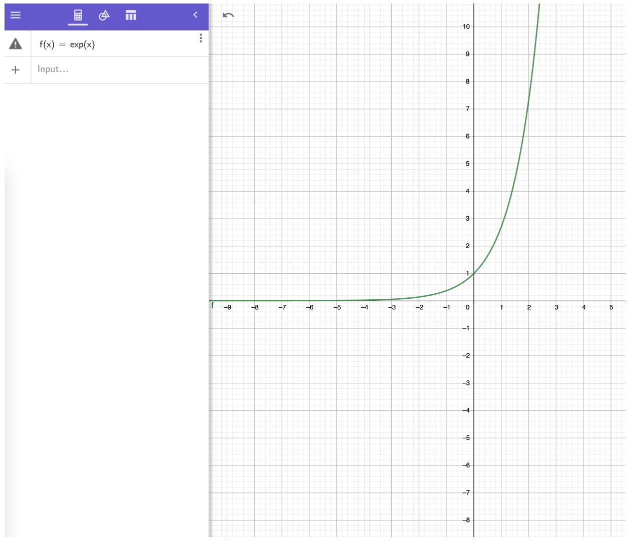
- une planche Agro—Véto = 1 heure de cours = analyse ensemble du sujet (5”), réflexion de la classe entière sur la planche pendant une dizaine de minutes (10”), passage d'une étudiante ou d'un étudiant désigné à l'avance sur ladite planche pendant 20”. Discussion et commentaires de ma part, compléments de cours éventuels à faire ou points de cours à revoir.
- Avant les résultats d'admissibilité, ce seront les 5/2 qui passeront au tableau sur ces planches. Ensuite, le reste de classe sur la base du volontariat.

1.1. Notes sur le fonctionnement de Geogebra

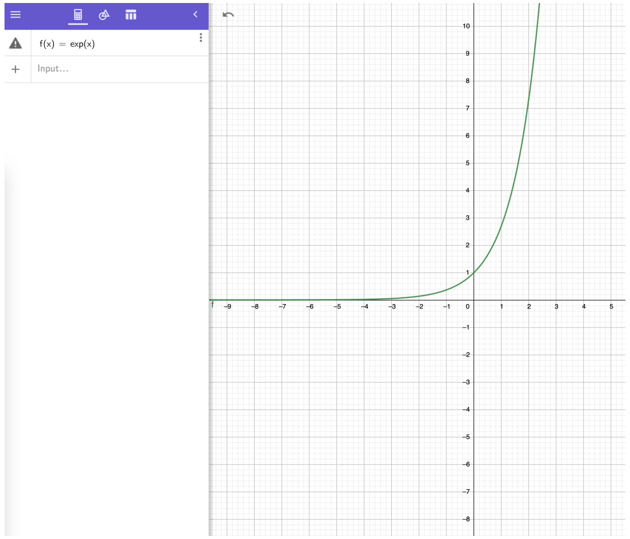
Geogebra, en complément de Spyder et Pyzo, est installé sur les postes à disposition le jour du concours. Ce logiciel, très (très très) simple d'utilisation, vous fera gagner une part non négligeable de temps pour les usages suivants : tracer une courbe, tracer des termes de suites (récurrentes ou explicites), *etc.*. Bien entendu, si le sujet vous impose Python vous n'aurez d'autre choix que de l'utiliser. Présentons rapidement les deux usages ci-après.

- Tracer une courbe. On tape simplement l'équation de l'objet.
- Faire varier un curseur pour étudier des courbes dépendant d'un paramètre.

Exemple 1 — Tracer une courbe On tape implement `exp(x)`, ou encore `exp` ou encore `f(x)=exp(x)`, ... Geogebra comprendra que vous lui demandez de tracer la courbe associée.



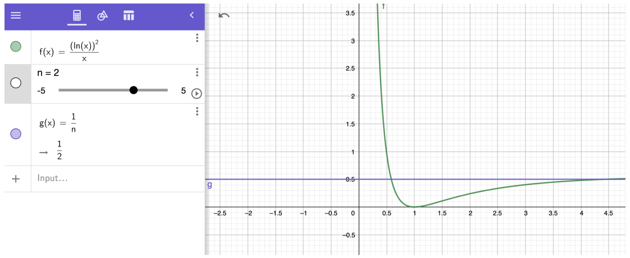
Il est aussi possible de créer des courbes dépendant d'un paramètre (voir capture de droite). Geogebra comprend qu'il s'agit d'un paramètre (les éléments différents du symbole x), il vous est possible de faire varier ensuite le paramètre en question.



Exemple 2 — Résoudre une équation On souhaite savoir si l'équation

$$\frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

admet des solutions pour tout entier $n \neq 0$. On peut s'y prendre ainsi :



1.2. Algèbre & Géométrie

La plupart des commandes d'algèbre linéaire numérique (calcul du rang, calcul des valeurs propres/espaces propres) ne sont pas explicitement mentionnées dans les programmes. Les sujets vous les rappelleront toujours, mais il est bon déjà de les connaître avant de se présenter le jour de l'oral. Voici un bref rappel de celles vues au cours de l'année.

Rappels sur les manipulations de matrices en Python

```
>>> import numpy as np
>>> # Création
>>> A = np.array([[1,2,3], [4,5,6]])
>>> B = np.array([[2,3,4], [5,6,7]])
>>> # dans certains sujets le module matrix subsiste, il est
↪ désormais obsolète et ne devrait plus être utilisé dans les
↪ sujets à venir
>>> type(A)
<class 'numpy.ndarray'>
>>> #on accède aux éléments comme on le ferait avec des listes de
↪ listes classiques
>>> A[1][2]
6
>>> #Mais on peut aussi utiliser une notation plus « mathématique
↪ » et se passer des doubles crochets
>>> A[1, 2]
6
>>> # Récupérer le format d'une matrice
>>> n,p = A.shape
>>> #Extraction : fonctionnement identique aux listes. Les :
↪ signifient que l'on impose aucune condition sur la position où
↪ il est placé (ici, cela signifie « peu importe la ligne »,
↪ donc on renvoie une colonne)
>>> A[:, 2]
array([3, 6])
>>> #Somme
>>> C = A + B
>>> C
array([[ 3,  5,  7],
       [ 9, 11, 13]])
>>> #Transposition
>>> C.transpose()
array([[ 3,  9],
       [ 5, 11],
       [ 7, 13]])
>>> # Ou encore
>>> A@(B.transpose())
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>>
>>> #Produit
>>> np.dot(A, B.transpose())
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>>
>>> #Matrices usuelles
>>> np.zeros((1, 4))
array([[0., 0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2, 1)) #Attention : des tuples sont requis pour ces
↪ deux fonctions
array([[1.],
       [1.]])
>>> np.eye(3, 3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> #Mais cela fonctionne aussi :
>>> np.eye(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> # Éléments propres
>>> T = np.array([[1, 1], [0, 2]])
```

```
>>> np.linalg.eig(T) #produit un tuple dont la première coordonnée
→ est la liste de valeurs propres, la seconde la une liste de
→ vecteurs propres
(array([1., 2.]), array([[1.        , 0.70710678],
       [0.        , 0.70710678]]))
>>> np.linalg.eig(T)[0] # liste des valeurs propres
array([1., 2.])
```

Exercice 2.1 | **d'après Agro—Véto, 2019 — Autour des matrices circulantes** (Solution : 23) Soit $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{C}^3$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ définie par : $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_2&a_3&a_1\\a_3&a_1&a_2\end{pmatrix}$. On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2, j^3 et j^4.
2. 2.1) Soient r et s deux complexes non nuls. Montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix}0&r^2\\s^2&0\end{pmatrix}$ est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres de M.
   2.2) La matrice M est-elle diagonalisable lorsque $r=0$ ou $s=0$?
3. Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si `L = [a_1,...,a_n]`, la liste `L_1 = [a_2,...,a_n,a_1]`. Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a_1,a_2,a_3)` qui renvoie la matrice A.

```
def matrice(a_1,a_2,a_3):
    A = ....
    L = ....
    for i in ...
        A.append(L[:])
        ...
    return ...
```

4. Si a_1, a_2 et a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Montrer que $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?
6. On pose $X_1=\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ et $X_2=\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans justifier que la famille (U,X_1,X_2) est libre.
   6.1) Calculer AX_1 et AX_2. En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1=s^2X_2$ et $AX_2=r^2X_1$.
   6.2) Déterminer le spectre de A. *On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits à la question 6 et utiliser la question 2.*
7. Préciser dans les cas suivants si la matrice A est diagonalisable.
   7.1) $A=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j&j^2&1\\j^2&1&j\end{pmatrix}$
   7.2) $A=\begin{pmatrix}j&1&0\\1&0&j\\0&j&1\end{pmatrix}$.

Exercice 2.2 | **A–ENV 2015** (Solution : 24) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. On définit l'application :

$$\phi\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbf{R}[X],\\ P&\longmapsto&(X-X^2)P''+(1-2X)P'.\end{array}\right.$$

   1.1) Justifier rapidement que ϕ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de M de ϕ dans la base canonique $\mathscr{B}=(1,X,\cdots,X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.
   1.2) Préciser les valeurs propres de ϕ. L'application ϕ est-elle diagonalisable ?
   1.3) ϕ est-elle bijective ?
2. Pour tout entier $p\in[\![0\,,\,n]\!]$, on considère les polynômes :

$$T_p=X^p(1-X)^p,\quad L_p=\frac{1}{p!}\left(T_p\right)^{(p)}$$

où $\left(T_p\right)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de T_p. Fixons un entier $p\in\mathbf{N}$.
   2.1) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_p.

2.2) Notons L_p sous la forme $L_p = \sum_{k=0}^{p} a_{k,p} X^k$. Établir que :

$$\forall k \in [\![0\,,\,p]\!] \quad a_{k,p} = (-1)^k \binom{p}{k}\binom{p+k}{k}.$$

2.3) Déterminer une relation entre $a_{k+1,p}$ et $a_{k,p}$ pour $k \in [\![0\,,\,p-1]\!]$. Préciser la valeur de $a_{0,p}$.

2.4) En vous appuyant sur la question 2.3), écrire une fonction informatique qui prend en argument un entier naturel p et renvoie la liste des coefficients $a_{0,p}, a_{1,p}, \cdots, a_{p,p}$ de L_p.
Tester cette fonction dans le cas où $p \in \{0, 1, 2\}$.

3. Dans cette question, $n = 2$ et ϕ est donc l'application suivante :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X], \\ P & \longmapsto & (X - X^2)\,P'' + (1 - 2X)\,P'. \end{array} \right.$$

Vérifier que (L_0, L_1, L_2) est une base de vecteurs propres de ϕ.

Exercice 2.3 | **Agro—Véto, 2018, Polynômes interpolateurs de Lagrange** (Solution : 26)

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit ϕ l'application définie par :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ Q & \longmapsto & (Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n)) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

2. **2.1)** Écrire la matrice M de ϕ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathbf{R}^{n+1}$.

2.2) La matrice M est-elle inversible ? Pour tout $i \in [\![0\,,\,n]\!]$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

(les L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*).

3. **3.1)** Montrer que $L_i \in \mathbf{R}_n[X]$.

3.2) Calculer $L_i(x_j)$ pour tout $j \in [\![0\,,\,n]\!]$. En déduire $\phi(L_i)$.

3.3) Montrer que la famille $\mathbf{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

3.4) Écrire la matrice de ϕ dans la base $\mathbf{B}$ et la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

3.5) Écrire une fonction python d'en-tête `def L(i, M, x)`, qui retourne la valeur de $L_i(x)$ où `M` est une liste contenant $x_0, \ldots, x_n$ et $i \in [\![0\,,\,n]\!]$.

4. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. On note V la matrice colonne définie par $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_0) \\ \mathbf{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

4.1) Calculer le produit ${}^{\mathbf{T}}V \times M$ en fonction des moments d'ordre r de X $(0 \leq r \leq n)$.

4.2) Supposons $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \ldots, \mathbf{E}(X^n)$ connus. Comment remonter à la loi de X ?

4.3) On suppose le module `numpy` importé. Les commandes suivantes sont rappelées :

- `import numpy as np` pour importer le module `numpy` ;
- `np.dot(A,B)` renvoie le produit de deux matrices A et B ;
- `np.linalg.inv(A)` renvoie l'inverse d'une matrice inversible A.

Créer un programme qui renvoie la loi de X sous forme de vecteur, connaissant $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \ldots, \mathbf{E}(X^n)$.

Exercice 2.4 | **Agro—Véto, Sujet 1, 2018** (Solution : 27) On considère E l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre et l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5 \right\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de F dont les cœfficients sont égaux à 0 ou 1. *On pourra par exemple utiliser la fonction* `numpy.linalg.eig`, *comme le montre l'exemple suivant :*

```
import numpy.linalg as la
vap,vep = la.eig ( [ [1 ,2 ], [3 ,4]] )
```

Après cette suite d'instructions, la variable vap contient la liste des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ et la variable vep est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.

2. **2.1)** Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$.
   2.2) Donner une base de $E \cap F$.
3. **3.1)** Montrer que $A \in E \cap F$.
   3.2) Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A = P^{\mathrm{T}} DP$ où ${}^{\mathrm{T}}P$ est la matrice transposée de P.
4. Vérifier que ${}^{\mathrm{T}}PMP$ est diagonale pour toute matrice M de $E \cap F$.
5. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x\\ y & x+z & y\\ x & y & y+z\end{pmatrix}$.

Exercice 2.5 | A–ENV 2016. Système mécanique & système différentiel linéaire (Solution : 30) On modélise les liaisons entre trois atomes par un système de trois masselottes A, B, C de même masse m et de deux ressorts, de même raideur k. Le système est unidimensionnel. Les ressorts sont d'une part entre A et B et d'autre part entre B et C. On repère l'abscisse des masselottes à l'instant $t \geq 0$ par $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. Les abscisses initiales sont $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$. Les ressorts sont tendus et on lâche les masselottes. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \begin{cases} m\cdot x_1''(t) &= -kx_1(t) + kx_2(t),\\ m\cdot x_2''(t) &= kx_1(t) - 2kx_2(t) + kx_3(t),\\ m\cdot x_3''(t) &= kx_2(t) - kx_3(t).\end{cases}$$

On impose $\dfrac{k}{m} = 1$ et on pose $X(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, ainsi que

$$X'(t) = \begin{pmatrix}x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ x_3'(t)\end{pmatrix}, \quad X''(t) = \begin{pmatrix}x_1''(t)\\ x_2''(t)\\ x_3''(t)\end{pmatrix}.$$

1. **1.1)** Déterminer une matrice A telle que $X''(t) = AX(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
   1.2) Justifier sans calculs que A est diagonalisable.
2. On souhaite dans cette question diagonaliser la matrice A.
   2.1) À l'aide de Python, conjecturer le spectre de A. *On pourra utiliser la fonction* `eig` *du module* `numpy.linalg` *afin de déterminer les valeurs propres de la matrice* A.
   2.2) Déterminer les valeurs propres de A, ainsi qu'une base de chaque espace propre.
   2.3) En déduire une matrice $P \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ inversible, une matrice diagonale D, telles que
   $$A = P\cdot D\cdot P^{-1}.$$
3. Dans la suite, on notera pour tout $t \geqslant 0$:
   $$Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix} = P^{-1}\cdot X(t),$$
   on définit comme pour X les vecteurs Y', Y''.
   3.1) Justifier la relation $X'' = P\cdot Y''$, sans chercher à faire de preuve rigoureuse.
   3.2) Écrire une fonction `Y_vers_X` d'arguments y_1, y_2, y_3, et qui renvoie le vecteur X associé sous forme de tableau `numpy`.
   3.3) Montrer que le vecteur Y est solution du système différentiel $Y'' = DY$.
   3.4) Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer alors $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ à l'aide de $y_1(0)$, $y_2(0)$, $y_3(0)$, et $y_1'(0)$, $y_2'(0)$, $y_3'(0)$.
   3.5) Écrire une fonction python prenant en argument deux listes `init` et `init_der` contenant pour l'une $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$, et pour l'autre $x_1'(0)$, $x_2'(0)$, $x_3'(0)$ et qui trace les courbes représentatives de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Exercice 2.6 | **Agro—Véto 2019** Dans tout l'exercice, on considère $\mathbf{R}^3$ muni produit scalaire canonique. On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$\langle u|v\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable? Montrer que $\mathrm{Spec}(A) = \{0; 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f.
2. La matrice A est-elle inversible?
3. Écrire une fonction Python `proj` qui prend en argument une matrice carrée M (entrée par exemple sous la forme d'une liste de listes) et qui renvoie un booléen : `True` si $M^2 = M$, `False` sinon. Tester cette fonction sur la matrice A.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = E_1$.
5. Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ codés sous forme de tableaux `numpy` ou de listes, et retournant leur produit scalaire.
6. **6.1)** Montrer que les deux sous-espaces propres E_0 et E_1 sont orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E_0, \quad \forall v \in E_1, \quad \langle u|v\rangle = 0.$$

   6.2) En déduire que pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^3$, on a :

$$f(x) \in E_1 \quad \text{et} \quad \forall y \in E_1, \quad f(x) - x \text{ orthogonal à } y.$$

   Qu'a-t-on montré sur l'application f ?
7. Déterminer une base orthonormale de E_1. En déduire une valeur approchée de la distance du vecteur $t = (1;2;1)$ à l'espace E_1 à 10^{-2} près.

Exercice 2.7 | (Solution : 32) On munit $\mathscr{P}$, le plan usuel, de $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé. Soit m un réel. On considère l'ensemble C_m des points du plan $M(x, y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 10(m-1) = 0.$$

1. Montrer que C_m est un cercle. Donner son centre Ω_m et son rayon R_m.
2. Montrer qu'une forme paramétrique de C_m est donnée par l'ensemble des points $(x(t), y(t)), t \in \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{cases} x(t) &= 2m + R_m \cos(t), \\ y(t) &= m + R_m \sin(t). \end{cases}$$

3. En déduire un programme en Python permettant de visualiser le lieu des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbf{R}$.
4. **4.1)** Donner les coordonnées du projeté orthogonal de Ω_m sur l'axe des ordonnées.
   4.2) Y'a-t-il des cercles C_m tangents à l'axe des ordonnées?
5. Montrer qu'il existe deux points A et B indépendants de m et appartenant à tous les cercles C_m. On prendra pour A le point de plus grande abscisse.
6. **6.1)** Donner les coordonnées de Ω_m dans un repère d'origine A.
   6.2) Donner les coordonnées du projeté orthogonal de Ω_m sur (AB).
   6.3) Donner la distance entre (AB) et Ω_m.
7. Soit $[AA']$ un diamètre de C_m. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M}$ sont orthogonaux si et seulement si M appartient à C_m.

1.3. Analyse

Exercice 2.8 | **A–ENV 2016. Étude d'une suite récurrente.** (Solution : 32) Soient a et b sont deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b], x \longmapsto f(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant

$$\exists k \in [0, 1[, \quad \forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leq k.$$

1. **1.1)** En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|.$$

   On dit alors que f est *k-contractante.*
   1.2) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[a, b]$, c'est à dire un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$ <u>*Indication :*</u> *On pourra étudier g définie par $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in [a, b]$.*

1.3) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & \in [a,b], \\ \forall n\in\mathbf{N}, & u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

i) Écrire une fonction d'en-tête `calc_liste_U(n, u_0, f)` et qui renvoie le terme u_n de la suite (u_n) associée à f et u_0.

ii) Montrer que la suite est bien définie , à valeurs dans $[a,b]$ et vérifie

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad |u_{n+1}-u_n| \leq k^n|u_1-u_0|.$$

iii) En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument.

iv) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers c un point fixe de f.

v) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad |u_n-c| \leq k^n|u_0-c|.$$

2. 2.1) Montrer que l'équation $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=0$ admet sur $[-2,0]$ une unique solution, notée α.

2.2) Montrer que la fonction g définie sur $[-2,0]$ par $g(x) = -1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$ admet un unique point fixe.

2.3) Montrer que g est $\frac{1}{2}$-contractante sur $[-2,0]$.

2.4) Écrire une fonction d'en-tête `pointFixe(prec)` qui calcule une valeur approchée de α avec une précision contenue dans le paramètre `prec`.

Exercice 2.9 | Agro—Véto, 2018. Étude d'une suite implicite (Solution : 34) Pour $n\geqslant 1$, on définit la suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall x\in\mathbf{R}\quad f_n(x) = nx^3+n^2x-2.$$

1. 1.1) Montrer pour n fixé que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$ notée a_n. Montrer que $a_n>0$.

1.2) Écrire une fonction `dicho(n)` qui calcule une valeur approchée de a_n pour un n donné, à précision 10^{-2}, en utilisant le principe de dichotomie. La tester pour $n=2$.

1.3) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. On pose $u_n = n^2a_n$ pour tout $n\geqslant 1$.

2.1) Écrire un programme qui trace les termes u_n pour $n\in[\![10\,,40]\!]$. En déduire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

2.2) Démontrer cette conjecture. En déduire un équivalent de la suite (a_n).

3. Soit g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=\frac{2x^3+1}{3x^2+2}$ pour tout $x\in[0,1]$.

3.1) Montrer que g est croissante sur $[a_2,1]$.

3.2) On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $x_0=1$ et $x_{n+1}=g(x_n)$ pour tout entier $n\in\mathbf{N}$. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.10 | Agro—Véto, 2018 (Solution : 36) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite décroissante, convergente vers 0. On définit pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k.$$

1. 1.1) Écrire une fonction permettant de représenter les termes de la suite (S_n), sur un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et conjecturer. On pourra commencer la fonction par le préambule minimal suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

et utiliser a commande `plt.plot(x, y, "o")`. *Aucune fonction n'est imposée, mais vous pouvez répondre à cette question en introduisant une fonction retournant la liste des termes de* $[S_1, S_2,\dots]$

1.2) Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1.3) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite ℓ.

1.4) Justifier que $S_{2n+1}\leq \ell \leq S_{2n}$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$.

2. On pose $u_k=\frac{1}{k}$ pour tout $k\in\mathbf{N}^*$.

2.1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,x = 0$.

2.2) Montrer que pour tout entier naturel b :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+b+1} = \int_0^1\frac{x^b}{1+x}\,x.$$

2.3) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right) = -\ln(2)$.

2.4) À l'aide des questions 1. et 2., écrire une fonction Python qui donne une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

Exercice 2.11 | Agro—Véto, Sujet 7, 2017 (Solution : 37) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par la donnée de ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = \frac{1}{3}\left(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}\right).$$

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite et renvoyant la liste de ses 100 premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.
2. Démontrer que $0 \notin \operatorname{Spec} A$.
3. Démontrer que pour tout complexe λ, nous avons : $\lambda \in \operatorname{Spec} A$ si et seulement si λ racine de $X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$.
4. Démontrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbf{C})$, et z un complexe tel $|z| < 1$ tels que : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix}P^{-1}$.
5. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n et en déduire une expression en fonction de n, A, X_0.
6. Démontrer alors qu'il existe trois complexes a, b, c (que l'on ne demande pas d'expliciter) tels que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = a + bz^n + c\overline{z}^n.$$
7. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|bz^n + c\overline{z}^n\right| = 0$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re}\left(bz^n + c\overline{z}^n\right)$ et de $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}\left(bz^n + c\overline{z}^n\right)$?
8. En déduire que $a \in \mathbf{R}$ et que : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.[1]

[1] On pourrait croire que cette question sort un peu du programme étant donné que la convergence des suites complexes (*i.e.* celle des parties réelles et imaginaires vers une limite finie) ne l'est pas. En fait ce n'est pas le cas (*cf.* correction) notamment car (u_n) est une suite réelle (récurrence immédiate).

Exercice 2.12 | Agro—Véto, 2015, Méthode numérique pour une équation différentielle (Solution : 39) On considère l'équation différentielle suivante, dans laquelle y désigne la fonction inconnue de la variable x

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{1+x^2}. \qquad \text{(E)}$$

On rappelle que la méthode d'Euler consiste à approcher la dérivée y' au temps x par le taux d'accroissement $\frac{y(x+h)-y(t)}{h} \approx y'(x)$ où h est un réel très petit. Dans notre cas, nous aurons pour toute solution y :

$$x \cdot \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + 2y(x) \approx \frac{x^2}{1+x^2},$$

donc pour $x \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$y(x+h) \approx y(x) - \frac{2\cdot h}{x}y(x) + \frac{h\cdot x}{1+x^2}.$$

De cette façon, si on connait la valeur de y au temps $x_0 > 0$, on peut en calculer une approximation au temps x_0+h, puis au temps x_0+2h etc.. On est donc amené à introduire la suite récurrente

$$y_0 = y(x_0), \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad y_{n+1} = y_n - \frac{2\cdot h}{x_0 + nh}y_n + \frac{h\cdot(x_0+nh)}{1+(x_0+nh)^2}.$$

1. En remarquant que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^3 = x(1+x^2) - x$, déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3}{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $f_\lambda : x \in \mathbf{R}^\star \longmapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$ pour tout λ. Donner une condition sur λ pour que f_λ soit prolongeable par continuité en zéro. Sous cette condition en λ, le prolongement obtenu est-il dérivable ?
3. **(Méthode d'Euler)** Écrire une fonction Python d'en-tête `soleuler(x_0)` qui prend en paramètre le point initial x_0, et retourne deux listes :
   - la première contenant les $x_0 + \frac{i\cdot(100-x_0)}{100}$, pour $i \in [\![0, 100]\!]$,
   - et une seconde liste contenant les termes de la suite récurrente $y_0, y_1, \dots, y_{100}$ avec h vérifiant $h = \frac{100-x_0}{100}$.

   Exécuter cette fonction pour $x_0 = 1$, et tracer le nuage de points obtenus à l'aide du module `matplotlib`. Que représente ce graphique par rapport à (E) ?

4. On souhaite maintenant résoudre l'équation différentielle (E).
   - 4.1) Résoudre (E) sur $\mathbf{R}^{+\star}$, on notera $\mathscr{S}^+$ l'ensemble de ces solutions. En déduire l'unique solution $\widehat{y}$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$ avec la condition de Cauchy $y(1) = \frac{1}{2}$.
   - 4.2) Résoudre (E) sur $\mathbf{R}^{-\star}$, on notera $\mathscr{S}^-$ l'ensemble de ces solutions.
   - 4.3) On appelle solution sur $\mathbf{R}$, toute solution de (E) définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Ainsi, si y est une solution sur $\mathbf{R}$, y restreinte à $\mathbf{R}^{+\star}$ est un élément de $\mathscr{S}^+$, et y restreinte à $\mathbf{R}^{-\star}$ est un élément de $\mathscr{S}^-$.
     - i) Analyser le prolongement par continuité en zéro d'une solution y. Le prolongement, encore noté y, est-il dérivable en zéro ?
     - ii) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ à (E).
     - iii) Pour une telle solution, positionner localement la courbe représentative par rapport à là tangente en zéro.
5. On souhaite dans cette question comparer la solution exacte avec celle obtenue de manière approchée.
   - 5.1) Écrire une fonction Python nommée `solexacte` prenant en paramètre $b \in \mathbf{R}$ et traçant la solution sur un intervalle $[1, b]$.
   - 5.2) Comparer cette courbe à celle de la solution exacte.

Exercice 2.13 | Algèbre linéaire au service d'une équation différentielle (Solution : 42)
On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $\quad y'' - 3y' + 3y = \mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{2x}$ où Q est une fonction polynomiale à coefficients réels.

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$, on note : $\quad f(x) = \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{2x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
   - 1.1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:
   $$f''(x) - 3f'(x) + 3f(x) = \varphi(\mathrm{P})(x)\mathrm{e}^{2x}$$
   où $\varphi(\mathrm{P})$ désigne la fonction $x \longmapsto \mathrm{P}''(x) + \mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}(x)$.
   - 1.2) Montrer que $\varphi : \mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}] \longmapsto \varphi(\mathrm{P})$ est une application linéaire.
   - 1.3) Soit $n \geqslant 0$. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$, $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$.
   - 1.4) On admet provisoirement que φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que :
   $$f \text{ est solution de (E)} \iff \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} \iff \mathrm{P} = \varphi^{-1}(\mathrm{Q}).$$
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note alors φ_n l'endomorphisme
$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[\mathrm{X}], \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + \mathrm{P}' + \mathrm{P}''. \end{array} \right.$$
   - 2.1) Déterminer la matrice A_n de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$.
   - 2.2) Écrire une fonction d'en-tête `A(n)` qui retourne la matrice de φ_n dans la base canonique codée sous forme de tableau `numpy`. *On rappelle que la commande* `np.zeros((a, b))` *permet de coder une matrice nulle à* `a` *lignes et* `b` *colonnes*
   - 2.3) Donner les valeurs propres de φ_n. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
   - 2.4) Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$.
   - 2.5) En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$.
3. **(Application)**
   - 3.1) Donner la matrice de φ_3 puis celle de φ_3^{-1} dans la base canonique.
   - 3.2) Résoudre, en utilisant l'application φ_3, l'équation différentielle $y'' - 3y' + 3y = (x^3 - 3x^2 + 2x - 2)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbf{R}$.
   - 3.3) Plus généralement, considérons l'équation différentielle $y'' - 3y' + 3y = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\mathrm{e}^{2x}$ avec $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbf{R}$, on note `Q = [a_0, a_1, a_2, a_3]`. Écrire, en utilisant les questions précédentes, une fonction d'en-tête `poly_part(Q, x)` qui retourne la valeur en x d'une solution particulière de la forme polynôme-exponentielle, en utilisant les questions précédentes.
   En déduire une commande permettant de tracer cette solution sur l'intervalle $[0, 10]$.
4. Expliquer comment adapter la démarche de la question précédente au cas où Q est un polynôme de degré quelconque.

Exercice 2.14 | Agro–Véto. Étude d'une intégrale à paramètre (Solution : 44) On définit la fonction f sur $\mathbf{R}_*^+$ par
$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{t + x}\,\mathrm{d}t.$$

1.

1.1) Proposer une fonction informatique prenant un argument réel $x > 0$ et retournant une approximation de $f(x)$.

1.2) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique. Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites aux bornes de son domaine de définition.

2. **2.1)** Soit x et x' deux réels strictement positifs tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$ et en déduire que f est monotone sur $\mathbf{R}_*^+$.

2.2) Justifier que f admet une limite en $+\infty$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.*

3. Dans cette question on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_*^+$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

3.1) Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$

3.2) En déduire que f est continue en x_0.

4. Montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{A}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{A}{x}.$$

Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

5. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.

5.1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}_*^+$ par

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x + t}\,dt.$$

En admettant l'inégalité suivante :

$$\forall t \in [0,1], \quad |\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2},$$

établir que g est une fonction bornée.

5.2) En déduire un équivalent simple de f en 0.

1.4. Aléatoire

Dans les exercices qui suivent, il est nécessaire de bien revoir l'intérêt de la loi faible des grands nombres dans l'approximation de probabilités et d'espérances.

1.4.1. Aléatoire discret

Exercice 2.15 | **A–ENV 2021. Pile ou Face jusqu'au motif « PPF »** (Solution : 46) On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du premier lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats « Pile, Pile, Face », dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1.

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, alors X prend la valeur 7.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : « Obtenir Face au n-ème lancer », et P_n : « Obtenir Pile au n-ème lancer ».

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on pose :

- B_n l'événement défini par : $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.
- U_n l'événement défini par : $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$.
- $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.

1. On commence par simuler l'expérience aléatoire.

1.1) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dé jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

1.2) Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X, en calculant des moyennes de simulations de X.

2. **2.1)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $\mathbf{P}(B_n)$ et justifier que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

2.2) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n.$$

2.3) En commençant par étudier le signe de $u_{n+3} - u_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 3$, démontrer que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X = -1)$.

3. On admettra dans cette question le résultat suivant : *Pour toute variable aléatoire* Y *à valeurs dans* $\mathbf{N}$*, si la série de terme général* $\boldsymbol{P}(Y > n)$ *converge, alors* Y *admet une espérance, et*

$$\boldsymbol{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(Y > n).$$

Pour tout entier naturel n, on note $v_n = \mathbf{P}(X > n)$.

3.1) Donner la valeur de v_0, v_1, v_2 et v_3.

3.2) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8}v_n.$$

3.3) Montrer que X admet une espérance, et déterminer cette espérance.

Exercice 2.16 | Agro–Véto 2021 (Solution : 47) Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X selon une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).

- Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.
- Si X est nul, on considère que la manche est nulle.
- Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna on considère que Anna a gagné.

On pose G le gain algébrique (*i.e.* positif ou négatif) de Anna. On note enfin :

- A «Anna gagne», de probabilité $p = \mathbf{P}(A)$,
- B «Benoît gagne», de probabilité $q = \mathbf{P}(B)$,
- et C «la manche est nulle», de probabilité $r = \mathbf{P}(N)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G. On pourra se servir de la commande `np.random.poisson(a)` qui permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a, et des commandes ci-après dont on observera le résultat.

```
>>> 5 % 2
1
>>> 3 % 2
1
```

2. **2.1)** Déterminer r et exprimer p et q en fonction de sommes.

2.2) Exprimer $p + q$ et $p - q$ en fonction de a.

2.3) En déduire les valeurs de r, p, q en fonction de a.

3. On souhaite avoir des informations quant à l'existence éventuelle et la valeur des gains d'Anna.

3.1) Écrire une fonction d'en-tête `approxG(a)` permettant d'estimer la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part. *On rappelle qu'une moyenne de simulations d'une variable aléatoire est une bonne approximation de l'espérance*

3.2) D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? On pourra tester les valeurs de gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.

4. **4.1)** Justifier l'expression $G = (-1)^X \cdot X$.

4.2) Calculer l'espérance du gain G de Anna.

5. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α. On garde les mêmes notations que précédemment.

5.1) Déterminer p, q, r.

5.2) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de G après avoir justifié son existence.

5.3) Comment interpréter le signe de $\mathbf{E}(G)$?

Exercice 2.17 | Agro — Véto, Sujet 9, 2018 — Étude de l'extinction d'une population cellulaire à l'aide de la fonction génératrice (Solution : 49) On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :

- soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité $\frac{2}{3}$;
- soit mourir et se désintégrer avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n-ième étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. **2.1)** Pour $n \geq 1$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires. Expliciter $X_n(\Omega)$.
   2.2) Écrire un programme informatique prenant en argument la valeur de n, et retournant les valeurs d'une simulation de $(X_0; X_1; \dots; X_n)$.
   2.3) Soit i tel que $2i \in X_n(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\{X_n = 2i\}$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit la fonction G_n par :
$$\forall x \in \mathbf{R},\ G_n(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} x^k \mathbf{P}(X_n = k) \quad \textit{(avec } 0^0 = 1 \textit{ par convention)}$$
   et on admet que :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ G_{n+1} = G_n \circ G_1 = G_1 \circ G_n.$$
   3.1) Donner les valeurs de $G_n(1)$ et $G_n'(1)$.
   3.2) En déduire une relation entre $\mathbf{E}(X_{n+1})$ et $\mathbf{E}(X_n)$.
   3.3) Calculer alors l'espérance de X_n en fonction de n.
4. On note $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$, et soit R l'événement « La population de bactéries finit par s'éteindre ».
   4.1) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(x))^2$.
   4.2) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} u_n^2.$$
   4.3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à déterminer.
5. On note $\quad \forall n \in \mathbf{N}$, D_n l'événement « la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n ».
   5.1) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{P}(D_n) = u_n - u_{n-1}$.
   5.2) En remarquant que $R = \cup_{n=1}^{+\infty} D_n$, déterminer alors la probabilité que la population de bactéries s'éteigne.

Exercice 2.18 | **Agro—Véto 2019** Dans cet exercice , on considère une population de tortues.

1. Le nombre X d'oeufs pondus par une tortue chaque année suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chacun d'eux a une probabilité p d'éclore. On appelle Y le nombre d'oeufs éclos.
   1.1) Écrire une fonction Python simulant une ponte et donnant le nombre d'oeufs éclos. *On pourra utiliser une approximation de la loi de Poisson de paramètre λ par une binomiale de paramètres 10^4, $\frac{\lambda}{10^4}$.*
   1.2) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$.
   1.3) En déduire la loi de Y. Donner l'espérance de Y.
2. Des études sur ce type de tortue ont permis de déterminer que :
   - les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge,
   - 40% des tortues adultes de l'année n meurent avant la fin de l'année,
   - les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie.

   On définit a_n comme le nombre d'adultes vivant l'année n, et b_n le nombre de bébés de cette même année.
   2.1) Déterminer la valeur de a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et b_n ainsi que celle de b_{n+1} en fonction de a_n.
   2.2) On note $E = \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} - 0.6u_{n+2} - 0.4u_n = 0\right\}$. Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un élément de E.
   2.3) On considère que l'on a comme conditions initiales $a_0 = 8000$, $a_1 = 7700$ et $a_2 = 7400$. Écrire une fonction Python de paramètre n qui renvoie a_n. La suite (a_n) semble-t-elle converger?
   2.4) **i)** Donner les racines réelles et complexes du polynôme $P = X^3 - 0.6X^2 - 0.4$.
   ii) Prouver que si r est racine de P, la suite des puissances de r appartient

à E.

iii) Montrer que l'application ϕ, qui à toute suite u appartenant à E associe (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme de E sur $\mathbf{R}^3$. En déduire que E est de dimension 3.

iv) Notons r_1, r_2, r_3 les trois racines de P. On admet que la famille $\big((r_1^n), (r_2^n), (r_3^n)\big)$ est libre dans E. Montrer que c'est une base de E.

v) En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *On ne demande pas la valeur explicite de la limite.*

1.4.2. Aléatoire continu

Exercice 2.19 | D'après A–ENV 2021 (Solution : 51) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X.
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X.
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
   Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

6.1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n.

6.2) Calculer alors pour tout réel x :

$$G(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbf{P}(T_n \leqslant x).$$

6.3) On **admet** que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité. Montrer que T admet pour densité la fonction g donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6.4) À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2.20 | Agro—Véto, Sujet 6, 2018 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à l'aide de Python, justifier que $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.
4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si} x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que Φ est une densité de probabilité.
5. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,dt$ converge absolument.
6. Montrer que : $\forall t > \alpha, f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Exercice 2.21 | D'après A–ENV 2021 (Solution : 52) *On rappelle que si* V *et* W *sont deux variables indépendantes de densité* f_V *et* f_W*, alors* V + W *est une variable à densité, dont une densité h est définie par :* $\forall x \in \boldsymbol{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x-t)\,\mathrm{d}t.$

Trois clients, notés A, B et C arrivent simultanément aux deux caisses inoccupées d'un magasin.

Les clients A et B occupent immédiatement (à l'instant $t = 0$) les deux caisses, C attend la première caisse laissée libre par A ou B. On néglige le temps de changement de personne.

On suppose que les durées de passage à une caisse par A, B ou C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

1. À l'aide de simulations informatiques en Python, estimer la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.
2. On désigne par la variable aléatoire U le temps attendu par C avant d'être pris en charge à la caisse. Exprimer U en fonction de X, Y, puis montrer que U admet une densité et en donner une.
3. Déterminer l'espérance et la variance de U.
4. On note T le temps total passé aux caisses par C en comptant son temps d'attente et sa durée de passage à la caisse.
   - **4.1)** Exprimer simplement la variable T en fonction des variables précédentes.
   - **4.2)** Déterminer la loi de T.
   - **4.3)** Déterminer l'espérance de T.
5. On admet que la variable $|X - Y|$ a la même densité que la variable U. Déterminer alors la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

Exercice 2.22 | Agro—Véto 2019 (Solution : 54) Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Soient $a \in]0;1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité.
2. On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. On considère la variable aléatoire Y donnée par :

$$Y = \frac{X^2}{2a}.$$

   - **3.1)** Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   - **3.2)** On pose $U = 1 - e^{-Y}$ de sorte que $Y = -\ln(1-U)$. Montrer que U suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
   - **3.3)** En déduire une fonction Python `Y()` qui simule la variable Y.
   - **3.4)** Écrire une fonction Python `X(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0,1]$ et qui simule X.
4.
   - **4.1)** Donner une densité, que l'on notera g, d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de variance a.
   - **4.2)** À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.
   - **4.3)** En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
   - **4.4)** En déduire $\mathbf{Var}(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$.
5. On considère désormais que le paramètre $a \in]0;1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :

$$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

   - **5.1)** Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.
   - **5.2)** Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $\mathbf{Var}(X^2) = 4a^2$.
   - **5.3)** Montrer que $\mathbf{Var}(S_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n à partir de laquelle $\left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

1.4.3. Statistiques

Exercice 2.23 | **Agro—Véto, Sujet 3, 2018** (Solution : 56)

On pourra utiliser pour les programmes `Python` *la fonction* `linalg.matrix_rank()` *du module* `numpy`*, qui permet de déterminer le rang d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :*

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([[1 ,2 ,1] , [2 ,3 ,2], [3 ,5 ,3]])
>>> np.linalg.matrix_rank(A)
2
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$*, c'est-à-dire 2. On pourra aussi utiliser la fonction* `randint()` *du module* `random`*. Pour a et b deux entiers* `randint(a,b)` *retourne un entier équiprobablement entre a et b (a et b étant inclus).*
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. **1.1)** Écrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires. *(On pourra représenter les vecteurs par des listes).*
   1.2) Écrire une fonction Python `vecteurs_propres(u)` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'il est un vecteur propre de A.
2. **2.1)** Vérifier que -1, 1, 2 sont valeurs propres de A et préciser pour chacune un vecteur propre associé.
   2.2) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad M_n^\star = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

   3.1) Donner, pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, l'approximation de la probabilité $P([-\alpha < M_n^\star < \alpha])$ donnée par le théorème central limite.
   3.2) En déduire que $\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au seuil de 95%. *On pourra admettre que,* $\forall x \in [0;1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ *et si* Φ *désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors* $\Phi(1;96) \approx 0,975$.
4. On note N_V le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers de $[\![-5\,,5]\!]$.
   4.1) Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N_V :

```
def simul ():
    u = [ randint ( -5 ,5) for k in range (3) ]
    return vecteurs_propres(u)
n = 10000 #Valeur de n a definir.
nb = 0
for k in range (n):
    if simul ():
        nb += 1
print(round (nb/n *11**3)) # round (x) = l'entier le plus
↪ proche de x.
```

   4.2) Comment choisir n pour que l'on soit sûr à 95% de la valeur affichée ?
   4.3) Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2.24 | **Agro—Veto, Sujet 7, 2018** (Solution : 58) *On rappelle que si* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de densité* f_X *et* f_Y *alors* $X+Y$ *est une variable à densité et la fonction h définie sur* $\mathbf{R}$ *par :*

$$\textit{Pour tout réel } t, \quad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,\mathrm{d}u$$

est une densité de $X+Y$.[2] On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Justifier son existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2, ainsi qu'une densité de V^2.
2. **2.1)** On considère la variable aléatoire $Z = U^2+V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h.
   2.2) Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $\mathbf{P}(Z \leq 1)$.
3. **3.1)** Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
   3.2) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$.
   3.3) Montrer que, sur $]0;1]$, on a : $h(x) = \frac{\pi}{4}$. *Indication : On pourra utiliser le changement de variable* $y = \sin^2(u)$)..
   3.4) Interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.
4. On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\frac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
   4.1) Soit $\varepsilon > 0$, déterminer, en fonction de n et ε, une majoration de $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.
   4.2) En déduire, à partir de quelle valeur de n, il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.
   4.3) À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.
5. Existe-t-il d'autres alternatives pour déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} ?

[2] Attention, ici la formule du produit de convolution est rappelée, mais ce n'est pas toujours le cas !

2. BANQUE G2E — MATHÉMATIQUES

2.1. Algèbre & Géométrie

Exercice 2.25 | (Solution : 61) Soit $n \geqslant 2$, on note $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Soient a et b deux réels distincts.

1. Soit $F_a = \{P \in E \text{ tel que } P(a) = 0\}$. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E. En déterminer une base et sa dimension.
2. Soit $F = \{P \in E\,,\ P(a) = P(b) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. On définit $u : P \in E \longmapsto u(P)(X) = P(a)X + P(b)$.
   3.1) Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$.
   3.2) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\,u$?

Exercice 2.26 | **G2E. Étude d'une récurrence linéaire avec des applications** (Solution : 62) Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}},\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right\}$.

1. Montrer que E est un **R**-espace vectoriel.
2. Soit
$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^3, \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2). \end{array} \right.$$
   Montrer que f est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.
3. Donner trois suites géométriques de E.
4. En déduire E.

Exercice 2.27 | (Solution : 63) À tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, on associe le polynôme F(P) défini par F(P) = Q où

$$Q(X) = XP(X+1) - (X-1)P(X).$$

1. Donner degré et coefficient de $F(X^k)$, pour k dans $[\![0\,,\,n]\!]$.
2. Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Est-il diagonalisable ?

Exercice 2.28 | (Solution : 64) On définit l'ensemble $\mathscr{C}$ comme l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\infty[$. On définit l'application T qui à toute fonction f de $\mathscr{C}$ associe $F = T(f)$, avec :

$$F(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$.
2. Démontrer que T est injectif.
3. L'application T est-elle bijective ?

2.2. Analyse

Exercice 2.29 | **Suite implicite (d'après concours G2E)** (Solution : 64) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et f_n définie sur $\mathbf{R}^-$ par : $f_n(x) = 1 + x - \frac{e^x}{n}$ pour tout $x \in \mathbf{R}^-$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}^-$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2. **2.1)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers une limite ℓ.
   2.2) Déterminer ℓ.
   2.3) Donner un équivalent de $x_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.30 | **G2E. Ersatz de fonction** argsh (Solution : 65) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. Étudier f. Montrer que f définit une bijection de $\mathbf{R}$ sur J un intervalle que l'on déterminera. *On note g la bijection réciproque dans la suite.*
2. Sans la calculer, montrer que g est dérivable et que $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ pour tout $x \in J$.
3. Déterminer maintenant l'expression de g et retrouver l'expression de $g'(x)$ pour tout x de la question précédente.

2.3. Aléatoire

Exercice 2.31 | **G2E. Équilibrage d'un jeu de pile ou face** (Solution : 65) ACHILLE et HECTOR ont chacun une pièce. ACHILLE la lance en premier, puis HECTOR, puis de nouveau ACHILLE *etc.*, le gagnant est celui qui obtient pile en premier.

1. On suppose que les deux pièces amènent pile avec la même probabilité $p \in]0,1[$
   1.1) Quelle est la probabilité que ACHILLE gagne lors de son n-ième lancer avec $n \in \mathbf{N}^\star$?
   1.2) Quelle est la probabilité que ACHILLE gagne ?
   1.3) Le jeu est-il équitable ?
2. On suppose maintenant que la pièce d'ACHILLE amène pile avec la probabilité $p_1 \in]0,1[$ et celle d'HECTOR amène pile avec la probabilité $p_2 \in]0,1[$. Pouvez-vous donner une condition sur p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 2.32 | (Solution : 66) Soit $n \geqslant 2$. On dispose d'une urne comportant $2n$ boules de couleurs différentes. Parmi elles, n sont numérotées de 1 à n, et les n autres portent le numéro 0. On effectue dans cette urne un tirage simultané de n boules. Pour i entier entre 0 et n, on note X_i la variable indicatrice de l'événement « la boule numéro i est dans la poignée ». Donner la loi de X_i.

Exercice 2.33 | (Solution : 66) Une urne contient n boules numérotées de 0 à $n-1$. On effectue trois tirages successifs avec remise. On note X, Y et Z les résultats obtenus successivement aux trois tirages.

1. Calculer $\mathbf{P}(X + Y = Z)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(X + Y + Z = n - 1)$.

Exercice 2.34 | **Produits de lois RADEMACHER** (Solution : 67) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = -1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1-p$ avec $p \in]0,1[$. On pose $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer l'espérance de Z_n.
2. Déduire de la question précédente la loi de Z_n.
3. Donner une condition sur p pour que Z_1 et Z_2 soient indépendantes.

Exercice 2.35 | (Solution : 68) On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ avec $n \in \mathbf{N}$. Ces variables sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, $\quad Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. Calculer $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
2. Justifier que Y_k et Y_{k+j} sont indépendantes si $j > 1$.
3. On note $Z = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$. On admet que $\mathbf{Var}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Var}(Y_k) + \sum\limits_{0\leq i<j\leq n-1}\mathbf{Cov}\left(Y_i, Y_j\right)$.
   Donner la variance de Z.

Exercice 2.36 | (Solution : 68) Soit T une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ, et a un réel, ainsi que $X = |T| + a$.

1. Donner la fonction de répartition de X en fonction de Φ.
2. La variable aléatoire X est-elle à densité ? Si oui, en donner une densité .
3. La variable aléatoire X a-t-elle une espérance ? Si oui, la donner.

Exercice 2.37 | **G2E. Transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle à densité** (Solution : 69) Soit X une variable aléatoire de densité f, on pose, pour t réel et lorsque c'est possible,

$$L_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} f(x)\,dx.$$

1. Déterminer $L_X(0)$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $L_X(a)$ et $L_X(b)$ existent. Montrer que pour tout t compris entre a et b, $L_X(t)$ existe. Que peut-on en déduire sur le domaine de définition de L_X ?
3. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que si t appartient à l'intersection des domaines de définition de L_X et L_Y, alors $L_{X+Y}(t)$ existe et satisfait : $\quad L_{X+Y}(t) = L_X(t)L_Y(t)$.
4. Montrer que si X suit une loi normale centrée réduite, alors : $\quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad L_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

2.4. Session 2021

Exercice 2.38 | Soient $n \geqslant 1$ et $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que la matrice A de f dans la base canonique vérifie :

$$[\mathrm{A}]_{i,j} = u_i u_j, \quad \forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2.$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u)$.
3. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Calculer $f(x) - \langle u|x\rangle\, u$ et conclure quant à la nature de f. Déduire le spectre de f.

Exercice 2.39 | Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice A dans $\mathscr{B}$ telle que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2.40 | Soit $x \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Déterminer sa parité.
2. Déterminer f', et donner l'équation de la tangente en zéro à la courbe de f.
3. Étudier les variations de $x \longmapsto f(x) - x$, et préciser la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en zéro.
4. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ et tracer la tangente trouvée précédemment.

Exercice 2.41 | On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$u_0 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}$.
4. Montrer que $\frac{u_{n-1}}{n^2}$ tend vers zéro lorsque $n \longrightarrow \infty$, puis que $\frac{u_n}{n}$ tend vers zéro lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Exercice 2.42 | **Lien fonction de répartition et anti-répartition** Soit $n \geqslant 2$, et $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{U}[\![1\,,\,n]\!]$.

1. Donner, sans le démontrer, la valeur de l'espérance de X et Y.
2. Soit Z une variable aléatoire de sorte que $\mathrm{Z}(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!]$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{Z} \geqslant k).$$

   En déduire l'espérance de $m = \min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathrm{M} = \max(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.
3. Deux personnes lancent un dé équilibré. Quel est, en moyenne, l'écart entre les nombres obtenus à leurs lancers respectifs ?

Exercice 2.43 | Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ avec $n \geqslant 1$. On pose

$$\mathrm{U_X} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\mathrm{X}=1) \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}=2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}=n) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U_Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\mathrm{Y}=1) \\ \mathbf{P}(\mathrm{Y}=2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M} = \left[\mathrm{M}_{i,j}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R}),$$

avec $\mathrm{M}_{i,j} = \mathbf{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$.

1. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors M est de rang 1.
2. On suppose que M est de rang 1.
   - **2.1)** Soient $\mathrm{C}_j \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $j = 1, \dots, n$ les vecteurs colonnes formant la matrice M. Montrer que :

$$\mathrm{C}_1 + \cdots + \mathrm{C}_n = \mathrm{U_X}.$$

   - **2.2)** En déduire que pour tout $j \in \{1, \dots, b\}$, $\quad \mathrm{C}_j = \beta_j \mathrm{U_X}$ pour un certain $\beta_j \in \mathbf{R}$.
   - **2.3)** Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, b\}$, $\quad \mathbf{P}(\mathrm{Y} = j) = \beta_j$.

2.4) En déduire que $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exercice 2.44 | (Solution 70) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire Z par

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } X < Y, \\ 1 & \text{si } X = Y, \\ 2 & \text{si } X > Y. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z.
2. Donner l'espérance et la variance de Z.
3. Si $p = \frac{1}{2}$, que peut-on dire de la loi de Z ?

3. BANQUE G2E — INFORMATIQUE

Exercice 2.45 | Nous nous intéressons à une gamme de DVD. Pour les reconnaître, ils possèdent tous un code composé des trois éléments suivants :

1. Un numéro compris entre 1 et 9999.
2. Une chaîne de caractère constitué de trois lettres.
3. Un numéro final : 1 si le dvd vient d'Amérique 2 s'il vient d'Europe ou d'Afrique et 3 pour l'Asie.

Par exemple, le premier DVD d'Amérique sera : `1 AAA 1`. Le second sera `2 AAA 1` jusqu'à `9999 AAA 1`. Le suivant sera `1 AAB 1` puis `2 AAB 1` jusqu'à `9999 AAZ 1` Puis ensuite 1 ABA 1 et ainsi de suite. Les lettres sont augmentées lorsque l'on atteint 9999.

1. Par quel objet Python proposez-vous de représenter le code d'un DVD ?
   On suppose dans la suite que l'ensemble des DVD d'une vidéothèque est représenté par une liste `listeDVD` contenant tous les codes des DVD de la vidéothèque. Dans une chaîne de caractère, la fonction `ord(lettre)` permet de transformer une chaîne de caractère formée d'une seule lettre en un entier : `ord('A')` renvoie `65`, `ord('B') 66` et ainsi de suite jusqu'à `ord('Z')` qui renvoie `90`.
2. Écrire une fonction qui reçoit en argument le nom sous forme de chaîne de caractères de la région et qui renvoie le code du premier DVD de la région (les noms étant `amerique`, `europe_afrique`, `asie`).
3. **3.1)** Écrire une fonction qui reçoit en argument la liste des codes de tous les DVD et le code d'une région et qui renvoie la liste des codes des DVD de cette région.
   3.2) Écrire une fonction qui reçoit en argument deux chaînes de caractères de longueur trois formées avec les lettres de `A` à `Z` et qui renvoie `True` si la première chaîne est plus grande ou égale à la seconde, `False` sinon (plus grand signifiant au-deLà dans l'ordre alphabétique : par exemple la chaîne `ABA` est plus grande que la chaîne `AAB`).
   3.3) Écrire une fonction qui reçoit en argument la liste des codes de tous les DVD et le code d'une région, et qui renvoie le code du DVD le plus ancien de cette région (plus ancien : celui de code le plus petit).

Exercice 2.46 | Nous utilisons le système décimal (base 10) dans nos activités quotidiennes. Ce système est basé sur une logique à dix symboles, de 0 à 9, avec une unité supérieure (dizaine, centaine, etc.) à chaque fois que dix unités sont comptabilisées. C'est un système positionnel, c'est-à-dire que l'endroit où se trouve le symbole définit sa valeur. Ainsi, le 2 de 523 n'a pas la même valeur que le 2 de 132. En fait 523 est l'abréviation de $5 \times 100 + 2 \times 10 + 3$. On peut selon ce principe imaginer une infinité de systèmes numériques fondés sur des bases différentes. En informatique, outre la base 10, on utilise très fréquemment le système binaire (base 2) puisque la logique booléenne est à la base de l'électronique numérique. Deux symboles suffisent : 0 et 1. Cette unité élémentaire ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1 s'appelle un bit (de l'anglais binary digit). Une suite de huit bits s'appelle un octet. On utilise aussi très souvent le système hexadécimal (base 16) du fait de sa simplicité d'utilisation et de représentation pour les mots machines (il est bien plus simple d'utilisation que le binaire). Il faut alors six symboles supplémentaires : A, B, C, D, E et F. Le tableau ci-dessous montre la représentation des nombres de 0 à 15 dans les bases 10, 2 et 16 :

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110
Hexadécimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E

1. Écrire une fonction `Exa` convertissant une base décimale en base hexadécimale. Par exemple, la fonction renverra `B` si on execute `hexa(11)`.
2. Écrire une fonction convertissant une base binaire en base décimale du type 0111 rend 7.
3. À partir d'une liste de bases binaires, donner une fonction qui la convertit en bases hexadécimales par exemple 1100001001011000 donne `C258`.
4. **(Compression)** Donner une fonction qui compresse une liste de 1 et de 0 comme ceci 11101100 donne (3,1),(1,0),(2,1),(2,0).

4. SOLUTIONS

Solution (exercice 2.1)

(Énoncé : 4)

1. On note que $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. On a donc $j^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$, $j^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{3}} = 1$ et $j^4 = j$.
2. **2.1)** Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. La matrice $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_2$ est inversible si et seulement si $\lambda^2 - (rs)^2 \neq 0$. Donc M a deux valeurs propres rs et $-rs$: elle est donc diagonalisable. On note que le vecteur $\boxed{\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre associé à } rs}$, et $\boxed{\begin{pmatrix} -r \\ s \end{pmatrix} \text{ associé à } -rs}$.

   2.2) Si l'un des deux est nul, alors la matrice M est triangulaire, avec 0 pour seule valeur propre. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est nulle, *ie.* si $r = s = 0$.

   2.3) Il y a plusieurs versions possibles, en voici quelques unes.

```python
def decalage(L):
    """
    retourne la version décalée de L par modif. d'une copie
    """
    M = L[:]
    M.remove(L[0]) # ou del L[0]
    M.append(L[0])
    return M
def decalage_bis(L):
    """
    retourne la version décalée de L par boucle for sur une
 ↪  copie
    """
    M = [0 for _ in L]
    for k in range (len(L)):
        M[k-1] = L[k] # pour k=0 c'est le dernier élément
         ↪ M[-1]
    return M
def decalage_bisbis(L):
    """
    retourne la version décalée de L par concaténation
    """
    return L[1:len(L)] + [L[0]]
def matrice(a_1, a_2, a_3):
    """
    retourne la matrice A
    """
    A = []
    L = [a_1,a_2,a_3]
    for i in range(3):
        A.append(L[:])
        L = decalage(L)
    return A
```

3. La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée.
4. Calculons :

$$\mathrm{AU} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2 + a_3)\mathrm{U}.$$

$\boxed{\text{Le vecteur U est donc vecteur propre de A associé à la valeur propre } a_1 + a_2 + a_3.}$

5. **5.1)** On a

$$\mathrm{AX}_1 = \begin{pmatrix} a_1 + ja_2 + j^2 a_3 \\ a_2 + ja_3 + j^2 a_1 \\ a_3 + ja_1 + j^2 a_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{AX}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + j^2 a_2 + ja_3 \\ a_2 + j^2 a_3 + ja_1 \\ a_3 + j^2 a_1 + ja_2 \end{pmatrix}.$$

On note alors que $\mathrm{AX}_1 = (a_1 + ja_2 + j^2 a_3)\mathrm{X}_2$ et $\mathrm{AX}_2 = (a_1 + j^2 a_2 + ja_3)\mathrm{X}_1$. On peut donc prendre pour $\boxed{s \text{ une racine complexe de } \mathrm{X}^2 - (a_1 + ja_2 + j^2 a_3)}$ et pour $\boxed{r \text{ une racine complexe de } X^2-(a_1+j^2a_2+ja_3)}$, qui existent bien par le théorème de d'Alembert-Gauß.

5.2) On a donc $AX_1 = s^2X_2$ et $AX_2 = r^2X_1$. Toute la difficulté est alors de savoir faire un lien entre A et la matrice 2×2 étudiée précédemment. Notons φ l'endomorphisme canoniquement associé à A, notons $F = \text{Vect}(X_1, X_2)$. Alors F est un espace vectoriel de dimension deux, puisque (X_1, X_2) est libre (sous-famille libre d'une famille libre). Notons φ l'endomorphisme de $F \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \text{Vect}(X_1, X_2)$ défini par $\varphi(X_1) = s^2X_2$ et $\varphi(X_2) = r^2X_1$. Alors φ est bien défini car :

- (X_1, X_2) est une base de F, donc $\varphi(X)$ est défini pour tout $X \in F$,
- on a $\varphi(F) \subset F$ puisque $\varphi(X_1) \in F, \varphi(X_2) \in F$ et que F est un espace vectoriel.

De plus, la matrice de φ dans la base X_1, X_2 est donc M. On a alors, d'après les calculs de la question 2,

$$\varphi(rX_1 + sX_2) = rs(rX_1 + sX_2) \quad \text{et} \quad \varphi(-rX_1 + sX_2) = -rs(-rX_1 + sX_2).$$

Finalement, on conjecture que $rX_1 + sX_2$ et $-rX_1 + sX_2$ sont deux vecteurs propres de A, et c'est bien le cas :

$$A(rX_1+sX_2) = rs^2X_2+sr^2X_1 = rs(rX_1+sX_2) \text{ et } A(-rX_1+sX_2) = -rs^2X_2+sr^2X_1 = -rs(-rX_1+sX_2)$$

Plusieurs cas se présentent alors :

- si $(r,s) \neq (0,0)$, alors $\boxed{rX_1+sX_2 \text{ et } -rX_1+sX_2}$ sont on nuls, la famille (X_1, X_2) étant libre. On a alors $\boxed{\text{deux vecteurs propres de A associés au valeurs propres } rs \text{ et } -rs.}$
- si $(r,s) = (0,0)$, alors X_1 et X_2 sont vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

Finalement, avec la question 5, on obtient

$$\text{Spec}(A) = \{a_1+a_2+a_3, rs, -rs\}.$$

6. **6.1)** On a ici $a_1 = 1$, $a_2 = j$ et $a_3 = j^2$. Donc $s^2 = 1 + j^2 + j = 0$, et $r^2 = 1+1+1 = 3$, donc A n'a donc qu'une seule valeur propre (nulle). Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc $\boxed{\text{A n'est donc pas diagonalisable}}$.

6.2) On a ici $a_1 = j$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 0$. Donc $s^2 = j+j+0 = 2j$ et $r^2 = j + j^2 = -1$. On peut donc prendre $s = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $r = i$. On a alors

$$\text{Spec}(A) = \left\{1+j, \sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{3}}, -\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{3}}\right\}.$$

La matrice A a trois valeurs propres distinctes, et donc est diagonalisable.

Solution (exercice 2.2)

(Énoncé : 4)

1. **1.1)** La linéarité se vérifie très facilement : $\forall (P,Q) \in \mathbf{R}_n[X], \forall \lambda \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi(P+\lambda Q) &= (X-X^2)(P+\lambda Q)'' + (1-2X)(P+\lambda Q)' \\
&= (X-X^2)(P''+\lambda Q'') + (1-2X)(P'+\lambda Q') \\
&= (X-X^2)P'' + (1-2X)P' + \lambda\left((X-X^2)Q'' + (1-2X)Q'\right) \\
&= \phi(P) + \lambda\phi(Q).
\end{aligned}$$

L'application ϕ est donc effectivement une application linéaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, notons $k = \deg(P)$, alors :

$$\begin{aligned}
\deg\left[(X-X^2)P''\right] &= k \\
\deg\left[(1-2X)P'\right] &= k \\
\deg\left[(X-X^2)P'' + (1-2X)P'\right] &\leq k.
\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'affirmer : $\boxed{\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \phi(P) \in \mathbf{R}_n[X]}$ Et ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= 0 \\
\phi(X) &= 1-2X \\
\phi\left(X^k\right) &= k(k-1)\left[X^{k-1} - X^k\right] + kX^{k-1} - 2kX^k, \quad \forall k \geq 2, \\
&= k^2X^{k-1} - k(k+1)X^k.
\end{aligned}$$

La dernière expression est valable aussi pour $k = 0$ et $k = 1$ Nous en déduisons la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -6 & 9 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n(n+1) \end{pmatrix}}$$

1.2) Les valeurs propres de ϕ sont les valeurs propres de M. Or M est triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Nous avons donc $\boxed{\mathrm{Spec}(\phi) = \{-k(k+1),\ k \in [\![0\,,\,n]\!]\}}$ La stricte décroissance sur $\mathbf{N}$ de l'application $k \mapsto -k(k+1)$ nous permet alors de remarquer que M est une matrice carrée d'ordre $n+1$ admettant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc $\boxed{\phi \text{ est diagonalisable.}}$

On peut, de plus, remarquer que ses sous-espaces propres sont tous de dimension égale à 1.

1.3) On remarque que $\boxed{0 \in \mathrm{Spec}(\phi)}$ donc le noyau de ϕ n'est pas réduit à $\{0\}$: $\boxed{\phi \text{ n'est pas bijective}}$

2. 2.1) Comme le degré de T_p est égal à p, nous avons $\deg\left(L_p\right) = 2p - p$ $\boxed{\deg\left(L_p\right) = p}$ Concernant le coefficient dominant :

$$\begin{aligned} a_{p,p} &= \frac{(-1)^p}{p!} 2p \times (2p-1) \times \cdots \times (2p-p-1) \\ &= (-1)^p \frac{(2p)!}{p!p!} \end{aligned}$$

$\boxed{a_{p,p} = (-1)^p \binom{2p}{p}}$

2.2) L'utilisation du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} T_p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k X^{k+p} \\ L_p &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{p!} (k+p) \times (k+p-1) \times \cdots \times (k+p-p+1) X^k \\ a_{k,p} &= (-1)^k \binom{p}{k} \frac{(k+p)!}{p!k!} \\ &= (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k+p}{p} \\ &= \boxed{(-1)^k \binom{p}{k} \binom{k+p}{k}.} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait prouver.

2.3) Nous avons, pour $k \in [\![0\,,\,p-1]\!]$:

$$\begin{aligned} a_{k+1,p} &= (-1)^{k+1} \frac{p!}{(p-k-1)!(k+1)!} \frac{(p+k+1)!}{p!(k+1)!} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(p+k+1)(p-k)}{(k+1)^2} \frac{(p+k)!}{(p-k)!k!k!}. \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{a_{k+1,p} = -\frac{(p+k+1)(p-k)}{(k+1)^2} a_{k,p}}$ Nous avons de plus $\boxed{a_{0,p} = \binom{p}{0}\binom{p}{0} = 1}$

2.4)

```python
def calcul_a(p):
    L = [1]
    a = 1
    for k in range(p):
        a = -(p+k+1)*(p-k)*a/((k+1)*(k+1))
        L.append(a)
    return L
```

Pour $p \in \{0, 1, 2\}$:

```
>>> calcul_a(0)
[1]
>>> calcul_a(1)
[1, -2.0]
>>> calcul_a(2)
[1, -6.0, 6.0]
```

3. Il faut donc calculer :

$T_0 = 1$	$T_1 = X - X^2$	$T_2 = X^2 - 2X^3 + X^4$
$L_0 = 1$	$L_1 = 1 - 2X$	$L_2 = 1 - 6X + 6X^2$

Remarquer que si la fonction python précédente a été bien programmée, nous avons déjà l'expression de L_1, L_2 et L_3 !
On calcule ensuite facilement :

$$\phi(L_0) = 0, \quad \phi(L_1) = -2L_1, \quad \phi(L_2) = -6L_2,$$

ainsi L_1, L_2 et L_3 sont vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre (c'est évident, ils sont aussi de degrés deux à deux distincts). Cette famille libre est de cardinal trois, et comme $\dim \mathbf{R}_2[X] = 3$, nous avons bien une base de vecteurs propres de ϕ.

Solution (exercice 2.3)

(Énoncé : 5)

1. L'application Φ est clairement linéaire par définition de la loi d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}^{n+1}$: soient $P_1, P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}&\Phi(\lambda P + \mu Q)\\ &= ((\lambda P + \mu Q)(x_0), (\lambda P + \mu Q)(x_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(x_n))\\ &= \lambda(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) + \mu(Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n))\\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).\end{aligned}$$

Puisque $\dim \mathbf{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbf{R}^{n+1}$, il suffit d'établir par exemple que Φ est injective. Soit donc $P \in \operatorname{Ker}\Phi$. Alors P s'annule en $x_0, \dots, x_{n+1}$ donc en $n+1$ points distincts de $\mathbf{R}$, mais puisque $\deg P \leqslant n$, nécessairement $P = 0$[3]. Donc $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme.}}$

2. 2.1) On a $\Phi(X^k) = (x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k)$ pour tout entier $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, donc

$$M = \underset{\mathscr{B}^{\text{can}},\mathscr{B}^{\text{can}}}{\mathscr{M}\text{at}}(\Phi) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \dots & x_0^k & \dots & x_0^n \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & x_n^k & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \left(x_i^j\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}}.$$

C'est une matrice de Vandermonde.

2.2) La matrice M est canoniquement associée à un isomorphisme, elle est donc inversible (et la matrice inverse est $\underset{\mathscr{B}^{\text{can}},\mathscr{B}^{\text{can}}}{\mathscr{M}\text{at}}(\Phi^{-1})$).

3. 3.1) L_i est un produit de n polynômes de degré 1, donc $\boxed{L_i \in \mathbf{R}_n[X]}$.

3.2) Nous avons

$$L_i(x_j) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}.$$

Si $i \neq j$, alors dans le produit apparaît le facteur nul $x_j - x_j$ donc le produit total est nul.
Si $i = j$, alors on exclut le terme $k = j$ donc

$$L_i(x_j) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} 1 = 1.$$

Finalement $\boxed{L_i(x_j) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$ Donc $\Phi(L_j) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } j}, 0 \dots, 0)$. Autrement dit

$\boxed{(\Phi(L_0), \Phi(L_n)) \text{ est la base canonique de } \mathbf{R}^{n+1}.}$

3.3) D'après la question précédente, $(L_0, \dots, L_n)$ est l'image de la base canonique par Φ^{-1} qui est un isomorphisme. Ainsi $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

[3] Si on préfère établir la surjectivité — disons-le de suite moins évidente — alors on pourra montrer que si $(y_0, \dots, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, le polynôme $\sum_{i=0}^{n} y_i L_i$ est un antécédent de $(y_0, \dots, y_{n+1})$ où les L_i sont définis dans la suite.

3.4) Notons $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. Alors comme $\Phi(\mathrm{L}_i) = e_i$ pour tout i, il vient immédiatement :

$$\boxed{\underset{(\mathrm{L}_0,\dots,\mathrm{L}_n),(e_0,\dots,e_n)}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\Phi) = \mathrm{I}_n.}$$

3.5)
```
#X est une liste contenant les xi
def def L(i, M, x):
    """
    fonction qui renvoie Li(x)
    """
    n = len(M)
    P = 1
    for j in range(0, n+1):
        if j =! i:
            P = P*((x-M[j])/(X[i]-M[j]))
    return P
```

4. 4.1) On effectue le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\mathrm{X}=x_0) & \mathbf{P}(\mathrm{X}=x_1) & \dots & \mathbf{P}(\mathrm{X}=x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dots & x_0^k & \dots & x_0^n\\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\ 1 & \dots & x_n^k & \dots & x_n^n\end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}1 & \mathbf{E}(\mathrm{X}) & \mathbf{E}(\mathrm{X}^2) & \dots & \mathbf{E}(\mathrm{X}^n)\end{pmatrix}}$$

d'après le théorème de transfert, applicable puisque X est à support fini.

4.2) L'hypothèse revient à supposer que la matrice ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}\mathrm{M}$ est connue. Puisque M est inversible (déjà vu précédemment), nous obtenons :

$$\boxed{\mathrm{V} = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{E}(\mathrm{X}) & \mathbf{E}(\mathrm{X}^2) & \dots & \mathbf{E}(\mathrm{X}^n)\end{pmatrix}\mathrm{M}^{-1}}.$$

Cette égalité donne accès à la loi de X.

4.3)
```
#L est une liste contenant les moments
import numpy as np
def LoiX(L, M):
    """
    fonction qui renvoie la loi de X
    """
    return np.dot(L,np.inv(M))
```

La matrice M est ici mise en argument, mais on peut facilement la construire avec Python à partir de la donnée des x_i (*i.e.* la donnée du support de X).

```
import numpy as np
def ConstrM(X):
    M = np.zeros((len(X),len(X)))
    for i in range(len(X)):
        for j in range(len(X)):
            M[i,j] = X[i]**j
    return M
```

Solution (exercice 2.4)

(Énoncé : 5)

1.
```
import numpy.linalg as la
lignes = [[a,b,c] for a in [0, 1] for b in [0, 1] for c in [0,
↪  1]]
#tous les choix possibles de lignes contenant des zéros et des
1
#cardinal de cet ensemble = 2 puissance 9
m = 0 # 0 est la première valeur propre (première matrice nulle)
for li1 in lignes:
    for li2 in lignes:
```

```python
    for li3 in lignes:
        M = [li1,li2,li3]
        vap = la.eig(M)[0]# liste des valeurs propres de M
        if vap[0] < m:
            m = vap[0]
        if vap[1] < m:
            m = vap[1]
        if vap[2] < m:
            m = vap[2]
```

On trouve : -1.4142135623730951.

2. 2.1) E est l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$ admettant $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur propre.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$:

i) $E \subset \mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$.

ii) La matrice nulle 0_3 de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$ appartient à E car $0_3 U = 0.U$ donc U est vecteur propre de 0_3 associé à la valeur propre 0.

iii) Soient $(M,N) \in e^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$; comme U est vecteur propre de M et de N, il existe deux réels λ, μ tels que $MU = \lambda U$ et $NU = \mu U$. On a alors : $(\alpha M + \beta N)U = \alpha MU + \beta NU = \alpha\lambda U + \beta\mu U = (\alpha\lambda + \beta\mu)U$ donc U est vecteur propre de $\alpha M + \beta N$ ce qui signifie que $\alpha M + \beta N \in E$: E est stable par combinaisons linéaires.

On conclut que $\boxed{\text{E est bien un sous-espace vectoriel de } \mathfrak{M}_3(\mathbf{R})}$.

$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & a\end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \right\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$.

$$F = \left\{ a\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{A_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{A_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_4} + e\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{A_5}, (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \right\}$$

F est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$ donc

$\boxed{\text{F est un sous-espace vectoriel de } \mathfrak{M}_3(\mathbf{R})}$: $F = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

2.2) Soit $M \in F$; alors il existe $(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5$, $M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & a\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in E &\iff \exists\lambda \in \mathbf{R}, MU = \lambda U\\ &\iff \exists\lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} a+b+c=\lambda\\ b+d+e=\lambda\\ c+e+a=\lambda \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} a+b+c=b+d+e\\ a+b+c=c+e+a \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} a=-c+d+e\\ b=e \end{cases} \end{aligned}$$

$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} -c+d+e & e & c\\ e & d & e\\ c & e & -c+d+e \end{pmatrix}, (c,d,e) \in \mathbf{R}^3 \right\}$ $E \cap F = \left\{ d\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{I} + e\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}}_{A} + c\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}}_{B}, (c,d,e) \in \mathbf{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(I, A, B)$.

Il est clair que : $dI + eA + cB = 0_3 \iff d = e = c = 0$ donc (I, A, B) est une famille libre, c'est une base de $E \cap F$.

3. 3.1) $A \in E \cap F$ car on vient de voir que $E \cap F = \mathrm{Vect}(I, A, B)$.

3.2) A est une matrice symétrique réelle donc A est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui justifie l'existence d'une matrice P inversible et d'une matrice D diagonale vérifiant $A = P^T DP$. Afin de déterminer P et D, on détermine les valeurs propres et sous-espaces propres de A. *comme* $A \in E$, *on s'attend à trouver* U *comme vecteur propre!*

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

$$AX = \lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x + y &=& 0 \\ x - \lambda y + z &=& 0 \\ y + (1-\lambda)z &=& 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x - \lambda y + z &=& 0 \\ (1-\lambda)x + y &=& 0 \\ y + (1-\lambda)z &=& 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + (\lambda-1)L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x - \lambda y + z &=& 0 \\ (1+\lambda-\lambda^2)y + (\lambda-1)z &=& 0 \\ y + (1-\lambda)z &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{permutation } y \leftrightarrow z$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + z - \lambda y &=& 0 \\ (\lambda-1)z + (1+\lambda-\lambda^2)y &=& 0 \\ (1-\lambda)z + y &=& 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + \quad z - \quad \lambda y &=& 0 \\ \boxed{(\lambda-1)}\, z + (1+\lambda-\lambda^2)y &=& 0 \\ \boxed{(2+\lambda-\lambda^2)}\, y &=& 0 \end{array}\right.$$

$2+\lambda-\lambda^2 = 0 \iff \lambda = -1$ ou $\lambda = 2$. Le système admet d'autres solutions que $(0,0,0)$ si et seulement si $\lambda \in \{-1,1,2\}$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{-1,1,2\}}$.

$AX = 2X \iff \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}\right.$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}(U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$AX = -X \iff \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = -2z \end{array}\right.$ donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}(V)$ avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AX = X \iff \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array}\right.$ donc $E_1 = \mathrm{Vect}(W)$ avec $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On retrouve le fait que A est diagonalisable car elle est de taille trois et admet trois valeurs propres distinctes. En déterminant une base orthonormée de chaque sous-espace propre, on obtiendra par recollement une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ et par conséquent une matrice de passage P orthogonale (c'est-à-dire qui vérifie $P^{-1} = {}^{\mathbf{T}}P$). Notons alors $U' = \frac{1}{\sqrt{3}}U$, $V' = \frac{1}{\sqrt{6}}V$, $W' = \frac{1}{\sqrt{2}}W$; ces trois vecteurs sont des vecteurs propres de A associés respectivement à $2,-1$ et 1 et forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres.

Donc en posant $\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}}$ et $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ on a $A = P^{\mathbf{T}}DP$.

4. Soit $M \in E \cap F = \mathrm{Vect}(I,A,B)$; alors il existe trois réels α,β,γ tels que $M = \alpha I + \beta A + \gamma B$. Il s'agit de prouver que M est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres (U',V',W'). On a $A = P^{\mathbf{T}}DP$; de plus $I = P^{\mathbf{T}}\mathbb{I}P$. Par ailleurs, $BU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $BU = 0U$. Comme U' est colinéaire à U, on a aussi $BU' = 0U'$: U' est vecteur propre de B associé à 0. $BV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $BV = 0V$ et par conséquent $BV' = 0V'$ ce qui signifie que V' est vecteur propre de B associé à 0. $BW = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2W$ et par conséquent $BW' = -2W'$: W' est vecteur propre de B associé à -2. On en déduit que B se diagonalise sous la forme $B = P\Delta^{\mathbf{T}}P$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. De fait, $M = \alpha I + \beta A + \gamma B = \alpha P^{\mathbf{T}}\mathbb{I}P + \beta P^{\mathbf{T}}DP + \gamma P\Delta^{\mathbf{T}}P = P^{\mathbf{T}}(\alpha I + \beta D + \gamma\Delta)P$ avec ${}^{\mathbf{T}}P = P^{-1}$. D'où

$\boxed{{}^{\mathbf{T}}PMP = \alpha I + \beta D + \gamma\Delta = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta-2\gamma \end{pmatrix}}$: c'est une matrice diagonale.

5. Soit $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$. On remarque que M est combinaison linéaire de I, A et B puisqu'on peut écrire M sous la forme : $M = zI + yA + x(B+I) = (x+z)I + yA + xB$.

D'après l'étude précédente, on sait que pour $M = \alpha I + \beta A + \gamma B$, les valeurs propres de M sont $\alpha+2\beta, \alpha-\beta$ et $\alpha+\beta-2\gamma$ (termes situés sur la matrice diagonale semblable à M trouvée dans la question 4). On en déduit ici que les valeurs propres de M sont les réels $x+z+2y$, $x+z-y$ et $x+z+y-2x$ *i.e.*

$$\boxed{\mathrm{Spec}(M) = \{x+z+2y, x+z-y, z+y-x\}}.$$

Solution (exercice 2.5)

(Énoncé : 6)

1. 1.1) On obtient facilement $\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

1.2) La matrice A est symétrique à coefficients réels donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$ sur une base orthonormée de vecteurs propres d'après le théorème spectral.

2. (Diagonalisation de A)

2.1) On utilise la fonction `linalg.eig` pour conjecturer les valeurs propres.

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([[-1, 1, 0], [1, -2, 1], [0, 1, -1]])
>>> vap, vep = np.linalg.eig(A)
>>> vap
array([-3.00000000e+00, -1.00000000e+00,  1.64111068e-16])
>>> vep
array([[ 4.08248290e-01,  7.07106781e-01,  5.77350269e-01],
       [-8.16496581e-01, -4.24983316e-16,  5.77350269e-01],
       [ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,
  ↪  5.77350269e-01]])
```

On peut donc émettre la conjecture suivante :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{-3, -1, 0\}}.$$

La puissance -16 est évidemment à associer à la valeur propre zéro... ces puissances adhérentes viennent du fait que les valeurs obtenues sont produites par un algorithme. On obtient donc des valeurs approchées uniquement.

2.2) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + (\lambda+1)L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-(\lambda+1)(\lambda+2) & \lambda+1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda^2-3\lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix} & L_3 \rightarrow L_3 - (-\lambda^2-3\lambda-1)L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $P(\lambda) = \lambda+1+(-\lambda^2-3\lambda-1)(\lambda+1) =$. Donc $P(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2-3\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)$. On a donc établi la conjecture précédente :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{-3, -1, 0\}}.$$

Par ailleurs,

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases} \iff x = y = z,$$

donc $\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

- De-même, on trouve

$$\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}.$$

2.3) Posons donc $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-2 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$, de sorte que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Un calcul d'inverse donne

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}}.$$

3. 3.1) Cette relation provient du fait que la matrice P ne dépende pas de P. En étudiant le terme général du produit matriciel, on peut donc établir

$$\boxed{X'' = P \cdot Y''}.$$

3.2)

```python
def Y_vers_X(y_1, y_2, y_3):
    P = np.array([[1, -1, 1], [-2, 0, 1], [1, 1, 1]])
    Y = np.array([y_1, y_2, y_3])
    return P @ Y
```

Notez que même si Y est un vecteur ligne, numpy le transposera automatiquement pour pouvoir effectuer le produit matriciel.

3.3) On calcule.

$$\begin{aligned} Y'' &= P^{-1} \cdot X'' \\ &= P^{-1}PDP^{-1}X \\ &= \boxed{DY.} \end{aligned}$$

3.4) On constate que $Y'' = DY$ est équivalent à

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad y_1''(t) = -3y_1(t), \quad y_2''(t) = -y_2(t), \quad y_3''(t) = 0.$$

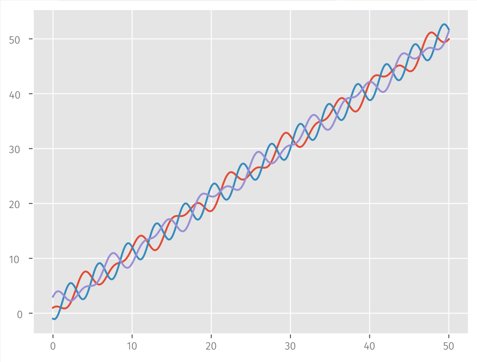
Donc, en résolvant séparément chaque équation différentielle,

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \boxed{y_3(0) + y_3'(0)\,t}, \\ y_2(t) &= \boxed{y_2(0)\cos t + y_2'(0)\sin(t)}, \\ y_1(t) &= \boxed{y_1(0)\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}y_1'(0)\sin\left(\sqrt{3}t\right).} \end{aligned}$$

3.5)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
def trace_sol(init, init_der):
    init_1, init_2, init_3 = init
    initd_1, initd_2, initd_3 = init_der
    T = np.linspace(0, 50, 10**3)
    Y_1 = [init_1*np.cos(np.sqrt(3)*t)+initd_1/np.sqrt(3
     ↪ )*np.sin(np.sqrt(3)*t) for t in
     ↪ T]
    Y_2 = [init_2*np.cos(t)+initd_2*np.sin(t) for t in T]
    Y_3 = [init_3+initd_3*t for t in T]
    # il faut ensuite construire les trois mêmes listes
     ↪ mais pour X
    X_1 = []
    X_2 = []
    X_3 = []
    for i in range(len(Y_1)):
```

```
        x_1, x_2, x_3 = Y_vers_X(Y_1[i], Y_2[i], Y_3[i])
        X_1.append(x_1)
        X_2.append(x_2)
        X_3.append(x_3)
    plt.plot(T, X_1)
    plt.plot(T, X_2)
    plt.plot(T, X_3)
trace_sol([1, 1, 1], [1, 1, 1])
```



On constate bien des petites oscillations pour les trois positions. Mais l'ensemble du système semble se déplacer vers les x croissants.

Solution (exercice 2.7)

(Énoncé : 7)

1. On va utiliser la forme canonique d'un polynôme afin de se débarrasser des carrés.

$$x^2+y^2-4mx-2my+10(m-1)=0 \iff (x-2m)^2+(y-m)^2-4m^2-m^2+10(m-1)=0.$$

Ainsi, après simplification, on obtient comme équation

$$(x-2m)^2+(y-m)^2=5m^2-10m+10.$$

Or $10^2-4.5.10<0$ donc l'expression $5m^2-10m+10$ est positive puisque $5>0$. Donc

$$\mathrm{C}_m : (x-2m)^2+(y-m)^2=\left(\sqrt{5m^2-10m+10}\right)^2.$$

On reconnaît alors $\boxed{\text{un cercle de centre } \Omega_m\,(2m,m), \text{ et } \mathrm{R}_m=\sqrt{5m^2-10m+10}.}$

2. ...

Solution (exercice 2.8)

(Énoncé : 7)

1. 1.1) Soient $(x,y)\in[a,b]^2$, f étant supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, elle est en particulier, continue sur $[x,y]$ (on peut supposer $x\leq y$, le raisonnement étant le même dans le cas contraire) et dérivable sur $]x,y[$. Le théorème des accroissements finis nous donne alors l'existence d'un réel $c_{x,y}\in]x,y[$, tel que

$$f(x)-f(y)=(x-y)f'(c_{x,y})$$

En passant aux valeurs absolues :

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|f'(c_{x,y})\right|\left|x-y\right|,$$

or, par hypothèse, $\left|f'(c_{x,y})\right|\leq k$. Donc comme $\left|x-y\right|\geq 0$ on en déduit effectivement

$$\boxed{|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|}.$$

1.2) Étudions donc la fonction $g : x\longmapsto f(x)-x$. Cette fonction est bien évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et nous avons

$$\forall x\in[a,b]\quad g'(x)=f'(x)-1.$$

Comme pour tout $x\in[a,b]$, $-1<-k\leq f'(x)\leq k<1$, on peut alors affirmer :

$$\forall x\in[a,b],\quad g'(x)<0.$$

D'où le tableau de variations :

x	a	c	b
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(a)$ $\searrow$	0	$\searrow$ $g(b)$

Par hypothèses, f est à valeurs dans $[a, b]$, nous avons donc $a \leq f(a) \leq b$ ce qui implique $f(a) - a \geq 0$ et par un raisonnement analogue, $f(b) - b \leq 0$. De plus, g est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, avec $g(a) = f(a) - a$ et $g(b) = f(b) - b$. Le théorème de la bijection nous permet alors d'affirmer que g réalise une bijection de $[a, b]$ vers $[f(b) - b, f(a) - a]$. Comme $0 \in [f(b) - b, f(a) - a]$, on en déduit qu'il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ et, par définition de g, il existe donc un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) - c = 0$ soit tel que $f(c) = c$. D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité du point fixe de } f}$.

i)

```python
def calc_liste_U(n, u_0, f):
    u = u_0
    for _ in range(1, n+1):
        u = f(u)
    return u
```

ii) Petit récurrence facile : u_0 est bien défini comme élément de $[a, b]$, si u_n existe et est élément de $[a, b]$, comme f est définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est donc bien défini et élément de $[a, b]$. Pour la deuxième partie de la question, nous allons encore raisonner par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, nous avons

$$\left|u_1 - u_0\right| = k^0 \left|u_1 - u_0\right|.$$

Par hypothèse de récurrence, supposons maintenant que pour un certain entier n, $\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq k^n \left|u_1 - u_0\right|$. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\left|u_{n+2} - u_{n+1}\right| &= \left|f(u_{n+1}) - f(u_n)\right| \\
&\leq k \left|u_{n+1} - u_n\right| & \textit{question précédente} \\
&\leq k \times k^n \left|u_1 - u_0\right| & \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&\leq k^{n+1} \left|u_1 - u_0\right|.
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par principe de récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.}$$

iii) Nous avons

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq \left|u_{n+1} - u_n\right| \leq k^n \left|u_1 - u_0\right|$$

Or la série de terme général $k^n \left|u_1 - u_0\right|$ est proportionnelle à une série géométrique de raison k, avec $|k| < 1$. Cette série géométrique est donc convergente. Le critère de comparaison des séries à termes positifs nous permet alors d'affirmer la convergence de la série de terme général $\left|u_{n+1} - u_n\right|$ et donc (par définition) l'absolue $\boxed{\text{convergence de la série de terme général } u_{n+1} - u_n}$.

iv) La convergence absolue entraîne la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$. Or, pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (u_{n+1} - u_n) = u_{\mathrm{N}+1} - u_0,$$

donc la suite $(u_{n+1})_n$ converge et donc (u_n) également. Notons ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Par continuité de la fonction f, nous avons :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Mais l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'unicité de la limite nous permettent aussi d'affirmer :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n)$$

Ainsi, nécessairement :

$$\ell = f(\ell)$$

et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge effectivement vers l'unique point fixe de } f \text{ sur } [a,b].}$

v) Là encore, un raisonnement par récurrence s'impose. Pour $n=0$, nous avons bien évidemment $|u_0 - c| = k^0 |u_0 - c|$.
Supposons, pour un certain entier naturel n, $|u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|$. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - c| &= |f(u_n) - f(c)| \\ &\leq k |u_n - c| \\ &\leq k \times k^n |u_0 - c| \\ &\leq k^{n+1} |u_0 - c|. \end{aligned}$$

La propriété est récurrente et vérifiée pour $n=0$ donc vraie pour tout entier naturel n.

2. 2.1) On considère donc $h : x \longmapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Nous avons

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad h'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Le discriminant de ce trinôme est égal à -1. Ce trinôme est donc de signe constant (strictement positif). La fonction h est donc continue et strictement croissante sur $[-2,0]$, elle réalise donc une bijection de $[-2,0]$ vers $[f(-2), f(0)]$. Or $f(-2) = -\dfrac{1}{3}$ et $f(0) = 1$. Ainsi $0 \in [f(-2), f(0)]$ et, la bijectivité de f nous donne l'existence et l'unicité de $\alpha \in [-2,0]$ tel que $h(\alpha) = 0$.

2.2) Nous avons clairement $g(c) = c \iff h(c) = 0$ (h étant la fonction de la question précédente), c est point fixe de g si et seulement si c annule h. La question précédente nous donne donc l'existence et l'unicité du point fixe de g, à savoir le réel α.

2.3) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) = -x - \frac{x^2}{2}.$$

Les variations de g' sont faciles à étudier (trinôme dont on a les racines : 0 et -2)

x	-2		-1		0
$g'(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Nous voyons donc que pour tout $x \in [-2,0]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ (et même $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$). Donc par une question précédente, g est $\frac{1}{2}$-contractante.

2.4) Nous savons que $|u_0 - \alpha| \leq 2$ et donc d'après une question précédente :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, dès que $\dfrac{1}{2^{n-1}} < \epsilon \iff n - 1 > -\dfrac{\ln \epsilon}{\ln 2}$ nous aurons la précision voulue.

```python
import math as ma
def g(x):
    return -1-(x*x)/2-(x*x*x)/6

epsilon = 10**(-3)
n = ma.floor(1-ma.log(epsilon)/ma.log(2))+1

>>> calc_liste_U(n, -1, g)
-1.5960672466296146
```

Solution (exercice 2.9)

(Énoncé : 8)

1. Pour n fixé f_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ (c'est un polynôme) et $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$ pour tout x, donc $\boxed{f_n \text{ strictement croissante sur } \mathbf{R}}$. La limite de f_n en $-\infty$ est $-\infty$, et en

$+\infty$ c'est $+\infty$. De plus f_n est continue sur $\mathbf{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, f_n s'annule une unique fois : $\boxed{\text{Il existe un unique réel } a_n \text{ tel que } f_n(a_n) = 0}$ De plus $f_n(0) = -2 < 0 \Rightarrow \boxed{0 < a_n}$ car f_n strictement croissante et $f_n(a_n) = 0$.

1.1) Pour démarrer le principe de dichotomie, on a besoin aussi d'un majorant de a_n, or $f_n(1) = n + n^2 - 2 \geqslant 1 + 1 - 2 = 0$ car $n \geqslant 1$, donc $\boxed{1 \geqslant a_n}$.

```python
def f(n, x):
    return n*x**3 + n*n*x - 2

def dicho(n):
    a = 0
    b = 1
    while b - a > 10**(-3):
        c = (a+b)/2
        if f(n, a)*f(n, c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

Par exemple :

```python
>>> dicho(10)
0.02001953125
```

1.2) Pour n fixé, $f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = \underbrace{n a_n^3 + n^2 a_n - 2}_{=f_n(a_n)=0} + \underbrace{a_n^3 + (2n+1)a_n}_{>0 \text{ car } a_n>0} > 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$.

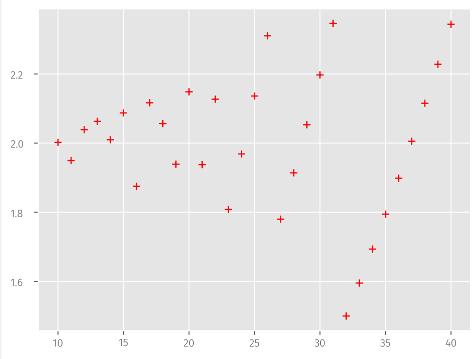
Donc $a_n > a_{n+1}$ puisque la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, et ceci pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante, et minorée par 0, donc convergente.}}$

De plus $f_n(a_n) = 0 \iff n a_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0 \iff a_n = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{a_n^2+n}\right)$.

Or quand $n \to +\infty$, $a_n \to \ell \in \mathbf{R}$ donc $a_n^2 + n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n^2+n} \to 0$ et $\boxed{a_n \to 0 \text{ donc } \ell = 0}$.

2. 2.1) Si l'on garde la précision de 10^{-3} utilisé au départ dans le programme de dichotomie, on obtient une représentation graphique incohérente des u_n, on va donc demander une précision eps supérieure.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

X = range(10, 41)
Y = [n*n*dicho(n) for n in X]
plt.plot(X, Y, '+r')
```



Les valeurs de la suite sont proches de deux, mais certes très anarchiques. La méthode de dichotomie fonctionne donc assez mal sur cet exemple.

On « conjecture » que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 2.

2.2) $\forall n \geqslant 1 \quad u_n = n^2 a_n$ donc $f_n(a_n) = 0 \iff \frac{u_n}{n} a_n^2 + u_n - 2 = 0 \iff u_n\left(1 + \frac{a_n^2}{n}\right) = 2$. Comme $\frac{a_n^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, nous obtenons : $\boxed{u_n \xrightarrow{n\to\infty} 2.}$ Ainsi, nous obtenons l'équivalent : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}.}$

3. 3.1) Soit $g(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2+2}$. On peut remarquer qu'elle est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$g'(x) = \frac{6x^2(3x^2+2) - 6x(2x^3+1)}{(3x^2+2)^2} = \frac{6x}{(3x^2+2)^2}\underbrace{(x^3+2x-1)}_{h(x)}.$$

La fonction h est donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc sur $[0,1]$. Or $a_2 \in [0,1]$ et $h(a_2) = a_2^3 + 2a_2 - 1 = \frac{1}{2}\underbrace{(2a_2^3 + 4a_2 - 2)}_{=0 \text{ par definition de } a_2}$, donc g' du signe de h sur $[0,1]$ et est donc négative avant a_2 et $\boxed{g' \text{ est positive sur } [a_2, 1]}$, donc $\boxed{g \text{ est croissante sur } [a_2, 1]}$.

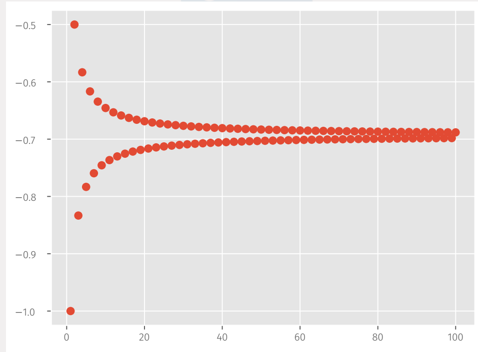
3.2) On remarque de plus que $g(1) = \frac{3}{5} < 1$, $g(a_2) - a_2 = \frac{2a_2^3+1}{3a_2^2+2} - a_2 = \frac{-a_2^3 - 2a_2 + 1}{3a_2^2+2} = 0$ donc $g(a_2) = a_2$. Donc $g([a_2, 1]) \subset [a_2, 1]$ et g est croissante et continue sur cet intervalle. Nous obtenons successivement :
— $x_n \in [a_2, 1]$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par stabilité de $[a_2, 1]$ par g, — $x_1 = g(x_0) = \frac{3}{5} < x_0$, donc par récurrence (en utilisant la croissance de g), on peut montrer que :
$\boxed{\forall n,\ x_{n+1} < x_n, \text{ c'est-à-dire que } (x_n) \text{ est décroissante.}}$ De plus cette suite est bornée, donc elle converge, vers x_ℓ vérifiant $g(x_\ell) = x_\ell$ par continuité de g. Or l'unique solution dans $[0,1]$ de cette équation est a_2. En conclusion :
$\boxed{(x_n) \text{ converge vers } a_2}$

Solution (exercice 2.10)

(Énoncé : 8)

1. 1.1) Testons par exemple avec la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^\star}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def liste(n):
    """
    retourne une liste contenant tous les termes S_1, ...,
↪   S_n
    """
    S = [-1]
    for k in range(2, n+1):
        S.append(S[-1]+((-1)**k)*(1/k))
    return S
n = 100
S = liste(n)
plt.plot(range(1, n+1), S, "o")
```



1.2) Soit $n \in \mathbf{N}$.

- $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$,
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} - u_{2n+2} \geqslant 0$ puisque (u_n) est une suite décroissante.
- $\left|S_{2n+1} - S_{2n}\right| = \left|(-1)^{2n+1} u_{2n+1}\right| \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$.

Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, par conséquent $\boxed{\text{elles convergent vers une même limite } \ell.}$

1.3) D'après le cours, si les suites extraites paires et impaires convergent vers une même limite, alors c'est le cas de la suite globale. Donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } \ell.}$

1.4) Ce résultat est compris dans le théorème de convergence des suites adjacentes.

2. 2.1) Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons $\frac{x^n}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1}$. Donc $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} x \leqslant \int_0^1 x^n x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$.
Par théorème de majoration, puisque la quantité étudiée est positive, nous obtenons : $\boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} x = 0}$.

2.2) Remarquons que :

$$\int_0^1 x^{b+k} x = \frac{1}{k+b+1}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+b+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^{b+k} x = \int_0^1 x^b \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k x = \int_0^1 x^b \frac{1-(-x)^n}{1+x} x$$

d'après la linéarité de l'intégrale et la formule de somme de termes d'une suite géométrique. Ainsi, nous déduisons :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+b+1} = \int_0^1 \frac{x^b}{1+x} x - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+b}}{1+x} x.$$

Le second terme converge vers zéro d'après la question précédente, et car

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+b}}{1+x} x \right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+b}}{1+x} x \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0.$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+b+1} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 \frac{x^b}{1+x} x}.$$

2.3) Faire simplement $b=1$ dans ce qui précède, et calculer l'intégrale.

2.4) On construit les suites des termes pairs et impairs, tant que la différence est supérieure à la précision. Pour cela, rappelons la relation de récurrence suivante

$$S_{2n+2} = S_{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2},$$
$$S_{2n+3} = S_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3}.$$

```python
import numpy as np

def approxln(prec):
    n = 3
    S = -1
    S_bis = S + 1/2
    while abs(S - S_bis) > prec:
        S, S_bis = S_bis, S_bis + (-1)**n/n
        n += 1
    return (S + S_bis)/2

>>> approxln(10**(-3))
-0.6931469310593228
>>> import math as ma
>>> -ma.log(2)
-0.6931471805599453
```

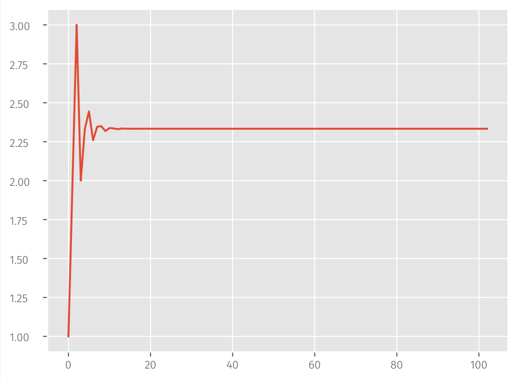
Solution (exercice 2.11)

(Énoncé : 9)

1.
```python
def u(a, b, c):
    """
    prend en argument les trois premiers termes a,b,c de la
    ↪ suite et retourne une liste comptenant tous les termes
    ↪ jusqu'au n-eme
    """
    L = [a, b, c]
    for k in range(100):
        d = (a+b+c)/3
        a = b
```

```python
        b = c
        c = d
        L.append(d)
    return L

plt.plot(u(1, 2, 3))
```

On peut ensuite tracer la suite



La suite semble bien converger, nous allons le montrer dans la suite.

2. 0 Spec A si et seulement si Ker A ≠ {0}. Une simple résolution de système linéaire donne Ker A $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{0 \notin \mathrm{Spec}\,A.}$

3. Méthode du pivot de Gauß. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_3 + \lambda L_1,\ L_2 \leftarrow \tfrac{1}{\lambda}L_2 \ \mathit{car}\ \lambda \neq 0 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \\ 0 & -1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{1+\lambda}{3} & \lambda\left(\frac{1}{3}-\lambda\right) \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{1+\lambda}{3}L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \\ 0 & -1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec $f(\lambda) = \lambda\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) + \frac{1+\lambda}{3}\frac{1}{\lambda}$. Et comme 0 n'est pas valeur propre, on a que

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \iff \lambda f(\lambda) = 0 \iff -Q(\lambda) = 0,$$

où $Q = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$ est le polynôme de l'énoncé. Donc

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \iff \lambda \text{ est racine de } Q.}$$

4. Notons $Q = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$. On a $Q(1) = 0$, donc 1 est racine évidente, on en déduit après calculs :

$$Q = (X-1)(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}).$$

Notant $z = \frac{-2+3i\sqrt{-\Delta}}{6}$ avec $\Delta = -\frac{8}{9}$, nous obtenons les racines de Q : $1, z\overline{z}$. Comme $|z|^2 = \frac{1}{3}$, $|z| < 1$.
Au final, nous avons trois valeurs propres réelles distinctes, donc A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, de valeurs propres $1, z, \overline{z}$. Donc il existe P inversible telle que

$$\boxed{A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix}}.$$

5. Un simple calcul montre que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n \quad X_n = A^n \times X_0$.

- **Initialisation.** Claire pour $n = 0$, puisque $A^0X_0 = I_3X_0$.
- **Hérédité.** Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, pour un certain entier n. Alors montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. En effet, $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$. D'où le résultat par principe de récurrence.

6. Nous avons

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z}^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Notant $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, nous obtenons en notant aussi t, u, v les coefficients de la première colonne de P^{-1} :

$$u_n = \alpha_1 t + \beta_1 u z^n + \gamma_1 v \overline{z}^n.$$

7. Puisque $|z| < 1$, nous avons $\lim_{n\to\infty} |bz^n| = 0$. Mais aussi $\lim_{n\to\infty} |c\overline{z}^n| = 0$ puisque $|\overline{z}| < 1$. Donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$\lim_{n\to\infty} \left|bz^n + c\overline{z}^n\right| = 0.$$

8. À la question précédente, nous avons donc établi la convergence des suites réelles ci-dessous :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(u_n - a) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(u_n - a) = 0.$$

Or, comme (u_n) est une suite réelle, nous avons : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \operatorname{Im}(u_n) = 0$ donc la seconde condition fournit $\operatorname{Im}(a) = 0$.
Ainsi $a \in \mathbf{R}$, et la première condition donne

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(u_n) = u_n = a.$$

D'où : $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = a}$.

Solution (exercice 2.12)

(Énoncé : 9)

1. Nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(x^2+1) - x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2},$$

donc une primitive est donnée par

$$\boxed{x \longmapsto \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $f_\lambda : x \in \mathbf{R}^\star \longmapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$. Alors

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \xrightarrow[]{x\to 0} 1,$$

donc f_λ admet une limite finie en zéro si et seulement si $\lambda = 0$. Donc f_λ est prolongeable par continuité en zéro si et seulement si $\lambda = 0$ et

$$\boxed{f_0 : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}}$$

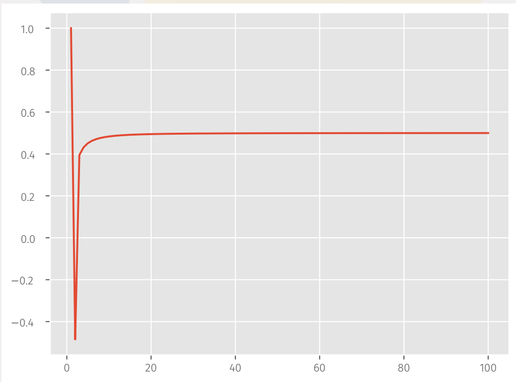
est le prolongement de f_0 en 0. Pour savoir s'il est dérivable, on peut effectuer un développement limité.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\left(x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} f(0) + 0 \cdot x + o(x). \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f_0 \text{ ainsi prolongée est dérivable et } f'(0) = 0.}$

3. Il s'agit simplement de coder ici une suite récurrente.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def soleuler(x_0):
    h = (100-x_0)/100
    X = [x_0 + (100-x_0)*i/100 for i in range(0, 101)]
    Y = [x_0]
    y = x_0
    for i in range(1, 101):
        y = y - 2*h/X[i-1]*y + h*X[i-1]/(1+X[i-1]**2)
        Y.append(y)
    return X, Y

X, Y = soleuler(1)
plt.plot(X, Y)
```



4. 4.1) Sur $\mathbf{R}^{+\star}$, l'équation différentielle est équivalente à

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{x}{1+x^2}.$$

La fonction $a : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est continue, une primitive est donnée par $A : x \longmapsto 2\ln|x|$. Le cours nous dit alors que la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$\forall x, \quad y_0(x) = \lambda e^{-2\ln|x|} = \frac{\lambda}{x^2}$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$. On cherche ensuite une solution particulière par variation de la constante. On pose donc $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2}$ avec λ une fonction dérivable à déterminer, $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, nous avons ensuite

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-2}{x^3}\lambda(x) + \frac{\lambda'(x)}{x^2} \\ y'(x) + \frac{2}{x}y(x) &= \frac{-2}{x^3}\lambda(x) + \frac{\lambda'(x)}{x^2} + \frac{2}{x^3}\lambda(x) \\ &= \frac{\lambda'(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Nous avons donc la relation

$$\frac{\lambda'(x)}{x^2} = \frac{x}{1+x^2} \iff \lambda'(x) = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Donc $\lambda : x \in \mathbf{R}^{+\star} \longmapsto \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ convient, d'après la première question. La solution générale est enfin somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière obtenue :

$$\boxed{\exists \lambda, \ \forall x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad y(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}.$$

Il nous faut déterminer la constante λ pour que $y(1) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln 2}{1} &= \frac{1}{2} \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

4.2) Sur $\mathbf{R}^{-\star}$, on change simplement la recherche des solutions de l'homogène :

$$\forall x, \quad y_0(x) = \mu e^{-2\ln|x|} = \mu e^{-2\ln(-x)} = \frac{\mu}{(-x)^2} = \frac{\mu}{x^2}.$$

La méthode de variation de la constante est alors identique, et on obtient les solutions sur $\mathbf{R}^{-\star}$:

$$\boxed{\exists\mu,\ \forall x\in\mathbf{R}^{-\star},\quad y(x)=\frac{\mu}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}}.$$

4.3) **i)** Soit y une solution, alors il existe λ,μ deux réels tels que

$$y(x)=\begin{cases} f_\lambda(x) & \text{si } x>0,\\ f_\mu(x) & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Alors y est prolongeable en zéro si et seulement si f_λ, f_μ le sont, donc si et seulement si $\lambda=\mu=0$ d'après la question 2 et cette question nous apprend aussi que

$$y(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} & \text{si } x\neq 0,\\ f_\mu(x) & \text{si } x=0,\end{cases}$$

est dérivable en zéro avec $y'(0)=0$.

ii) Il reste à vérifier que le prolongement de y en zéro réalisé précédemment est bien solution. En effet, en faisant $x=0$ dans (E), on a bien :

$$0\cdot y'(0)+2y(0)=0.$$

Donc il existe une unique solution sur $\mathbf{R}$ à (E), il s'agit de

$$\boxed{y(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} & \text{si } x\neq 0,\\ f_\mu(x) & \text{si } x=0,\end{cases}}$$

iii) Pour positionner la courbe par rapport à sa tangente, on peut réaliser un développement limité de y en 0.

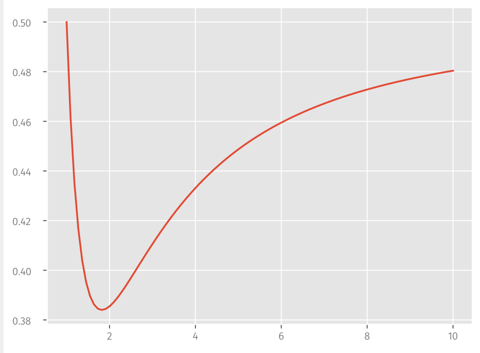
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+x^4\mathrm{o}(x)}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\mathrm{o}(x)\right)\\ &= \frac{x^2}{4}+\mathrm{o}(x^2).\end{aligned}$$

troncation

Enfin comme $\frac{x^2}{4}>0$ pour tout x, $\boxed{\text{la courbe de } y \text{ est située localement au-dessus de sa tangente.}}$

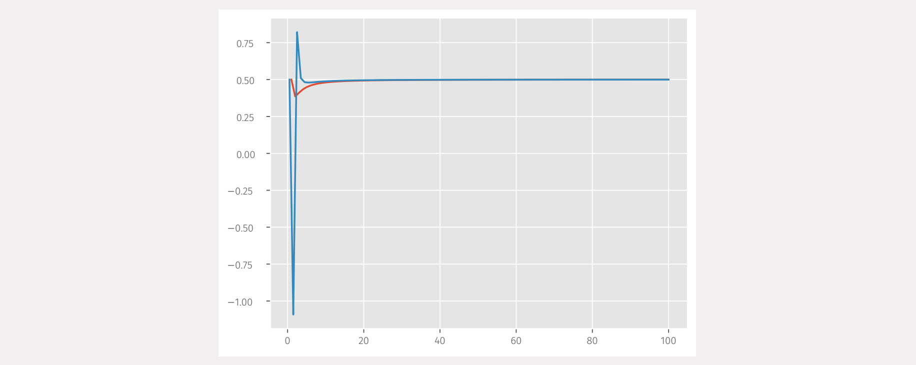
5. **5.1)**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def solexacte(b):
    N = 100
    X = np.linspace(1, b, N)
    Y = [np.log(2)/(2*x*x)+(1/2)*(1-np.log(1+x*x)/(x*x))
      for x in X]
    plt.plot(X, Y)

solexacte(10)
```



5.2) On constate bien des graphes similaires sauf pour des temps proches de 1.

```python
X, Y = soleuler(1/2)
solexacte(100)
plt.plot(X, Y)
```



Solution (exercice 2.13)

(Énoncé : 10)

1. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, on note : $f(x) = P(x)e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1.1) C'est un calcul direct.

$$\begin{aligned} &f''(x) - 3f'(x) + 3f(x) \\ &= \left(P''(x) + 4P'(x) + 4P(x)\right)e^{2x} - 3\left(P'(x) + 2P(x)\right)e^{2x} + 3P(x)e^{2x} \\ &= e^{2x}\left(P''(x) + P'(x) + P(x)\right). \end{aligned}$$

On a donc $f''(x) - 3f'(x) + 3f(x) = \varphi(P)(x)e^{2x}$ où $\boxed{\varphi(P)(x) = P''(x) + P'(x) + P(x).}$

1.2) Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)'' + (\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q) && \text{\textit{linéarité de la dérivation}} \\ &= \lambda P'' + \lambda P' + \lambda P + \mu Q'' + \mu Q' + \mu Q \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire.}}$

1.3) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, supposons que $\deg P \geqslant 1$. Alors $\deg P' < \deg P$, $\deg P'' < \deg P$ donc $\deg(P'' + P' + P) = \deg P$. Si $\deg P = 0$, alors P', P'' sont nuls donc on a encore $\deg\varphi(P) = \deg P$. Donc si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors

$$\deg\varphi(P) = \deg P \leqslant n,$$

donc $\boxed{\varphi(P) \in \mathbf{R}_n[X].}$

1.4) Montrer que :

$$\begin{aligned} &f \text{ est solution de (E)} \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R},\ (f'' - 3f' + 3f) = Q(x)e^{2x} && \text{\textit{calculs de la première question}} \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(P)(x)e^{2x} = Q(x)e^{2x} && \text{\textit{exponentielle non nulle}} \\ \iff\ & \forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(P)(x) = Q(x) \\ \iff\ & \varphi(P) = Q && \varphi \text{ \textit{bijectif provisoirement admis}} \\ \iff\ & \boxed{P = \varphi^{-1}(Q).} \end{aligned}$$

Ainsi, la connaissance de φ^{-1} va nous permettre de construire des solutions de particulières de la forme « polynômes – exponentielle ».

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note alors φ_n l'endomorphisme

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X], \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P + P' + P''. \end{array} \right.$$

2.1) Déterminons la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. On note $\mathscr{B}^{\mathbf{can}} = (1, X, \dots, X^n)$. Alors

$$\begin{aligned} &\varphi_n(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + kX^{k-1} + X^k, \quad (k \geqslant 2), \\ &\varphi_n(X) = X + 1, \\ &\varphi_n(1) = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.}$$

2.2) Les deux premières colonnes sont un peu singulières, mais dans les autres nous devons modifier trois coefficients.

```
import numpy as np
def A(n):
    A = np.zeros((n+1, n+1))
    A[0, 0] = 1
    A[0, 1] = 1
    A[1, 1] = 1
    for i in range(3, n+1):
        A[i, i] = 1
        A[i-1, i] = i
        A[i-2, i] = i*(i-1)
    return A

>>> A(4)
array([[ 1.,  1.,  0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  1.,  0.,  6.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  3., 12.],
       [ 0.,  0.,  0.,  1.,  4.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  1.]])
```

2.3) Pour tout n, la matrice A_n est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres se lisent sur la diagonale, et donc $\boxed{\operatorname{Spec}\varphi_n = \{1\}}$. Si A_n était diagonalisable, elle serait donc égale à PI_nP^{-1} avec P inversible, donc on aurait $A_n = I_n$ — contradiction. Donc $\boxed{\varphi_n \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2.4) Puisque $0 \notin \operatorname{Spec}\varphi_n$, l'endomorphisme φ_n est injectif. De plus, φ_n est un endomorphisme en dimension finie, donc c'est un $\boxed{\text{automorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

2.5) On vérifie la définition d'injectif et surjectif.
L'application φ est injective : en effet, si $\varphi(P) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[X]$, alors il existe $n = \deg P$ entier ou $-\infty$ tel que $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a alors $\varphi_n(P) = 0$. Mais comme φ_n est injective, cela donne $P = 0$. Donc φ est injective.
L'application φ est surjective : en effet, si $Q \in \mathbf{R}[X]$, alors il existe $n = \deg Q$ entier ou $-\infty$ tel que $Q \in \mathbf{R}_n[X]$, or $\varphi_n : \mathbf{R}_n[X] \longrightarrow \mathbf{R}_n[X]$ est surjective, donc il existe $P \in \mathbf{R}_n[X] \subset \mathbf{R}[X]$ tel que $\varphi_n(P) = \varphi(P) = Q$.

En conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbf{R}[X].}$

3. (Application)

3.1) D'après la question précédente,

$$\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathscr{M}\text{at}}(\varphi_3) = \boxed{A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Après méthode du pivot ou résolution d'un système linéaire, on trouve

$$\boxed{\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathscr{M}\text{at}}(\varphi_3^{-1}) = A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3.2) L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 3 = 0$. Le discriminant vaut $9 - 12 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$, donc les racines sont

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Donc les solutions de l'homogène sont de la forme

$$x \longmapsto e^{\frac{3x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + B\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right).$$

À l'aide de l'exercice, on peut trouver une solution particulière de la forme polynôme-exponentielle car ici $Q = X^3 - 3X^2 + 2X - 2$. Une solution particulière est $x \longmapsto \varphi^{-1}(Q)(x)e^{2x}$, et

$$\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathscr{M}\text{at}}(\varphi^{-1}(Q)) = A_3^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

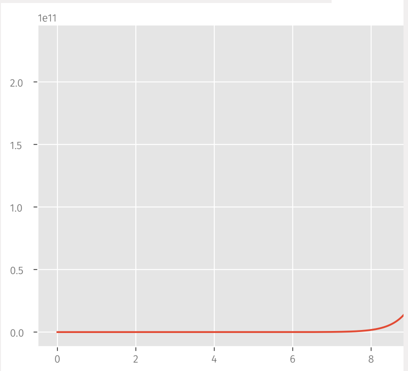
Donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \longmapsto e^{\frac{3x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + B\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) + \left(2 + 8x - 6x^2 + x^3\right)e^{2x}}.$$

3.3) On pourrait calculer l'inverse de A_3 en utilisant la fonction `np.linalg.inv` mais je vais utiliser la forme calculée précédemment.

```
import numpy as np

A_inv = np.array([[1, -1, 0, 6], [0, 1, -2, 0], [0, 0, 1,
 ↪ -3], [0, 0, 0, 1]])
def poly_part(Q, x):
    P = A_inv @ Q # la matrice du poly intervenant dans la
     ↪ solution particulière
    val = 0
    for i in range(len(Q)):
        val += P[i]*x**i
    return val*np.exp(2*x)

import matplotlib.pyplot as plt
Q = np.array([-2, 2, -3, 1])
X = np.linspace(0, 10, 10**3)
Y = [poly_part(Q, x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
```

Cela donne le graphe suivant.



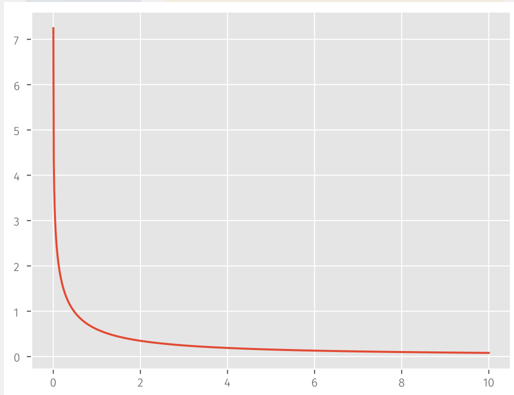
4. Il suffirait de calculer la matrice A_n, puis son inverse au moyen du module `numpy`. On remplacerait `A_inv` dans la fonction précédente par l'inverse trouvé.

Solution (exercice 2.14)

(Énoncé : 10)

1. On utilise par exemple la méthode des rectangles à gauche.

```
def f(x):
    """
    retourne une valeur approchée de f(x)
    """
    n = 10**3
    S = 0
    h = 1/n
    for i in range(n):
        S += ma.cos(h*i)/(h*i+x)
    return S*h
T = np.linspace(0.001, 10, 10**3)
Y = [f(x) for x in T]
plt.plot(T, Y)
```



On conjecture donc que la fonction tend vers $+\infty$ en zéro, et vers 0 en $+\infty$.

2. **2.1)** Soit x et x' deux réels strictement positifs tels que $x < x'$. On a :

$$f(x) - f(x') = \int_0^1 \cos(t)\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x'+t}\right) \mathrm{d}t.$$

Or $\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x'+t} > 0$ et cos est positif sur $[0,1]$ donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante.}}$

2.2) La fonction f est décroissante et minorée (fonction positive) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle $\boxed{\text{admet une limite en } +\infty.}$

3. Dans cette question on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_*^+$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

3.1) On reprend l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left|\int_0^1 \cos(t)\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\cos(t)\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right)\right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right| \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_0+t} \leq \frac{1}{x_0}$$

donc

$$\left|\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right| = \frac{|x_0 - x|}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{2|x-x_0|}{x_0^2}.$$

En intégrant, on déduit :

$$\boxed{|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x-x_0|}{x_0^2}}.$$

3.2) On en déduit par encadrement que $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$, donc que f est continue en x_0. Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}^{+\star}}$.

4. On a :

$$\forall x \in \mathbf{R}_*^+, \quad \forall t \in [0,1], \quad \frac{\cos(t)}{x+1} \leq \frac{\cos(t)}{t+x} \leq \frac{\cos(t)}{x}$$

donc en intégrant on obtient l'encadrement demandé avec $\boxed{\mathrm{A} = \int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t}$, qui est une constante strictement positive car cos est strictement positif sur $[0,1]$. On peut calculer A et tracer les graphes de $\frac{\mathrm{A}}{x+1}$ et $\frac{\mathrm{A}}{x}$ sur le dessin de celui de f pour vérifier graphiquement notre inégalité. De plus $\frac{\mathrm{A}}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{A}}{x}$ donc en divisant l'encadrement

$$\frac{\mathrm{A}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{A}}{x}$$

par $\frac{\mathrm{A}}{x}$ puis en faisant $x \to \infty$, on déduit que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{A}}{x}}.$$

5. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.

5.1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}_*^+$ par

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t} \mathrm{d}t.$$

En utilisant l'inégalité donnée on trouve que $|g(x)| \leq \int_0^1 \frac{t}{2} \mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$ donc $\boxed{g \text{ est bornée.}}$

5.2) On remarque par linéarité de l'intégrale que pour tout $x > 0$,

$$g(x) = f(x) - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \iff f(x) = g(x) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Or,

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

donc puisque g est bornée,

$$\frac{f(x)}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \frac{g(x)}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} + 1 \xrightarrow[]{x\to 0^+} 1,$$

d'où :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{-\ln(x)}.$$

Solution (exercice 2.15)

(Énoncé : 11)

1. 1.1) On propose le code

```
import random as rd

def simul_PF():
    if rd.random() < 0.5:
        return "P"
    else:
        return "F"

def simul_X():
    L = [simul_PF() for _ in range(3)] # les trois premiers
    while [L[-1], L[-2], L[-3]] != ["P", "P", "F"]:
        L.append(simul_PF())
    return L

>>> simul_X()
['F', 'F', 'F', 'F', 'P', 'F', 'F', 'P', 'F', 'F', 'P',
 ↪  'F', 'F', 'F', 'F', 'F', 'F', 'F', 'P', 'P']
>>> simul_X()
['F', 'P', 'F', 'P', 'F', 'P', 'F', 'P', 'F', 'P', 'F',
 ↪  'F', 'F', 'P', 'F', 'P', 'P']
```

Vous pourriez aussi adopter une convention en associant les deux faces de la pièce aux entiers 0 et 1.

1.2) Le nombre de lancers nécessaires est simplement la longueur de la liste de simulations précédente.

```
def estim_esp():
    M = 0
    for _ in range(10**3):
        L = simul_X()
        M += len(L)
    return M/10**3

>>> estim_esp()
7.918
>>> estim_esp()
7.948
>>> estim_esp()
7.923
```

On conjecture donc que X admet une espérance, et qu'en plus elle est proche de 8.

2. 2.1) Soit $n \geqslant 3$. Les lancers étant indépendants, on a donc $\boxed{\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{8}}$. On a ensuite

$$\begin{aligned}
B_n \cap B_{n+1} &= P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cap P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} = \emptyset \\
B_n \cap B_{n+2} &= P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cap P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} = \emptyset \\
B_{n+1} \cap B_{n+1} &= P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} \cap P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{B_n, B_{n+1} \text{ et } B_{n+2} \text{ sont deux à deux incompatibles}}$.

2.2) On a alors par incompatibilité :

$$u_3 = \mathbf{P}(B_3) = \frac{1}{8}$$
$$u_4 = \mathbf{P}(B_3 \cup B_4) = \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) = \frac{1}{4}$$
$$u_5 = \mathbf{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = \frac{3}{8}$$

Donc :

$$\boxed{u_3 = \frac{1}{8}, \quad u_4 = \frac{1}{4}, \quad u_5 = \frac{3}{8}.}$$

Soit alors $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$. On a alors

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n+3} B_k\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k \cup B_{n+3}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right) + \mathbf{P}(B_{n+3}) - \mathbf{P}\left(B_{n+3} \cap \bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right) \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k \cap B_{n+3}\right) \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n} B_k \cap B_{n+3}\right) \quad \textit{par incompatibilité de } B_{n+1}, B_{n+2} \textit{ avec } B_{n+3} \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \mathbf{P}\left(B_{n+3} \cap \bigcup_{k=3}^{n} B_k\right) \quad \textit{indépendance} \\
&= \boxed{u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n.}
\end{aligned}$$

2.3) Attention, à cause du facteur constant, ce n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a donc pour tout n :

$$u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{8}(1 - u_n) \geqslant 0,$$

et donc la suite (u_n) est croissante, au moins à partir du rang 3. Comme elle est majorée par 1, elle $\boxed{\text{converge vers un réel } \ell.}$

On a alors en passant à la limite $\ell = \ell + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\ell$, et donc $\boxed{\ell = 1.}$

Finalement, la suite «Pile, Pile, Face» arrive presque sûrement, et donc $\boxed{\mathbf{P}(X = -1) = 0}$. En effet,

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=3}^{\infty} {}^{c}B_k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{\infty} B_k\right).$$

Or, pour tout $n \geqslant 3$:

$$0 \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{\infty} B_k\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{n} B_k\right) = u_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0.$$

Donc $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{\infty} B_k\right) = 0$ par théorème d'encadrement, et c'est terminé.

3. **3.1)** On a nécessairement $X \geqslant 3$, et donc $\boxed{v_0 = v_1 = v_2 = 1}$. De plus, on a $X > 3$ si et seulement si les trois premiers lancers ne donnent pas «Pile, Pile, Face», et donc $\boxed{v_3 = \frac{7}{8}}$.

3.2) On a pour tout n

$$\begin{aligned}
v_{n+2} - v_{n+3} &= \mathbf{P}(X > n+2) - \mathbf{P}(X > n+3) \\
&= \mathbf{P}(X = n+3) = \mathbf{P}(X = n+3 | X > n)\,\mathbf{P}(X > n) \\
&= \mathbf{P}(B_{n+3})\,\boxed{\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{8}v_n.}
\end{aligned}$$

3.3) On a donc, pour un $N \in \mathbf{N}$, en sommant les relations de la question précédente

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = 8\sum_{n=0}^{N}(v_{n+2} - v_{n+3}) = 8(v_2 - v_{n+3}).$$

Or la suite (v_n) est décroissante et minorée, et donc converge vers un $\ell \in \mathbf{R}$. En passant à la limite dans la relation de 3b, on obtient $\ell = 0$. Ainsi, la série $\left(\sum v_n\right)$ converge, vers 8, et donc $\boxed{\text{X admet une espérance qui vaut 8.}}$

Solution (exercice 2.16)

(Énoncé : 12)

1. On propose le code ci-après.

```python
import numpy as np

def simulG(a):
    """
    retourne le gain d'Anna
    """
    p = np.random.poisson(a)
    if p == 0:
        return 0
    elif p%2==0:
        # p est pair
        return p
    else:
        return -p
```

2. 2.1) On a $r = \mathbf{P}(X=0) = \boxed{e^{-a}}$. De plus, par incompatibilité des $X = 2k$, $k \in \mathbf{N}^\star$ et des $X = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}^\star$, on a

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X=2k) = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-a}\frac{a^{2k}}{(2k)!}},$$

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X=2k-1) = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-a}\frac{a^{2k-1}}{(2k-1)!}}.$$

2.2) On a $p+q+r=1$, et donc $p+q = 1-r = \boxed{1-e^{-a}}$. Pour la différence, on calcule donc la somme des termes pairs puis on enlève les impairs. Donc les pairs auront un signe plus, les termes impairs un signe moins. De fait, on obtient :

$$\begin{aligned} p-q &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!} e^{-a} \\ &= \boxed{e^{-a}\left(e^{-a}-1\right)}. \end{aligned}$$

2.3) On trouve alors p, q en résolvant le système

$$\begin{cases} p+q &= 1-e^{-a} \\ p-q &= e^{-a}\left(e^{-a}-1\right) \end{cases} \iff \boxed{p = \left(1-e^{-a}\right)^2,\ q = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2a}\right).}$$

3. 3.1) Nous allons faire un grand nombre de simulations (plus précisément N fois) de l'expérience, et on calcule la proportion de fois qu'Anna a gagné, et la moyenne des gains.

```python
def approxG(a):
    somme_gains = 0
    nb_gagne = 0
    N = 10**3
    for _ in range(N):
        p = simulG(a)
        if p > 0:
            # Anna a gagné
            nb_gagne += 1
        somme_gains += p
    return somme_gains/N, nb_gagne/N
```

Par exemple.

```python
>>> approxG(1)
(-0.18, 0.187)
>>> approxG(2)
(-0.208, 0.338)
>>> approxG(4)
(0.067, 0.478)
```

3.2) Il semble sur les simulations que le gain moyen d'Anna est négatif, et qu'elle a une probabilité plus faible de gagner que Benoit.

4. 4.1) On a

$$G = \begin{cases} X & \text{si } X \in \{2k,\ k \in \mathbf{N}^\star\}, \\ -X & \text{si } X \in \{2k+1,\ k \in \mathbf{N}\}, \\ 0 & \text{si} X = 0. \end{cases}$$

Soit $k \in \mathbf{N}$, alors si k est pair $(-1)^k k = k$, si k est impair, $(-1)^k k = -k$, et si $k = 0$, $(-1)^k k = 0$ donc

$$\boxed{\mathrm{G} = (-1)^{\mathrm{X}} \cdot \mathrm{X}}.$$

4.2) Nous avons

$$\forall k \geqslant 0, \quad \left|(-1)^k k\mathbf{P}(\mathrm{X} = k)\right| \leqslant k\mathbf{P}\left(\mathrm{X} = k\right),$$

or les lois de Poisson admettant une espérance, donc $\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}\left(\mathrm{X} = k\right)$ converge, et vers a, donc d'après le théorème de comparaison, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k\mathbf{P}(\mathrm{X} = k)$ est absolument convergente. On peut donc appliquer le théorème de transfert, qui livre alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{G}) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\mathbf{P}(\mathrm{X} = k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(-a)^k}{k!}e^{-a}\\ &= -ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-a)^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \boxed{-ae^{-2a}}.\end{aligned}$$

5. 5.1) De la même façon qu'en question 2, on obtient

$$r = \mathbf{P}(\mathrm{X} = 0) = \boxed{0}$$

$$p = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(\mathrm{X} = 2k) = \boxed{\frac{\alpha(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)^2}}$$

$$q = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(\mathrm{X} = 2k+1) = \boxed{\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^2}}$$

Les sommes sont cette fois-ci plus simples à calculer que pour la série exponentielle.

5.2) De même, les lois géométriques admettant une espérance, la série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\mathbf{P}(\mathrm{X} = k)$ est encore absolument convergente, et donc G admet bien une espérance. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{G}) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\alpha(1-\alpha)^{k-1}\\ &= -\alpha\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1}\\ &= \boxed{\frac{-\alpha}{(2-\alpha)^2}}.\end{aligned}$$

en utilisant une série géométrique dérivée.

5.3) Anna n'a donc décidément pas de chance : elle est, là encore, perdante.

Solution (exercice 2.17)

(Énoncé : 12)

1. $\boxed{\mathrm{X}_1(\Omega) = \{0, 2\}}$ car la bactérie présente au départ peut se diviser en deux bactéries ou mourir. $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 0) = 1/3}$ et $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 2) = 2/3}$. D'où $\mathbf{E}(\mathrm{X}_1) = 0\mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 0) + 2\mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 2)$ soit $\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}_1) = 4/3}$.

2. 2.1) Soit $n \geq 1$; si, parmi les X_{n-1} bactéries présentes après la $(n-1)$-ième étapes, on dénombre k bactéries qui se divisent et $\mathrm{X}_{n-1} - k$ qui meurent, alors X_n prend la valeur $2k$: X_n ne prend donc que des valeurs paires. Par récurrence, on vérifie que $\boxed{\mathrm{X}_n(\Omega) = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2^n\} = \{2i, i \in [\![0\,,\,2^{n-1}]\!]\}}$.

2.2) On renvoie un résultat sous forme de liste.

```python
import random as rd
def simu(n):
    """
    retourne sous forme de liste le nombre de cellules en
    ↪ chaque temps
    """
    L = [1]
    for k in range(n):
```

```python
        X_ancien = L[-1] # le nombre de cellules à la
        ↪ précédente étape
        for ind_cell in range(X_ancien):
            if rd.random() < 1/3:
                X_ancien -= 1 #mort
            else:
                X_ancien += 1 #duplication
        L.append(X_ancien)
    return L
```

Testons par exemple 3 simulations d'une trajectoire jusqu'au temps 10.

2.3) Loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\{X_n = 2i\}$:

- 1er cas : $i = 0$ il est clair que $X_n = 0$ implique $X_{n+1} = 0$ *i.e.* $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1$,
- 2ème cas : $1 \leq i \leq 2^{n-1}$. Notons Y_n qui se divisent entre l'étape n et l'étape $n+1$; alors $X_{n+1} = 2Y_{n+1}$ par définition. On suppose ici que $X_n = 2i$; chacune des $2i$ bactéries présentes après la n-ième étape a une probabilité $p = 2/3$ de se diviser en deux, et ce indépendamment des autres bactéries présentes. Donc Y_{n+1} sachant $\{X_n = 2i\}$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(2i, p)$. D'où :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 2j|X_n = 2i) = \mathbf{P}(Y_{n+1} = j) = \binom{2i}{j} p^j (1-p)^{2i-j}, \quad \forall j \in [\![0, 2i]\!].$$

On peut remarquer que cette dernière formule est encore vraie pour $i = 0$ donc on conclut que pour tout $i \in X_n(\Omega)$: $\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1} = 2j|X_n = 2i) = \binom{2i}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{2i-j}, \quad \forall j \in [\![0, 2i]\!]}$.

3. 3.1) Nous avons, puisque les ensemble $\{X_n = k\}$ pour $k \in X_n(\Omega)$ forment un système complet d'évènements, $\boxed{G_{X_n}(1) = 1.}$ En dérivant la somme finie G_n, et en faisant $x = 1$, on trouve :

$$G_n'(1) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} k\mathbf{P}(X_n = k) = \boxed{\mathbf{E}(X_n)}.$$

3.2) Par dérivation d'une fonction composée on a d'une part $G_{n+1}' = G_n' \circ G_1 G_1'$, puis en faisant $x = 1$: $G_{n+1}'(1) = G_n'(1)G_1'(1)$ qui fournit la relation de récurrence suivante : $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_1) \boxed{= \frac{4}{3}\mathbf{E}(X_n)}$.

3.3) La suite $(\mathbf{E}(X_n))$ est une suite géométrique de raison $4/3$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $\mathbf{E}(X_n) = (4/3)^n \times \mathbf{E}(X_0)$.

4. (Étude de la probabilité d'extinction) On note $u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$.

4.1) D'après l'énoncé, pour tout réel x on a : $G_{n+1}(x) = (G_1 \circ G_n)(x) = G_1(G_n(x))$. Or : $\forall t \in \mathbf{R}$, $G_1(t) = \sum_{k \in X_1(\Omega)} t^k \mathbf{P}(X_1 = k) = t^0\mathbf{P}(X_1 = 0) + t^2\mathbf{P}(X_1 = 2) = 1/3 + 2/3t^2$. D'où on tire $G_1(G_n(x)) = 1/3 + 2/3(G_n(x))^2$. Ainsi, on a démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(x))^2}.$$

En particulier pour $x = 0$, on a donc $G_{n+1}(0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(0))^2$. Or $G_n(0) = \mathbf{P}\{X_n = 0\} = u_n$ car $0^0 = 1$ et $0^k = 0$ si $k \neq 0$. Ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2}.$$

4.2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2$. La fonction f est croissante sur $[0,1]$ et $f([0,1/2]) = [f(0), f(1/2)] = [1/3, 1/2]$. Comme $u_0 = \mathbf{P}(X_0 = 0) = 0 \in [0,1/2]$ et $f([0,1/2]) \subset [0,1/2]$, il est facile de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \in [0,1/2]$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}}.$$

Pour établir la convergence de la suite (u_n), on se propose d'étudier sa monotonie autrement dit le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Pour tout réel x, $f(x) - x = \frac{1}{3}(2x^2 - 3x + 1) = \frac{1}{3}(x-1)(2x-1)$. Sur l'intervalle $[0,1/2]$, $f(x) - x \geq 0$. Comme $u_n \in [0,1/2]$, on conclut que $u_{n+1} - u_n \geq 0$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$ (ce qui est logique car $X_n = 0$ implique $X_{n+1} = 0$ donc $\mathbf{P}\{X_n = 0\} \leq \mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$). La suite (u_n) étant croissante et majorée par $1/2$, elle converge et sa limite ℓ appartient à $[0,1/2]$. Pour tout n de $\mathbf{N}$, on a :

$u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, ainsi en passant à la limite on en déduit que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Une résolution simple d'équation montre que $\ell \in ensemble 1, 1/2$. Mais puisque $\ell \in [0, 1/2]$, on a forcément

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}.$$

5. On note $\forall n \in \mathbf{N}$, D_n l'événement «la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n».

5.1) D_n signifie qu'il y a encore au moins une bactérie à l'issue de l'étape $n-1$ et qu'il n'y en a plus à l'issue de l'étape n. Donc $D_n = \{X_n = 0\} \cap \{X_{n-1} \neq 0\} = \{X_n = 0\} \cap {}^{C}\{X_{n-1} = 0\} = \{X_n = 0\} \setminus \{X_{n-1} = 0\}$. Mais comme $\{X_{n-1} = 0\} \subset X_n = 0$, il vient en passant aux probabilités :

$$\mathbf{P}(D_n) = \mathbf{P}(X_n = 0) - \mathbf{P}(X_{n-1} = 0).$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star, \mathbf{P}(D_n) = u_n - u_{n-1}}.$$

5.2) Soit R l'événement «la population de bactéries finit par s'éteindre» : $R = \cup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Comme les événements D_n sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbf{P}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(D_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n-1}).$$

Il s'agit de la somme d'une série télescopique. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, notons S_n la somme partielle de rang n : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$. Et $u_0 = \mathbf{P}(X_0 = 0) = 0$ donc $S_n = u_n$. Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 1/2$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} S_n = 1/2$. Ainsi

$$\boxed{\mathbf{P}(R) = 1/2}.$$

La probabilité que la population de bactéries s'éteigne vaut $1/2$.

Solution (exercice 2.19)

(Énoncé : 14)

1. La fonction f est positive, continue sauf peut-être en 1. De plus, son intégrale entre $-\infty$ et 1 converge et vaut 0. Étudions alors $\int_1^\infty \frac{2}{x^3}\,dx$. Soit $A > 1$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{2}{x^3}\,dx &= \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A \\ &= 1 - \frac{1}{A^2} \\ &\xrightarrow[A\to\infty]{} 1.\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale converge et vaut 1. Finalement, l'intégrale de f sur $\mathbf{R}$ converge et vaut 1, et $\boxed{f \text{ est bien une fonction de densité}}$.

2. D'après le calcul fait précédemment, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$, en notant F la fonction de répartition de X :

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3. Soit alors $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(V \leqslant t) &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{t^2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - \frac{1}{t^2} \notin]0,1[, \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= F(t).\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $\boxed{\text{V et X ont même fonction de répartition, donc même loi}}$.

4. On propose le code :

```python
import random as rd
import math as ma

def X():
```

```
    U = rd.random() #Simulation de U
    return 1/ma.sqrt(1-U)
```

5. L'intégrale $\int_1^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, car l'intégrale de Riemann $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge après simple calcul d'intégrale partielle. Donc X admet une espérance, et

$$\mathbf{E}(X) = \int_1^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{2}.$$

En revanche, l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (calculer là encore l'intégrale partielle pour le voir), et donc X n'admet ni moment d'ordre 2, ni variance.

```
def EX(N):
    e = 0
    v = 0
    for _ in range(N):
        e += X()
        v += X()**2
    return e/N, v/N

>>> EX(100)
(1.8793050464918704, 5.939662059336897)
>>> EX(100)
(1.879156101880445, 6.109644679140565)
>>> EX(100)
(1.804875819100449, 29.614956466081804)
```

On constate que la variance ne semble pas exister, alors que l'espérance vaut bien 2.

6. **6.1)** On a pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_n \leqslant t) &= \mathbf{P}(\max(X_1,\dots,X_n) \leqslant t\sqrt{n})\\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant t\sqrt{n}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} F(t\sqrt{n}) \qquad \textit{indépendance}\\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \left(1-\frac{1}{nt^2}\right)^n & \text{sinon.}\end{cases}}\end{aligned}$$

6.2) Si $t \leqslant 0$, il est clair que $G(x) = 0$. Si $t > 0$, alors à partir d'un certain rang, on a $t > \frac{1}{\sqrt{n}}$, et donc pour n assez grand,

$$\mathbf{P}(T_n \leqslant t) = \left(1-\frac{1}{t^2 n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{t^2 n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Finalement, on a pour tout x :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{sinon.}\end{cases}}$$

6.3) Il suffit de dériver la fonction G pour trouver le résultat.

6.4) Le changement de variable proposé est bien de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissant sur $\mathbf{R}_+^*$, et les intégrales

$$\int_0^{\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\infty} 2e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

sont donc de même nature, et égales en cas de convergence. Comme celle de droite converge vers $\sqrt{\pi}$, T admet bien une espérance, qui vaut $\sqrt{\pi}$.

Solution (exercice 2.21)

(Énoncé : 15)

1. On propose le code

```
import random as rd

def caisse():
    X = rd.random() # temps client A à la caisse
    Y = rd.random()    # temps client B à la caisse
    T = min(X, Y) + rd.random() # temps où C est resté en magasin (attente + caisse)
    return T > X and T > Y

def estim(N):
    """
    estime la proba cherchée selon le principe Monte-Carlo sur N simu
    """
    nb_succes = 0
    for _ in range(N):
        if caisse():
            nb_succes += 1
    return nb_succes/N

>>> estim(10**3)
0.671
```

On constate que la probabilité semble être d'environ $\frac{2}{3}$.

2. On a donc $U = \min(X, Y)$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U \leqslant x) &= 1 - \mathbf{P}(U > x) \\
&= 1 - \mathbf{P}(X > x, Y > x) \qquad \textit{indépendance} \\
&= 1 - \mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(Y > x) \\
&= 1 - (1-x)^2.
\end{aligned}$$

De plus, si $x < 0$, on a $\mathbf{P}(U \leqslant x) = 0$ et si $x > 1$, $\mathbf{P}(U \leqslant x) = 1$. La fonction de répartition de U est donc continue, et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 et 1. La variable aléatoire U est donc une variable à densité, de densité

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \boxed{f_U(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3. La variable U étant non nulle uniquement sur un segment, son espérance et sa variance existent bien. On a alors

$$\mathbf{E}(U) = \int_0^1 2x(1-x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}},$$

et

$$\mathbf{V}(U) = \int_0^1 2x^2(1-x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}.$$

4. **4.1)** On a donc $\boxed{T = U + C.}$

4.2) U et C sont des variables aléatoires à densité et indépendantes (car X, Y, Z le sont), donc T aussi, et une densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_C(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

$f_U(t) \neq 0, f_C(x-t) \neq 0$ si et seulement si : $t \in [0,1] \cap [x-1, x]$, et donc $f_C(x)$ est nul si $x \notin [0,2]$. De plus, si $x \in [0,1]$, on a

$$f_C(x) = \int_0^x 2(1-t)\,\mathrm{d}t = x(2-x),$$

et si $x \in [1,2]$, alors

$$f_C(x) = \int_x^1 2(1-t)\,\mathrm{d}t = (x-2)^2.$$

En résumé,

$$\boxed{f_C : x \longmapsto \begin{cases} x(2-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ (x-2)^2 & \text{si } x \in [1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

4.3) Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(U) + \mathbf{E}(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

5. On veut calculer

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T > \max(X,Y)) &= \mathbf{P}(C + \min(X,Y) > \max(X,Y))\\ &= \mathbf{P}(C > \max(X,Y) - \min(X,Y))\\ &= \mathbf{P}(C > |X-Y|)\\ &= \mathbf{P}(C - U > 0)\end{aligned}$$

puisque $|X-Y|$ et U ont la même loi. On montre ensuite, en calculant sa fonction de répartition, que la variable $-U$ est une variable à densité, de densité

$$f_{-U} : t \longmapsto f_U(-t) = \begin{cases} 2(1+t) & \text{si } t \in [-1,0],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par produit de convolution, la variable $C-U$ admet une densité donnée par,

$$f_{C-U} = f_C \star f_{-U} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_{-U}(t) f_C(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour que la fonction intégrée soit non nulle, il faut alors que $t \in [-1,0] \cap [x-1,x]$, et donc la densité de $C-U$ est nulle pour $x \notin [-1,1]$. Ensuite, si $x \in [-1,0]$, on a :

$$f_{C-U}(x) = \int_{-1}^{x} 2(1+t)\,\mathrm{d}t = (x+1)^2,$$

et si $x \in [0,1]$, on a

$$f_{C-U}(x) = \int_{x-1}^{0} 2(1+t)\,\mathrm{d}t = 1 - x^2.$$

Ainsi, la probabilité que $C-U>0$ est donc

$$\mathbf{P}(C-U>0) = \int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Le client C est donc le dernier à quitter les caisses avec une probabilité de $\boxed{\frac{2}{3}}$.

Solution (exercice 2.22)

(Énoncé : 15)

1. La fonction f est positive puisque l'exponentielle l'est, et que a est également positif. De plus, elle est continue sur $\mathbf{R}$ puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Et enfin, soit $A > 0$, calculons

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{x}{a}\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) &= \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\right]_0^A\\ &= 1 - \exp\left(-\frac{A^2}{2a}\right)\\ &\xrightarrow[]{A\to\infty} 1.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilités.}}$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0,\\ \displaystyle\int_0^A \frac{t}{a}\exp\left(-\frac{t^2}{2a}\right)\mathrm{d}t & \text{si } x > 0,\end{cases}\\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0,\\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x > 0.\end{cases}}\end{aligned}$$

3. On considère la variable aléatoire Y donnée par :

$$Y = \frac{X^2}{2a}.$$

3.1) Calculons sa fonction de répartition, soit $y \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \leqslant y) &= \mathbf{P}\left(\frac{X^2}{2a} \leqslant y\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0, \\ \mathbf{P}\left(-\sqrt{2ay} \leqslant X \leqslant \sqrt{2ay}\right) & \text{si } y > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0, \\ \mathbf{P}\left(X \leqslant \sqrt{2ay}\right) = F_X\left(\sqrt{2ay}\right) & \text{si } y > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0, \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, donc : $\boxed{\text{Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$

3.2) On pose $U = 1 - e^{-Y}$ de sorte que $Y = -\ln(1-U)$. Soit $x \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U \leqslant x) &= \mathbf{P}\left(1 - e^{-Y} \leqslant x\right) \\
&= \mathbf{P}\left(1 - x \leqslant e^{-Y}\right) \\
&= \begin{cases} \mathbf{P}(-\ln(1-x) \geqslant Y) & \text{si } x \in [0,1[, \\ \mathbf{P}(\Omega) = 1 & \text{si } x \in \geqslant 1, \\ \mathbf{P}(\emptyset) = 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - \left(1 - e^{\ln(1-x)}\right) & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x \in \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x \in \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

ln est croissante et une exponentielle est toujours positive

Donc : $\boxed{\text{U suit la loi uniforme sur }]0,1[.}$

3.3)
```python
import math as ma
import random as rd
def Y():
    return - ma.log(1-rd.random())
def X(a):
    return ma.sqrt(2*a*Y())
```

4. 4.1) D'après le cours : $\forall t \in \mathbf{R}$, $\boxed{g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}}$.

4.2) La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left| x \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \right| dx \quad \text{converge.}$$

Soit donc $A > 0$, puisque les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^A x \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx \\
&= + \int_0^A \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx - \left[x \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\right]_0^A \\
&\xrightarrow{A \to \infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx - 0.
\end{aligned}$$

IPP

L'intégrale $\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx$ est bien convergente, puisque d'une part *via* un argument de parité, nous avons

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx.$$

Et d'autre part le cours sur la loi normale (ou la question précédente) donne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx = 1.$$

Donc X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi a} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi a}{2}}}$.

4.3) On sait que $\mathbf{E}(Y) = 1$ car Y suit une loi exponentielle de paramètre 1. Donc par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left(\frac{X^2}{2a}\right) = 1 \iff \boxed{\mathbf{E}(X^2) = 2a.}$$

4.4) Il reste utiliser la formule de König-Huygens :

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 2a - \frac{\pi a}{2} = \boxed{\frac{(4-\pi)a}{2}}.$$

5. On considère désormais que le paramètre $a \in]0;1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :

$$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

5.1) Par linéarité de l'espérance, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_n) &= \mathbf{E}\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k^2)\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(2a) = a.\end{aligned}$$

les X_k ont toutes la même loi

Donc : $\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$

5.2) On sait que Y admet une variance, var Y suit une loi exponentielle de paramètre 1. Donc par propriété de la variance, on déduit :

$$\mathbf{Var}(Y) = 1 = \mathbf{Var}\left(\frac{X^2}{2a}\right) \iff \boxed{\mathbf{Var}(X^2) = (2a)^2 = 4a^2.}$$

5.3) Les variables aléatoires $X_1^2, \ldots, X_n^2$ sont indépendantes car les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ le sont. Donc

$$\mathbf{Var}(S_n) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Var}(X_k^2) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}(4a^2) = \frac{a^2}{n} \leqslant \boxed{\frac{1}{n}}.$$

Puisque S_n admet une variance, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\left|S_n - \mathbf{E}(S_n)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{Var}(S_n) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}\\ &1 - \mathbf{P}\left(\left|S_n - \mathbf{E}(S_n)\right| < \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}\\ &\mathbf{P}\left(\left|S_n - a\right| < \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(a \in]S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon[\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

passage au complémentaire

Donc on choisit $\varepsilon = \frac{1}{10}$, puis on résout

$$1 - \frac{100}{n} \geqslant 0.95 \iff 0.05 \geqslant \frac{100}{n} \iff \boxed{n \geqslant 2000}.$$

Solution (exercice 2.23)

(Énoncé : 16) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1. 1.1) On rappelle que deux vecteur u et v sont colinéaires si et seulement si $\mathrm{Rg}(u, v) < 2$.

```python
def colineaires(u, v):
    a = np.array([u, v])
    return np.linalg.matrix_rank(a) < 2 #retourne un
    ↪ booléen
```

Nous pouvons alors tester si $[1,1], [2,2]$ sont colinéaires : True.

1.2) Le vecteur u est vecteur propre de A si et seulement si u est non nul et Au est colinéaire à u. Il suffit alors de tester la condition $u \neq 0$ et la colinéarité entre le produit Au et u :

```python
def vecteurs_propres(u):
    return u != [0,0,0] and colineaires(np.dot(A,u), u)
```

2. 2.1) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $AX = -X \iff (A+I)X = 0 \iff \begin{cases} 4x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ -3x &= 0 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} x &= 0 \\ z &= -y \end{cases}$ Le système admet d'autres solutions que $(0,0,0)$ donc -1 est valeur propre de A et

$$\boxed{E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}.$$

$$AX = X \iff \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ -3x-2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+2x+z &= 0 \\ 3x+2z &= 0 \\ -3x-2z &= 0 \end{cases} \iff$$

$\begin{cases} y &= -1/2x \\ z &= -3/2x \end{cases}$ De même, on en déduit que 1 est valeur propre de A et

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}.$$

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-2y+z &= 0 \\ -3x-3z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+x+z &= 0 \\ 3x+3z &= 0 \\ -3x-3z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 0 \\ z &= -x \end{cases}$$

Ainsi 2 est bien valeur propre de A et

$$\boxed{E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Comme A ne peut avoir plus de trois valeurs propres, on en déduit que $\boxed{\text{Spec}(A) = \{-1, 1, 2\}}$.

2.2) A est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres distinctes donc $\boxed{\text{A est diagonalisable}}$.

3. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note : $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^\star = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

3.1) X_k suit la loi de Bernoulli $\mathbf{B}(p)$ donc $\mathbf{E}(X_k) = p$ et $\mathbf{Var}(X_k) = p(1-p)$ pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$. On en déduit, par linéarité de l'espérance que $\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p = p$. De plus, comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a :
$\mathbf{Var}(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{Var}(X_k) = \frac{p(1-p)}{n}$ et par conséquent $\sigma_{M_n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Ainsi $M_n^\star = \frac{M_n - \mathbf{E}(M_n)}{\sigma(M_n)}$: $M_n^\star$ correspond à la variable centrée réduite associée à M_n. Comme les les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, on peut appliquer le théorème central limite : on en déduit que $\boxed{M_n^\star \text{ suit approximativement la loi normale } \mathcal{N}(0,1)}$. Ainsi, pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, $\mathbf{P}([-\alpha < M_n^\star < \alpha]) \approx \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Sachant qu'on a $\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$ et $P(-\alpha \le X \le \alpha) = P(-\alpha < X < \alpha)$ pour toute variable X à densité, on peut aussi écrire que

$$\boxed{\mathbf{P}([-\alpha \le M_n^\star \le \alpha]) \approx 2\Phi(\alpha) - 1}.$$

3.2)

$$\mathbf{P}\left(p \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathbf{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \le M_n - p \le \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \mathbf{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \le M_n^\star \le \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

Comme $\sqrt{p(1-p)} \le \sqrt{1/4} = 1/2$ alors $-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \le -2$ et $2 \le \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$.[4] Donc : $\mathbf{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \le M_n^\star \le \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \ge P(-2 \le M_n^\star \le 2)$. Or $\mathbf{P}(-2 \le M_n^\star \le 2) =$

[4] On « remontre » ici, dans ce cas particulier, que l'on peut épaissir tout intervalle de confiance de seuil $1-\alpha$, la version épaissie reste un intervalle de confiance de seuil $1-\alpha$.

$2\Phi(2)-1 \geq 2\Phi(1,96)-1 = 0,95$ car la fonction Φ est croissante sur $\mathbf{R}$. Dès lors, on en déduit que $\mathbf{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leq M_n^\star \leq \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0,95$. $\mathbf{P}\left(p \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 95\%$ ce qui signifie que

$\boxed{\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } p \text{ au seuil de } 95\%}$.

4. 4.1) On note N_V (respectivement p) le nombre (respectivement la proportion) de vecteurs propres de A qui appartiennent à $[\![-5,5]\!]^3$. Comme $\#[\![-5,5]\!]^3 = 11^3$, alors $p = \frac{N_V}{11^3}$ soit $N_V = p \times 11^3$. On considère l'épreuve de BERNOULLI qui consiste à choisir au hasard un vecteur de $[\![-5\,,5]\!]^3$, puis à renvoyer 1 si le vecteur en question est un vecteur propre de la matrice A (la probabilité de succès est notre paramètre de BERNOULLI). On réalise $n = 10000$ fois dans des conditions indépendantes cette expérience (ce qui est réalisé dans la boucle `for`). On note $X_k = 1$ si le k-ième vecteur tiré est vecteur propre de A, $X_k = 0$ sinon. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$. On sait alors que la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur sans biais de p. Le nombre `nb/n` en sortie de boucle correspond à une réalisation de la variable M_n et donne une estimation de p. En multipliant par 11^3 et en arrondissant à l'entier le plus proche (car $N_V \in \mathbf{N}$)[5], on obtient donc une estimation de N_V.

4.2) On a vu précédemment que $\mathbf{P}\left(M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$. Cela équivaut à : $\mathbf{P}\left(11^3 M_n - \frac{11^3}{\sqrt{n}} \leq N_V \leq 11^3 M_n + \frac{11^3}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$. Si on choisit n tel que $\frac{11^3}{\sqrt{n}} \leq 0,5$, on aura donc

$$\mathbf{P}\left(11^3 M_n - 0,5 \leq N_V \leq 11^3 M_n + 0,5\right) \geq 0,95.$$

Par ailleurs, l'entier N_n le plus proche de $11^3 M_n$ vérifie

$$11^3 M_n - 0,5 \leq N_n \leq 11^3 M_n + 0,5.$$

On en déduit que l'écart entre N_n et N_V est inférieur ou égal à 1 (avec une probabilité d'au moins 95%). Or $\frac{11^3}{\sqrt{n}} \leq 0,5 \iff \sqrt{n} \geq 2 * 11^3 \iff n \geq 4 \times 11^6$. Donc en choisissant $n \geq 4 \times 11^6$ (soit $n \geq 7086244$), la valeur affichée `round(nb/n*11**3)` donne une estimation de N_V à 95%.

[5] Attention, cette fonction n'est pas la partie entière, qui est `int()` dans Python

4.3) On reprend le programme du début de la question, en remplaçant n par 7086244. On obtient $\boxed{22}$ après exécution. Calculons la valeur exacte de N_V afin de la comparer à 22 : D'après l'étude réalisée en seconde question, les vecteurs propres de A à coefficients entiers sont de la forme $(0,k,-k)$ ou $(-2k,k,3k)$ ou $(k,0,-k)$ avec $k \in \mathbb{Z}^\star$. Comme il y a 10 entiers non nuls compris entre -5 et 5, on dénombre :

- 10 vecteurs propres $(0,k,-k)$ éléments de $[\![-5\,,5]\!]^3$
- 10 vecteurs propres $(k,0,-k)$ éléments de $[\![-5\,,5]\!]^3$

Reste à dénombrer ceux qui sont de la forme $(-2k,k,3k)$ avec $k \neq 0$. Il faut que l'on ait : $\begin{cases} 0 < |2k| \leq 5 \\ 0 < |k| \leq 5 \\ 0 < |3k| \leq 5 \end{cases}$

Les seuls entiers k qui conviennent sont -1 et 1.

Il y a donc 2 vecteurs propres de la forme $(-2k,k,3k)$ qui appartiennent à $[\![-5\,,5]\!]^3$.

On en déduit que $\boxed{N_V = 10+10+2 = 22}$ ce qui correspond à la valeur obtenue par estimation dans la question précédente.

Solution (exercice 2.24)

(Énoncé : 16) On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $[0;1]$.

1. $U^2(\Omega) \subset [0,1]$ donc $F_{U^2}(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_{U^2}(x) = 1$ si $x > 10$. Soit $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} F_{U^2}(x) &= \mathbf{P}(U^2 \leq x) \\ &= \mathbf{P}(-\sqrt{x} \leq U \leq \sqrt{x}) \\ &= F_U(\sqrt{x}) - F_U(-\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x} - 0 \text{ car } \sqrt{x} \in [0,1] \text{ et } -\sqrt{x} \leq 0) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{F_{U^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$ Vérifions qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition de variable aléatoire réelle à densité. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} F_{U^2}(x) = 0 = F_{U^2}(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} F_{U^2}(x) = 0 = F_{U^2}(0)$: F_{U^2} est continue en 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} F_{U^2}(x) = 1 = F_{U^2}(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} F_{U^2}(x) = 1 = F_{U^2}(1)$: F_{U^2} est continue en 1. La fonction F_{U^2} est donc continue sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}\backslash\{0,1\}$: $\boxed{U^2 \text{ admet donc une densité}}$.

La fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} F'_{U^2}(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de U^2.

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

C'est également une densité de V^2 puisque V suit la même loi que U.

2. **2.1)** Comme U^2 et V^2 sont indépendantes (car U et V sont indépendantes) et admettent chacune f comme densité, on en déduit que la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$ admet une densité h définie par le produit de convolution des deux :

$$h(x) = f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) f(t)\, dt.$$

2.2) Programme permettant de simuler Z et d'estimer $\mathbf{P}(Z \leq 1)$:

```python
import random as rd
def simuleZ():
    return rd.random()**2 + rd.random()**2
def freq_empirique(N=10000):
    c = 0
    for k in range(N):
        if simuleZ() <= 1:
            c += 1
    return c/N # estimation de P(Z <= 1)
```

On en déduit que $\mathbf{P}(Z \leq 1) \approx 0,78$.

3. **3.1)** Soit $0 < x \leq 1$; $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) f(t)\, dt$. Or $f(t)f(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-t}} \times \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t < 1 \text{ et } 0 < x-t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\begin{cases} 0 < t < 1 \\ 0 < x-t < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t < 1 \\ x-1 < t < x \end{cases} \iff \max(0, x-1) < t < \min(1, x)$. Ici $x \in]0,1]$, donc $\max(0, x-1) < t < \min(1,x) \iff 0 < t < x$. Ainsi on a bien :

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt, \quad \forall x \in]0,1]}.$$

3.2) Soit $0 < x \leq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}$ est définie, continue sur $]0,x[$, donc l'intégrale précédente est impropre en 0 et en x. Changement de variable : $y = \frac{t}{x}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t}{x}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante sur $]0,x[$ et $\varphi(]0,x[) =]0,1[$; on a alors $dt = x\,dy$, $\sqrt{x-t} = \sqrt{x-xy} = \sqrt{x}\sqrt{1-y}$ et $\sqrt{t} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ donc $h(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{y}} x\, dy$ soit

$$h(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}\, dy$$

3.3) On pose ensuite $y = \sin^2(u)$ avec $u \in]0, \pi/2[$ ($u \mapsto \sin^2(u)$ étant strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi/2[$ à valeurs dans $]0,1[$) $dy = 2\cos(u)\sin(u)\, du$, $\sqrt{1-y} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u)$ car $\cos(u) > 0$ sur $]0,\pi/2[$ et $\sqrt{y} = \sqrt{\sin^2(u)} = \sin(u)$ car $\sin(u) > 0$ sur $]0,\pi/2[$. On a donc $h(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(u)}\frac{1}{\sin(u)} 2\cos(u)\sin(u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\, du$ ce qui donne :

$$\boxed{h(x) = \frac{\pi}{4}}.$$

3.4) Comme Z a pour densité h, alors $\mathbf{P}(Z \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} h(x)\, dx$. $Z(\Omega) \subset [0,2]$ donc $h = 0$ sur $]-\infty, 0]$; de plus $h(x) = \pi/4$ sur $]0,1]$. On en déduit que $\mathbf{P}(Z \leq 1) =$

$\int_0^1 \pi/4\,dx$ autrement dit

$$\boxed{\mathbf{P}(Z \leq 1) = \pi/4}$$

Cette estimation est cohérente avec ce que nous avions trouvé précédemment. Comme U et V suivent une loi uniforme sur $[0,1]$, le couple (U,V) représente le choix d'un point $M(U,V)$ au hasard sur le carré $[0,1]^2$; $Z = U^2+V^2 = OM^2$ (distance au carré entre M et le point $O(0,0)$). L'événement $(Z \leq 1)$ signifie que $OM^2 \leq 1$, autrement dit le point M est situé dans le quart de disque de centre O et de rayon 1. Intuitivement, la probabilité qu'il appartienne à ce quart de disque est l'aire de ce quart de disque (c'est-à-dire $\pi/4$) divisé par l'aire totale du carré. Comme l'aire du carré vaut 1, la probabilité de choisir un point au hasard dans le quart de disque est égale $\pi/4$, ce que confirme le calcul précédent.

4. On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $p = \frac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

4.1) Soit $\varepsilon > 0$; inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \mathbf{E}(S_n)\right|\right) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathbf{B}(p)$ donc $\mathbf{E}(Y_i) = p = \pi/4$ et $\mathbf{Var}(Y_i) = p(1-p) = \pi/4(1-\pi/4)$.

Par suite, $\mathbf{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(Y_n) = \dfrac{np}{n} = p$ (linéarité de l'espérance) donc $\mathbf{E}(S_n) = \pi/4$.

$\mathbf{Var}(S_n) = \mathbf{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Var}(Y_i)$ (car les Y_i sont indépendantes) et par conséquent $\mathbf{Var}(S_n) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{\pi/4(1-\pi/4)}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc : $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right|\right) \geq \varepsilon) \leq \frac{\pi/4(1-\pi/4)}{n\varepsilon^2}$.

La fonction $x \mapsto x(1-x)$ admet un maximum en $x = 1/2$ qui vaut $1/4$. En majorant $\pi/4(1-\pi/4)$ par $1/4$, on obtient :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right|\right) \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}}.$$

4.2) Dès lors, il suffit que $\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq 0{,}05$ pour avoir $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right|\right) \geq \varepsilon) \leq 0{,}05$. Or $\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq 0{,}05 \iff \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \frac{5}{100} \iff 4n\varepsilon^2 \geq 20 \iff n \geq \frac{5}{\varepsilon^2}$.

Donc pour $n \geq \frac{5}{\varepsilon^2}$, $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right|\right) \geq \varepsilon) \leq 0{,}05$ soit $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right|\right) < \varepsilon) \geq 0{,}95$.

Ainsi, pour $n \geq \frac{5}{\varepsilon^2}$, on a : $\mathbf{P}\left(\frac{\pi}{4} \in [S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]\right) \geq 0{,}95$.

4.3) En choisissant $\varepsilon = 10^{-2}$, on obtient un intervalle de longueur 2×10^{-2}. $\frac{5}{\varepsilon^2} = 50000$ donc on conclut que :

$$\boxed{\text{si } n \geq 50000,\ \left[S_n - 10^{-2}, S_n + 10^{-2}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } p \text{ à } 95\%}$$

.

```
def simuleY():
    if simuleZ() <= 1:
        return 1
    return 0
def intervalle_confiance(eps):
    n = 1
    S = simuleY() # Y1
    while 1/(4*n*eps**2) > 0.05:
        n += 1
        S += simuleY() # Y1+...+Yn
    S = S/n
    return [S - eps,S + eps]
```

$[0.77274, 0.79274]$ est un intervalle de confiance de $\pi/4$ de longueur 2×10^{-2}.

5. *Une première alternative* : Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\mathbf{P}(\tan(U) \leq 1) = \pi/4$ (car U prend ses valeurs dans $[0,1]$ donc $\arctan(\tan(U)) = U$). Il suffit alors de reprendre le programme précédent en remplaçant la fonction <function simuleY at 0x7fe73f524040> par la suivante :

```
import random as rd
def simuleY(): # simule la loi de \textsc{Bernoulli} B(pi/4)
    u = rd.random()
    if np.tan(u) <= 1: # probabilité pi/4
        return 1
```

```python
    return 0
```

Une deuxième alternative D'après la formule du transfert, si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors sous réserve d'existence : $\mathbf{E}(\varphi(\mathrm{U})) = \int_0^1 \varphi(t) f_{\mathrm{U}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. On choisit alors une fonction φ de telle sorte que $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \pi/4$. Par exemple la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ vérifie : $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \pi/4$. On a donc $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+\mathrm{U}^2}\right) = \frac{\pi}{4}$ si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$. On définit alors un n-échantillon $(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n)$ de la variable $\mathrm{Y} = \frac{1}{1+\mathrm{U}^2}$: les variables aléatoires $\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n$ sont indépendantes et de même loi que Y. On pose $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{Y}_1+\ldots+\mathrm{Y}_n}{n}$ (moyenne empirique), $\mathrm{S}_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Y}_i - \mathrm{M}_n)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i^2\right) - \mathrm{M}_n^2}$ (écart-type empirique). Dès lors, en appliquant le théorème de la limite centrée, on sait que pour n suffisamment grand, l'intervalle $\left[\mathrm{M}_n - 1.96\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}, \mathrm{M}_n + 1.96\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de la moyenne $\mu = \pi/4$.

```python
def Y():
    u = random()
    return 1/(1 + u**2)

def moyenne(X):
    n = len(X)
    S = 0
    for x in X:
        S += x
    return S/n
def ecart_type(X):
    n = len(X)
    S = 0
    for x in X:
        S += x**2
    return sqrt(S/n - moyenne(X)**2)
```

```python
def intervalle_confiance2():
    n = 30 # pour appliquer le TCL, on prend n>= 30
    echantillon = [Y() for i in range(n)]
    sy = ecart_type(echantillon)
    while 1.96 * sy/sqrt(n) > 0.01:
        n += 1
        echantillon.append(Y())
        sy = ecart_type(echantillon)
    M = moyenne(echantillon)
    return n,[M - 1.96*sy/sqrt(n),M + 1.96*sy/sqrt(n)]
```

(979, [0.7736673136565477, 0.7936563396780032]) : il a fallu 979 itérations pour obtenir l'intervalle de confiance $[0.7736673136565477, 0.7936563396780032]$ qui est d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

Solution (exercice 2.25)

(Énoncé : 17)

1. On peut vérifier directement la définition d'un sous-espace vectoriel, mais cherchons plutôt à l'écrire sous forme d'un Vect. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} \in \mathrm{F}_a &\iff \mathrm{P}(a) = 0 \\
&\iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbf{R}_{n-2}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)\mathrm{Q} \\
&\iff \exists a_0, \dots, a_{n-2} \in \mathbf{R},\ \mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)\sum_{k=0}^{n-2} a_k \mathrm{X}^k \\
&\iff \exists a_0, \dots, a_{n-2} \in \mathbf{R},\ \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k (\mathrm{X}-a)\mathrm{X}^k
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{F}_a = \mathrm{Vect}\left((\mathrm{X}-a), (\mathrm{X}-a)\mathrm{X}, \dots, (\mathrm{X}-a)\mathrm{X}^{n-2}\right).$$

Donc $\boxed{\mathrm{F}_a \text{ est un sous-espace vectoriel de E.}}$

De plus, la famille $\big((X-a),(X-a)X,\dots,(X-a)X^{n-2}\big)$ est une famille génératrice de F_a, et elle est échelonnée, c'est donc une base de E, et $\boxed{\dim F_a = n-1.}$

2. Soit $F=\{P\in E\ ,\ \ P(a)=P(b)=0\}$. Vérifions cette fois-ci que F est un sous-espace vectoriel de E.
Le polynôme nul vérifie bien entendu les deux conditions car il s'annule partout. Soient $P,Q\in F$, et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda P+\mu Q)(a) &= \lambda P(a)+\mu Q(a)\\ &= \lambda 0+\mu .0\\ &= 0.\end{aligned}$$

En faisant de-même pour b, on obtient que l'ensemble F est bien stable par combinaison linéaire, donc $\boxed{\text{F est un sous-espace vectoriel de E.}}$ *Autre méthode : dire que* $F=F_a\cap F_b$ *et donc* F *est un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels.*

3. On définit $u : P\in E \longmapsto u(P)(X)=P(a)X+P(b)$.
   3.1) Comme $\deg u(P)\leqslant 1$, il est clair que $u(P)\in E$ pour tout $P\in E$. Soient $P,Q\in F$, et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}u(\lambda P+\mu Q)(X) &= (\lambda P+\mu Q)(a)X+(\lambda P+\mu Q)(b)\\ &= \lambda\big(P(a)X+P(b)\big)+\mu\big(Q(a)X+Q(b)\big)\\ &= \lambda u(P)+\mu u(Q).\end{aligned}$$

   Donc : $\boxed{u\in\mathscr{L}(E).}$

   3.2)

$$\begin{aligned}P\in \mathrm{Ker}(u) &\iff u(P)=0\\ &\iff P(a)X+P(b)=0\\ &\iff P(a)=0,P(b)=0 \iff P\in F.\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,u=F.}$ Montrons que $\mathrm{Im}(u)=\mathbf{R}_1[X]$. En effet, soit $\alpha X+\beta\in\mathbf{R}_1[X]$, cherchons $P\in E$ sous la forme $P=a_1X+a_2\in\mathbf{R}_1[X]$ tel que $u(P)=\alpha X+\beta$. La condition s'écrit alors

$$\left\{\begin{aligned}aa_1+a_2&=\alpha\\ ba_1+a_2&=\beta\end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned}a_1&=\tfrac{\beta-\alpha}{b-a}\\ a_2&=\beta-ba_1\end{aligned}\right. .$$

Moralité de l'histoire : nous avons trouvé pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_1[X]$ un antécédent par u. Donc $\mathbf{R}_1[X]\subset \mathrm{Im}\,u$ et l'autre inclusion est clairement vérifiée, donc : $\boxed{\mathbf{R}_1[X]=\mathrm{Im}\,u}$. Notez que par le théorème du rang, on obtient alors $\boxed{\dim\mathrm{Ker}\,u=(n-1+1)-2=n-2.}$

Solution (exercice 2.26)

(Énoncé : 17)

1. La suite nulle vérifie la relation de récurrence. Soient $(u_n),(v_n)$ deux suites de E, et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}(\lambda u_n+\mu v_n)_{n+3} &= \lambda u_{n+3}+\mu v_{n+3}\\ &= \lambda\left(u_{n+2}+\frac14u_{n+1}-\frac14u_n\right)+\mu\left(v_{n+2}+\frac14v_{n+1}-\frac14v_n\right)\\ &= (\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2})+\frac14(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})-\frac14(\lambda u_n+\mu v_n).\end{aligned}$$

$(u_n),(v_n)$ sont deux suites de E

Donc : $\boxed{(\lambda u_n+\mu v_n)\in E \text{ et E est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^{\mathbf{N}}.}$

2. Soit

$$f\left|\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathbf{R}^3,\\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}}&\longmapsto&(u_0,u_1,u_2).\end{array}\right.$$

Montrons que f est un isomorphisme. Soient donc $(u_n),(v_n)\in E$, et $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}f(\lambda u+\mu v) &= \big(\lambda u_0+\mu v_0,\lambda u_1+\mu v_1,\lambda u_2+\mu v_2\big),\\ &= \lambda(u_0,u_1,u_2)+\mu(v_0,v_1,v_2),\\ &= \lambda f(u)+\mu f(v).\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire.}}$ De plus, soit $(u_n)\in\mathrm{Ker}\,f$, alors $u_0=u_1=u_2$ puis par récurrence immédiate $u_n=0$ pour tout $n\geqslant 3$. Ainsi $(u_n)=(0)$. Enfin si $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, on peut construire une suite $(u_n)\in E$ telle que $u_0=x,u_1=y,u_2=z$. Donc f est finalement une bijection linéaire et c'est un $\boxed{\text{isomorphisme.}}$ D'après le cours, E est alors de dimension finie et

$$\boxed{\dim E=\dim\mathbf{R}^3=3.}$$

3. On cherche une suite de la forme (q^n) qui soit dans E avec $q \in \mathbf{R}^\star$ (la suite nulle est bien entendu une solution). Alors

$$\begin{aligned}(q^n)_n \in \mathrm{E} &\iff \forall n \in \mathbf{N},\quad q^{n+3} = q^{n+2} + \frac{1}{4}q^{n+1} - \frac{1}{4}q^n, & q \neq 0\\ &\iff q^3 = q^2 + \frac{1}{4}q - \frac{1}{4} & \textit{1 est racine évidente}\\ &\iff (q-1)\left(q^2+q-\frac{1}{4}\right) = 0.\end{aligned}$$

Les deux racines de $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-\frac{1}{4}$ sont $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. Notons $q_1 = 1$, $q_2 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ et $q_3 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. Alors $\boxed{(q_1^n)_n, (q_2)^n_n, (q_3^n)_n \text{ sont trois suites géométriques de E.}}$

4. On montre alors que ces trois suites forment une famille libre de E. Puisque $((q_1^n)_n, (q_2)^n_n, (q_3^n)_n)$ sera alors une famille de cardinal 3 et que $\dim \mathrm{E} = 3$, ce sera une base de E et on aura

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left((q_1^n)_n, (q_2)^n_n, (q_3^n)_n.\right)}$$

Reste à montrer la liberté. Soient λ, μ, ν tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\lambda q_1^n + \mu q_2^n + \nu q_3^n = 0.$$

On constate que $|q_2| > |q_1| > |q_3|$. Alors, puisque $q_2 \neq 0$, l'hypothèse est équivalente à

$$\lambda\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n + \mu\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^n + \mu 1 = 0.$$

Puisque $\left|\frac{q_1}{q_2}\right| < 1$ et $\left|\frac{q_3}{q_2}\right| < 1$, les deux suites précédentes tendent vers zéro (propriété sur les suites géométriques), donc en faisant $n \to \infty$, on obtient $\mu = 0$. On fait ensuite de-même en mettant cette fois-ci q_1 en facteur, on obtient $\lambda = 0$ puis vient alors $\nu = 0$. En conclusion, $(q_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(q_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_3^n)_{n\in\mathbf{N}}$ forment une famille libre de E.

Solution (exercice 2.27)

(Énoncé : 17)

1. Soit k dans $[\![0\,,\,n]\!]$. Alors

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^k - (\mathrm{X}-1)\mathrm{X}^k = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\mathrm{X}^{\ell+1} - \mathrm{X}^{k+1} + \mathrm{X}^k.$$

Le monôme dominant de $\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^k$ est X^{k+1}, donc le terme d'ordre X^k se simplifie. On obtient

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}^k) = \sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{k}{\ell}\mathrm{X}^{\ell+1} + \mathrm{X}^k = \mathrm{X}^k(1+k) + \mathrm{Q}_{k-1}$$

où $\mathrm{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}[\mathrm{X}]$. Donc $\boxed{\deg \mathrm{F}(\mathrm{X}^k) = k \text{ et le coefficient dominant est } k+1.}$

2. Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\lambda\mathrm{P}_1+\mu\mathrm{P}_2) &= \mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}_1+\mu\mathrm{P}_2)(\mathrm{X}+1) - (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}_1+\mu\mathrm{P}_2)(\mathrm{X})\\ &= \lambda\left[\mathrm{X}\mathrm{P}_1(\mathrm{X}+1) - (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}_1(\mathrm{X})\right] + \mu\left[\mathrm{X}\mathrm{P}_2(\mathrm{X}+1) - (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}_2(\mathrm{X})\right] & \textit{linéarité de l'évaluation}\\ &= \lambda\mathrm{F}(\mathrm{P}_1) + \mu\mathrm{F}(\mathrm{P}_2).\end{aligned}$$

Donc F est une application linéaire. Nous avons montré que pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\deg \mathrm{F}(\mathrm{X}^k) = k$, puisque F est linéaire, alors pour tout $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^n a_k\mathrm{X}^k \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$,

$$\deg \mathrm{F}(\mathrm{P}) = \deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \deg \mathrm{F}(\mathrm{X}^k)\right).$$

Dans la somme, le terme de plus haut degré est donc $\mathrm{F}(\mathrm{X}^n)$ qui est de degré n. Donc $\deg \mathrm{F}(\mathrm{P}) \leqslant n$ et $\boxed{\text{F est bien un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[\mathrm{X}].}$

3. D'après la 1ère question, on constate que la matrice de F dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star\\ 0 & 2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \star\\ 0 & \cdots & 0 & n+1\end{pmatrix}$$

Elle est donc triangulaire supérieure et les valeurs propres se lisent sur la diagonale : $\mathrm{Spec}\,\mathrm{F} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

$\boxed{\text{L'endomorphisme F possède donc } n+1 \text{ valeurs propres distinctes et est de fait diagonalisable}}$

car $\dim \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$.

Solution (exercice 2.28)

(Énoncé : 18)

1. ▸ Soit $f \in \mathscr{C}$, commençons par montrer que $\mathrm{T}(f)$ est une fonction continue. En effet, elle est continue sur $\mathbf{R}^\star$, puisque pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$,

$$\mathrm{T}(f)(x) = \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0)}{x}$$

où G est une primitive de f, donc c'est un quotient de fonctions continues. Reste à établir la continuité en zéro. Reprenons l'expression précédente.

$$\mathrm{T}(f)(x) = \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0)}{x} \xrightarrow[]{x \longrightarrow \infty} \mathrm{G}'(0) = f(0).$$

Donc $\mathrm{T}(f) \in \mathscr{C}$.

▸ Linéarité. Soient $f, g \in \mathscr{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\lambda f + \mu g)(x) &= \begin{cases} (\lambda f + \mu g)(0) & \text{si } x = 0,\\ \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}\\ &= \begin{cases} \lambda f(0) + \mu g(0) & \text{si } x = 0,\\ \lambda \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}\\ &= \lambda \mathrm{T}(f)(x) + \mu \mathrm{T}(g)(x).\end{aligned}$$

linéarité de l'évaluation et de l'intégrale

Donc $\boxed{\text{T est bien un endomorphisme de } \mathscr{C}.}$

2. L'application est linéaire, on calcule donc son noyau. Soit $f \in \operatorname{Ker} \mathrm{T}$. Alors f est continue et $f(0) = 0$, pour tout $x \neq 0$, $\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Puisque $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f$ est l'unique primitive de f s'annulant en zéro puisque f est continue, nous obtenons en dérivant l'égalité $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Mais comme $f(0) = 0$, f est bien l'application nulle. En conclusion : $\boxed{\text{T est injective.}}$

3. Non, n'importe quelle fonction continue non nulle en 0 n'est pas dans $\operatorname{Im}(f)$.

Solution (exercice 2.29)

(Énoncé : 18)

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbf{R}^-$ et $f_n'(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{n} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \leqslant n \iff x \leqslant \ln n$. Cette dernière inégalité étant toujours vraie sur $\mathbf{R}^-$, on déduit que f_n est strictement croissante sur $\mathbf{R}^-$. De plus, par opérations sur les limites, $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(0) = 1 - \frac{1}{n}$. De plus, f_n continue sur $\mathbf{R}^-$. Donc d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbf{R}^-$ vers $\left]-\infty, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Or, $0 \in \left]-\infty, 1 - \frac{1}{n}\right]$, donc $\boxed{\text{il existe un unique } x_n \in \mathbf{R}^- \text{ tel que : } \quad f_n(x_n) = 0.}$
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors cherchons le signe de $f_{n+1}(x_n)$. Nous avons $f_{n+1}(x_n) = 1 + x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n}}{n+1}$. Or $1 + x_n = \frac{\mathrm{e}^{x_n}}{n}$ car $f_n(x_n) = 0$. Donc

$$f_{n+1}(x_n) = \frac{e^{x_n}}{n} - \frac{e^{x_n}}{n+1} = \frac{e^{x_n}}{n(n+1)} \geqslant 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Or la fonction f_{n+1} est croissante, donc $x_n \geqslant x_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$
De plus (x_n) est minorée par -1, en effet puisque

$$f_n(-1) = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n} \leqslant 0$$

il vient d'après la question 1) : $1 \leqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$. Donc (x_n) est décroissante minorée par -1 donc $\boxed{(x_n) \text{ est convergente}}$ vers une limite notée $\ell \in [-1, 0]$.
3. On a donc l'encadrement : $\mathrm{e}^{-1} \leqslant e^{x_n} \leqslant 1 \iff \frac{e^{-1}}{n} \leqslant \frac{e^{x_n}}{n} \leqslant \frac{1}{n}$, et par théorème d'encadrement : $\frac{e^{x_n}}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Alors par passage à la limite dans $f_n(x_n) = 0$ on obtient $1 + \ell - 0 = 0 \iff \boxed{\ell = -1}$
4. $x_n - \ell = x_n + 1 = \frac{e^{x_n}}{n} \sim \boxed{\frac{e^{-1}}{n}}$.

Solution (exercice 2.30)

(Énoncé : 18) Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

1. Par différence, la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$. La fonction f est donc continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et par opérations sur les limites $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur } \mathrm{J} = \mathbf{R}.}$
2. Puisque f' ne s'annule pas, g est dérivable sur $\mathrm{J} = \mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{g(x)} + \mathrm{e}^{-g(x)}}.$$
Or par définition de g, nous avons pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$x = \mathrm{e}^{g(x)} - \mathrm{e}^{-g(x)}.$$
Donc, en utilisant une identité remarquable,
$$x^2 + 4 = \mathrm{e}^{2g(x)} - \mathrm{e}^{-2g(x)} + 2 = \left(\mathrm{e}^{g(x)} + \mathrm{e}^{-g(x)}\right)^2.$$
Il reste à prendre la racine de chaque côté :
$$\sqrt{x^2+4} = \mathrm{e}^{g(x)} + \mathrm{e}^{-g(x)}.$$
D'où la formule annoncé : $\boxed{g \text{ est dérivable et que } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \text{ pour tout } x \in \mathrm{J}.}$
3. On peut calculer explicitement la fonction g, en résolvant une équation. Commençons par multiplier ladite équation par e^x :
$$\begin{aligned} y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &\iff y\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} - 1, \\ &\iff (\mathrm{e}^x)^2 - y\mathrm{e}^x - 1 = 0, \\ &\iff \mathrm{e}^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}, \\ &\iff \mathrm{e}^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}. \end{aligned}$$
trinôme en e^x
$\Delta = y^2 + 4 > 0$

Le trinôme $\mathrm{X}^2 - y\mathrm{X} - 1$ possède donc deux racines réelles, et le produit vaut -1, donc elles sont de signe opposé. Il n'y en a qu'une seule de positive, c'est la plus grande. Donc
$$y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \iff x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}\right).$$
On a donc $\boxed{g(x) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction g est donc dérivable, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x + \sqrt{x^2+4}} = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)\sqrt{x^2+4}}.$$
Après simplifications, nous avons bien : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\boxed{g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$.

Solution (exercice 2.31)

(Énoncé : 18)

1. On suppose que les deux pièces amènent pile avec la même probabilité $p \in]0,1[$

1.1) Notons T le temps d'attente du premier pile. Alors $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ puisqu'il s'agit du temps d'attente d'un succès (faire pile) dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer une pièce). La probabilité qu'Achille gagne au lancer n est la probabilité qu'il n'y ait eu que des échecs jusqu'au $2n-1$-ième lancer, puis un succès au lancer global $2n$, *i.e.*
$$\mathbf{P}(\mathrm{T} = 2n-1) = \boxed{pq^{2n-2}}.$$

1.2) Quelle est la probabilité que Achille gagne ? Notons A cet évènement. Alors $\mathrm{A} = \biguplus_{n=1}^{\infty} \{\mathrm{T} = n\}$. Donc par additivité dénombrable,
$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{p}{q^2} \sum_{n=1}^{\infty} (q^2)^n = \frac{p}{q^2}\frac{q^2}{1-q^2} = \boxed{\frac{1}{1+q}},$$
car $|q| < 1$.

1.3) Le jeu est-il équitable? Non, et cela provient du fait qu'Achille joue en premier. En effet, si on note H l'évènement « Hector gagne», on a de manière analogue.

$$\mathbf{P}(\mathrm{H}) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{(q^2)^{n-1}}}_{\text{chaque joueur fait } n-1 \text{ échecs}} \underbrace{\boxed{qp}}_{\text{A échec, H succès}} = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{\infty}(q^2)^n = \boxed{\frac{q}{1+q}}.$$

Comme $q < 1$, $\boxed{\text{Achille a moins de chance qu'Hector de gagner.}}$

2. On suppose maintenant que la pièce d'Achille amène pile avec la probabilité $p_1 \in]0,1[$ et celle d'Hector amène pile avec la probabilité $p_2 \in]0,1[$. Avec les mêmes notations qu'avant, la probabilité qu'Achille (*resp.* Hector) gagne au lancer n dont on note A_n (*resp.* H_n) l'évènement associé est, par indépendance des lancers :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) = (q_1q_2)^{n-1}p_1.$$

De la même manière on obtient

$$\mathbf{P}(\mathrm{H}_n) = (q_1q_2)^{n-1}q_1p_2.$$

Donc comme $|q_1q_2| < 1$:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\mathrm{A}_n) = p_1\frac{1}{1-q_1q_2},$$

et

$$\mathbf{P}(\mathrm{H}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\mathrm{H}_n) = q_1p_2\frac{1}{1-q_1q_2}.$$

Donc la partie est équilibrée si et seulement si

$$\frac{p_1}{1-q_1q_2} = \frac{q_1p_2}{1-q_1q_2} \iff \boxed{p_1 = q_1p_2 = (1-p_1)p_2}.$$

Solution (exercice 2.32)

(Énoncé : 18)

- Supposons que $i \neq 0$. Alors il y a $\binom{2n}{n-1}$ choix de boules parmi les n en dehors de la i-ième qui figure forcément dans la poignée et il y a $\binom{2n}{n}$ poignées possibles. Donc

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_i = 1) = \frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\times\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n}{n+1}.$$

Comme $\mathrm{X}_i(\Omega) = \{0,1\}$, $\boxed{\mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{n}{n+1}\right)}$.

- Si $i = 0$, alors l'évènement $\{\mathrm{X}_i = 0\}$ signifie «il n'y a pas de boule 0 dans le paquet de n boules». Autrement dit, nous avons pioché les boules numérotées de 1 à n uniquement (et il y a $n!$ choix). Donc

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 0) = \frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Donc : $\boxed{\mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1-\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)}$.

Solution (exercice 2.33)

(Énoncé : 18)

1. On applique la formule des probabilités totales au système complet $\{\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} = \ell\}_{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2}$. Notons que les variables aléatoires X, Y, Z sont indépendantes puisque les tirages ont lieu avec remise. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=Z) &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(Z=k+\ell, X=k, Y=\ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-\ell} \mathbf{P}(Z=k+\ell)\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=\ell) && \textit{indépendance de } X, Y, Z,\ 0 \leqslant k+\ell \leqslant n-1 \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-\ell} \left(\frac{1}{n}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^3 \sum_{\ell=0}^{n-1} (n-\ell) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^3 \sum_{\ell=1}^{n} \ell = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)}{2} && \textit{changement d'indice } \ell \longleftarrow n-\ell \\
&= \boxed{\frac{n+1}{2n^2}}.
\end{aligned}$$

2. Toujours grâce à la formule des probabilités totales appliquée au même système complet, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y+Z=n-1) &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(Z=n-1-k-\ell, X=k, Y=\ell) && \textit{indépendance} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\left(Z=n-1-(k+\ell)\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2 && \textit{condition } 0 \leqslant k+\ell \leqslant n-1 \textit{ i.e. } k \leqslant n-1-\ell \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-\ell} 1 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{\ell=0}^{n-1} (n-\ell) \\
&= \boxed{\frac{n+1}{2n^2}}.
\end{aligned}$$

Solution (exercice 2.34)

(Énoncé : 18)

1. Par mutuelle indépendance des X_i, on a $\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \iff \mathbf{E}(Z_n) = (\mathbf{E}(X_1))^n$. Or $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{P}(X_1=1) - \mathbf{P}(X_1=-1) = 1-p-p = 1-2p$, d'où $\boxed{\mathbf{E}(Z_n) = (1-2p)^n.}$
2. On a deux égalités : $\mathbf{P}(Z_n=1) - \mathbf{P}(Z_n=-1) = \mathbf{E}(Z_n)$ et $\mathbf{P}(Z_n=1) + \mathbf{P}(Z_n=-1) = 1$, d'où un système d'équations que l'on peut résoudre : $\begin{cases} \mathbf{P}(Z_n=1) - \mathbf{P}(Z_n=-1) = (1-2p)^n \\ \mathbf{P}(Z_n=1) + \mathbf{P}(Z_n=-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathbf{P}(Z_n=1) = (1-2p)^n+1 \\ 2\mathbf{P}(Z_n=-1) = 1-(1-2p)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{P}(Z_n=1) = \frac{1+(1-2p)^n}{2} \\ \mathbf{P}(Z_n=-1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2} \end{cases}.$
Ainsi, $\boxed{Z_n(\Omega) = \{-1,1\} \text{ et } \mathbf{P}(Z_n=1) = \frac{1+(1-2p)^n}{2},\ \mathbf{P}(Z_n=-1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2}.}$
3. On peut commencer par calculer sous quelle condition la covariance est nulle. Nous avons.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(Z_1,Z_2) &= \mathbf{Cov}(X_1, X_1X_2) \\
&= \mathbf{E}(X_1^2X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_1X_2) && \textit{indépendance et même loi pour les } X_i \\
&= \mathbf{E}(X_1^2)\mathbf{E}(X_2) - \mathbf{E}(X_1)^3 && X_1^2 = 1 \\
&= \mathbf{E}(X_2) - \mathbf{E}(X_1)^3 = 1-2p-(1-2p)^3 \\
&= (1-2p)4p(1-p).
\end{aligned}$$

Or, comme $p \in]0,1[$, Z_1, Z_2 sont donc non corrélées uniquement pour $p = \frac{1}{2}$. Inversement, montrons que pour $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires Z_1, Z_2 sont bien indépendantes. On calcule.

$$\mathbf{P}(Z_1=1, Z_2=1) = \mathbf{P}(X_1=1, X_1X_2=1) = \mathbf{P}(X_1=1, X_2=1) = \mathbf{P}(X_1=1)\mathbf{P}(X_2=1) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_1=1)\mathbf{P}(Z_2=1) &= \mathbf{P}(X_1=1)\mathbf{P}(X_1X_2=1) && \{X_1X_2=1\} = \{X_1=1, X_2=1\} \uplus \{X_1=-1, X_2=-1\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On passe aux autres vérifications.

$$\mathbf{P}(Z_1=-1,Z_2=1)=\mathbf{P}(X_1=-1,X_1X_2=1)=\mathbf{P}(X_1=-1,X_2=-1)=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_1=-1)\,\mathbf{P}(Z_2=1)&=\mathbf{P}(X_1=-1)\,\mathbf{P}(X_1X_2=1) && \{X_1X_2=1\}=\{X_1=1,X_2=1\}\uplus\{X_1=-1,X_2=-1\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(Z_1=1,Z_2=-1)=\mathbf{P}(X_1=1,X_1X_2=-1)=\mathbf{P}(X_1=1,X_2=-1)=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_1=1)\,\mathbf{P}(Z_2=-1)&=\mathbf{P}(X_1=1)\,\mathbf{P}(X_1X_2=-1) && \{X_1X_2=-1\}=\{X_1=1,X_2=-1\}\uplus\{X_1=-1,X_2=1\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\mathbf{P}(Z_1=-1,Z_2=-1)=\mathbf{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_1=-1)\,\mathbf{P}(Z_2=-1)&=\mathbf{P}(X_1=-1)\,\mathbf{P}(X_1X_2=-1) && \{X_1X_2=-1\}=\{X_1=1,X_2=-1\}\uplus\{X_1=-1,X_2=1\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{Z_1, Z_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si } p=\frac{1}{2}}$.

Solution (exercice 2.35)

(Énoncé : 19)

1. À l'aide la formule de König-Huygens, nous avons

$$\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})=\mathbf{Cov}(X_k+X_{k+1},X_{k+1}+X_{k+2}).$$

Par bilinéarité de la covariance, on déduit alors

$$\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})=\mathbf{Cov}(X_k,X_{k+1})+\mathbf{Cov}(X_k,X_{k+2})+\mathbf{Var}(X_{k+1})+\mathbf{Cov}(X_{k+1},X_{k+2}).$$

Comme les X_k sont indépendantes, elles sont donc non-corrélées et il vient de fait

$$\mathbf{Cov}(Y_k,Y_{k+1})=0+0+p(1-p)+0=\boxed{p(1-p)}.$$

2. Soit $j>1$. Alors Y_k est une fonction de X_k, X_{k+1} et Y_{k+j} est une fonction de X_{k+j}, X_{k+j+1}. Or $k+j>k+1$ par hypothèse, et les X_i sont indépendantes, donc par propriété d'indépendance $\boxed{\text{les variables aléatoires } Y_k, Y_{k+j} \text{ sont indépendantes si } j>1.}$

3. On note $Z=\sum_{k=0}^{n-1}Y_k$. On admet que $\mathbf{Var}(Z)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Var}(Y_k)+2\sum_{0\leq i<j\leq n-1}\mathbf{Cov}(Y_i,Y_j)$.
Calculons alors la variance de Z.

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(Z)&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Var}(Y_k)+2\sum_{0\leq i<j\leq n-1}\mathbf{Cov}(Y_i,Y_j) && \textit{indépendance des } X_k \textit{, non corrélation de } Y_i \textit{ et } Y_j \textit{ dès que } j>i+1\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(\mathbf{Var}(X_k)+\mathbf{Var}(X_{k+1}))+2\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{Cov}(Y_i,Y_{i+1})+0\\&=2np(1-p)+2np(1-p)\\&=\boxed{4np(1-p).}\end{aligned}$$

Solution (exercice 2.36)

(Énoncé : 19)

1. Soit $t\in\mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X\leqslant t)\\&=\mathbf{P}(|T|\leqslant t-a)\\&=\boxed{\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant a,\\ \mathbf{P}(-(t-a)\leqslant T\leqslant t-a)=\Phi(t-a)-\Phi(-(t-a))=2\Phi(t-a)-1 & \text{si } t>a.\end{cases}}\end{aligned}$$

2. La fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, en particulier, par composition, la fonction F_X est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en a. Donc X est à densité, et une densité est donnée par :

$$\boxed{f_X(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2}} \mathbb{1}_{[a,\infty[}(t)}.$$

3. Il faut étudier les intégrales ci-après, égales en cas de convergence en faisant le changement de variable $\mathscr{C}^1$ croissant strictement $t = s - a$:

$$\int_a^\infty s e^{-\frac{(s-a)^2}{2}} \,ds = \int_0^\infty (t+a) e^{-\frac{t^2}{2}} \,dt.$$

Nous avons par ailleurs, pour $A > 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2}} \,dt + a \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}} \,dt \\ &= \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^A + a \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}} \,dt \\ &\xrightarrow{A \to \infty} 1 + \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\text{X admet une espérance et } \mathbf{E}(X) = 1 + \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}.}$

Solution (exercice 2.37)

(Énoncé : 19)

1. $L_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty})f(x)\,dx \boxed{= 1}$ par définition d'une densité.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $L_X(a)$ et $L_X(b)$ existent. Soit $t \in [a,b]$, montrons que $L_X(t)$ existe *i.e.* que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} f(x)\,dx \quad \text{converge,}$$

i.e. que

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x)\,dx, \text{ et } \int_{-\infty}^0 e^{-xt} f(x)\,dx \quad \text{convergent.}$$

L'intégrande étant positive, il suffit de là majorer par l'intégrande positive d'une intégrale convergente. Pour $x \geqslant 0$, alors

$$e^{-xt} f(x) \leqslant e^{-xa} f(x),$$

alors que pour $x \leqslant 0$,

$$e^{-xt} f(x) \leqslant e^{-xb} f(x).$$

Dans les deux cas nous avons majoré les intégrandes par des intégrandes d'intégrale convergente (car $L_X(a)$ et $L_X(b)$ existent), donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x)\,dx, \text{ et } \int_{-\infty}^0 e^{-xt} f(x)\,dx \quad \text{convergent.}$$

Donc $\boxed{L_X(t) \text{ existe, et le domaine de définition de } L_X \text{ est alors un intervalle.}}$

3. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Pour tout t appartient à l'intersection des domaines de définition de L_X et L_Y, les variables aléatoires e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes. Ainsi,

$$L_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\left(e^{tX+tY}\right) = \mathbf{E}\left(e^{tX} \times e^{tY}\right) = \mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\mathbf{E}\left(e^{tY}\right).$$

Donc $\boxed{L_{X+Y}(t) = L_X(t)L_Y(t).}$ Nous nous sommes servi de la condition sur t à la dernière étape du calcul : on sait alors que les deux variables aléatoires e^{tX}, e^{tY} admettent une espérance.

4. Supposons que X suit une loi normale centrée réduite. Alors, en cas de conver-

gence,

$$
\begin{aligned}
L_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt-t^2/2}\,dx, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+x)^2/2+x^2/2}\,dx, \\
&= \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+x)^2/2}\,dx, \\
&= e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t+x)^2/2}\,dx \\
&= \boxed{e^{x^2/2}.}
\end{aligned}
$$

terme dans l'exponentielle sous forme canonique

reconnaître une densité de loi $\mathcal{N}(-x, 1)$

Solution (exercice 2.44)

(Énoncé : 21)

1. On a clairement $\boxed{Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$, de plus

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = 0) &= \mathbf{P}(X < Y) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X < Y, X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(k + 1 \leqslant Y, X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(k + 1 \leqslant Y)\,\mathbf{P}(X = k).
\end{aligned}
$$

indépendance

Mais par ailleurs pour tout $k \geqslant 1$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(k + 1 \leqslant Y) &= \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(Y = \ell) \\
&= p \sum_{\ell=k+1}^{\infty} q^{\ell-1} \\
&= \frac{pq^k}{1-q} = q^k.
\end{aligned}
$$

Donc : ...

2. Donner l'espérance et la variance de Z.
3. Si $p = \frac{1}{2}$, que peut-on dire de la loi de Z ?