

DEVOIR SURVEILLÉ # 7

le Samedi 06/02/2022, 8h → 11h



Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.



Problème 1 Dans tout le problème, n, p désignent deux entiers naturels non nuls, et on note :

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^n k^p.$$

Dans la partie I, on calcule l'inverse d'une matrice de taille 3, les résultats obtenus seront repris à la fin de la partie II où on démontre quelques propriétés de $S_{p,n}$ (équivalent, caractère polynomial). Ces propriétés seront exploitées dans le calcul d'une limite d'une probabilité (partie III).

PARTIE I — RÉDUCTION ET INVERSION D'UNE MATRICE

1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}_2[X]$ et on considère la matrice ci-dessous représentant trois polynômes (R, S, T) dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1.1) Préciser R, S, T.
 - 1.2) Déterminer les valeurs propres de M et en déduire que M est diagonalisable.
 - 1.3) Déterminer une matrice D et une matrice inversible P telles que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$, où P sera choisie de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a, b, c trois réels.
2.
 - 2.1) Calculer M^{-1} . Que peut-on déduire de l'existence de M^{-1} concernant la famille (R, S, T) ?
 - 2.2) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $(1+X)^2 = aR + bS + cT$.
3. Décomposer le polynôme $aX + bX^2 + cX^3$ en produit de facteurs du premier degré.

PARTIE II — CALCUL DE L'ÉQUIVALENT D'UNE SOMME Soit f une fonction réelle d'une variable définie sur $[0, 1]$. Cette fonction est supposée croissante strictement, continue et positive.

4. Justifier l'existence de $I_n = n \int_0^1 f$ et démontrer que $I_n > 0$.
5.
 - 5.1) Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- 5.2) En déduire que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- 5.3) Encadrer le quotient $\frac{\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n.$$

5.4) À l'aide d'une fonction judicieusement choisie, démontrer que :

$$S_{p,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

PARTIE III — APPLICATION PROBABILISTE On considère $n \geq 1$ urnes U_1, \dots, U_n contenant des boules grises et blanches. On suppose que l'urne $U_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ contient i boules grises et le reste en boules blanches. On procède à l'expérience suivante :

- ▶ on choisit une urne de manière équiprobable,
- ▶ puis on pioche $p \in \mathbf{N}$ boules dans cette urne, avec remise.

On note alors $L_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'évènement «on sélectionne l'urne i » puis A l'évènement «on a choisi au moins une boule blanche parmi les p boules piochées».

6. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $\mathbf{P}(L_i)$.
7. Déterminer $\mathbf{P}({}^c A | L_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et en déduire $\mathbf{P}({}^c A), \mathbf{P}(A)$ en fonction de $S_{p,n}$.
8. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A)$ en fonction de p .

Problème 2 Étude de la loi Gamma. D'après Calculs & Raisonnements. Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul et a, λ et λ' sont des réels strictement positifs.

Dans la partie I, on détermine l'ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale. Dans la partie II, on établit quelques propriétés remarquables de cette fonction et on en calcule des valeurs. Cette fonction est utilisée dans la partie III pour construire une densité de probabilité dont on constate qu'elle est en lien avec les lois de POISSON.

PARTIE I — ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE Soit x un réel et Γ la fonction définie sur une partie de \mathbf{R} par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1. 1.1) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{x+1}$ et en déduire qu'il existe $T \in [1, \infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1, \infty[, \quad t \geq T \implies e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}.$$

- 1.2) Pour quelles valeurs de x , $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est-elle convergente?
2. 2.1) Démontrer que $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et donner dans ce cas la valeur de cette intégrale.
- 2.2) En déduire que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de Γ .

PARTIE II — QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CETTE FONCTION

4. 4.1) Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0$.
- 4.2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- 4.3) Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

5. On admet que Γ a une limite en 1, en 0^+ et en $+\infty$.
 - 5.1) Déterminer ces trois limites.
 - 5.2) Déterminer également $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.
6. 6.1) Rappeler la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et en déduire $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
- 6.2) À l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera avec soin, démontrer que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- 6.3) En déduire enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

PARTIE III — UNE DENSITÉ DE PROBABILITÉ On rappelle que a, λ et λ' sont des réels strictement positifs et on considère la fonction $f_{a,\lambda}$ définie sur \mathbf{R} par :

$$f_{a,\lambda} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- 7. 7.1)** Étudier la continuité de $f_{a,\lambda}$ sur \mathbf{R}^* et déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, $f_{a,\lambda}$ est continue sur \mathbf{R} .
- 7.2)** Étudier les variations de $f_{a,\lambda}$ sur \mathbf{R}_+^* .
- 8. 8.1)** Justifier que $f_{1,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi que l'on précisera.
- 8.2)** Plus généralement, montrer que $f_{a,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
- 8.3)** Quelle est alors une densité de la variable aléatoire $\frac{\lambda}{\lambda'}X$?
- 9.** En utilisant les résultats de la première partie, démontrer que : $\mathbf{E}(X) = \frac{a}{\lambda}$.
- 10.** On suppose dans cette dernière question que a est un entier naturel non nul et on note t un réel strictement positif, et Z désigne une variable aléatoire suivant une loi de POISSON de paramètre λt .
- 10.1)** Démontrer que la fonction ci-dessous $F_{a,\lambda}$ est une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur \mathbf{R}^* :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, F_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 10.2)** En déduire $\mathbf{P}(X > t)$.
- 10.3)** En déduire enfin que $\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(Z < a)$.

CORRECTION

Solution (problème 1)

PARTIE I – RÉDUCTION ET INVERSION D'UNE MATRICE

1. 1.1) On a par lecture de la matrice :

$$R = 1, \quad S = 2X + 1, \quad T = 3X^2 + 3X + 1.$$

1.2) Les valeurs propres de M sont $\{1, 2 \text{ et } 3\}$. En effet M est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. La matrice M est donc diagonalisable car elle possède autant de valeurs propres que sa taille.

1.3) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On détermine les sous-espaces propres E_λ pour $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ en résolvant :

$$MX = X \iff \begin{cases} x + y + z = x \\ 2y + 3z = y \\ 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

$$MX = 2X \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases},$$

$$MX = 3X \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases}.$$

Ainsi :

$$E_1(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base, si on considère les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a $M = PDP^{-1}$.

2. 2.1) On résout le système linéaire associé à M :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + 3z = b \\ 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b/2 + c/6 \\ y = (b - c)/2 \\ z = c/3 \end{cases}.$$

Ce système possède donc une unique solution donc M est inversible et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Le fait que M soit inversible entraîne que les polynômes R, S et T forment une famille libre.

2.2) Matriciellement, ce problème se traduit par l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour unique solution

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a donc : $(1 + X)^2 = \frac{1}{6}R + \frac{1}{2}S + \frac{1}{3}T$. On pouvait également développer et identifier tous les polynômes, coefficient par coefficient.

3. On a :

$$\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 = \frac{X}{6}(2X^2 + 3X + 1) = \frac{X}{6}(2X + 1)(X + 1).$$

PARTIE II — CALCUL DE L'ÉQUIVALENT D'UNE SOMME

4. I_n est bien définie puisque f est supposée continue. De plus f est strictement croissante donc $\forall x > 0, f(x) > f(0) \geq 0$.

5. 5.1) Pour $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, l'encadrement $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ donne puisque f est croissante :

$$f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

5.2) Intégrons sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ et sommons la question précédente entre 1 et n . On obtient :

$$\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k-1}{n}\right) dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx,$$

D'après la relation de CHASLES, et en sortant les constantes on obtient alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En faisant un changement d'indice dans la somme de gauche, il vient alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

5.3) D'après la question précédente, on a d'une part :

$$1 \leq \frac{1}{I_n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{I_n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{I_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1) - f(0) \right) \leq 1 + \frac{f(1) - f(0)}{I_n}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{f(1) - f(0)}{I_n}\right) = 1$, le théorème des gendarmes permet donc de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{I_n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 1,$$

autrement dit que

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n.$$

5.4) On peut appliquer ceci à la fonction $f : x \mapsto x^p$. Plus précisément on remarque que :

$$S_{p,n} = n^p \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^p \cdot n \int_0^1 x^p dx = \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

PARTIE III — APPLICATION PROBABILISTE

6. Par définition d'une loi uniforme, nous avons :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(L_i) = \frac{1}{n}.$$

7. 7.1) L'évènement ${}^c A$ est l'évènement «on n'a choisi que des boules grises». D'après les données de l'énoncé, puisque l'urne i contient exactement i boules grises sur n , et que les choix des p boules se font avec remise une fois l'urne choisie, on a :

$$\mathbf{P}(A|L_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Ainsi par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements L_1, \dots, L_n :

$$\mathbf{P}({}^c A) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(L_k) \mathbf{P}(A|L_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n} = \frac{S_{p,n}}{n^{p+1}}.$$

Par complémentarité,

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{S_{p,n}}{n^{p+1}}.$$

7.2) D'après la partie précédente, on a

$$\mathbf{P}({}^c A) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{(p+1)n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}({}^c A) = \frac{1}{p+1}$$

et par complémentaire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}({}^c A) = \boxed{\frac{p}{p+1}}.$$

Solution (problème 2)

PARTIE I — ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE Soit Γ la fonction définie sur une partie de \mathbf{R} par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Soit x un réel.

1. 1.1) Si $x > -1$, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x+1} = 0.$$

Si $x \leq -1$, on a le même résultat par produit de limites. Comme $0 < 1$, on en déduit qu'il existe $T \in [1, \infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1, \infty[, t \geq T \Rightarrow e^{-t} t^{x+1} \leq 1.$$

Fixons t un élément de $[1, \infty[$, comme $t^2 > 0$, on en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{x+1} \leq 1 &\iff t^2 e^{-t} t^{x-1} \leq 1 \\ &\iff e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

D'où la réponse à la première question.

1.2) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, \infty[$. Soit A un réel strictement positif, on a :

$$\int_1^A \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

De $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$, on en déduit que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_1^A \frac{dt}{t^2}\right)$ existe et est finie.

On peut donc affirmer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ sont deux fonctions continues et positives sur $[1, \infty[$ et on a vu qu'il existe $T \in [1, \infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1, \infty[, t \geq T \Rightarrow e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}.$$

En utilisant le théorème de comparaison sur les intégrales généralisées à fonction positive et la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, on peut donc affirmer qu'il

existe $T \in [1, \infty[$ tel que $\int_T^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ soit convergente.

Rappelons que $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est une fonction continue sur $[1, \infty[$ afin de conclure :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ est convergente pour tout réel } x.}$$

2. 2.1) On suppose x non nul.

▶ $t \mapsto t^{x-1}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$.

▶ Soit A un réel strictement positif on a :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t^{x-1} dt &= \left[\frac{t^x}{x} \right]_A^1 \\ &= \frac{1}{x} - \frac{A^x}{x} \end{aligned}$$

De $\lim_{A \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{A^x}{x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$, on en déduit que, pour tout réel

non nul x , $\lim_{A \rightarrow 0^+} \left(\int_A^1 t^{x-1} dt \right)$ existe et est finie si et seulement si x est strictement positif.

On peut donc affirmer que, pour tout réel non nul x , $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$. Au passage, pour tout réel strictement positif x , on a : $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$. De plus, si x est nul alors si A est un réel strictement positif, on a :

$$\int_A^1 t^{x-1} dt = -\ln(A)$$

et comme $\lim_{A \rightarrow 0^+} (-\ln(A)) = +\infty$, on peut affirmer que $\int_0^1 t^{x-1} dt$ diverge si x est nul. On peut donc faire un bilan global :

$$\int_0^1 t^{x-1} dt \text{ converge si et seulement si } x > 0 \text{ et vaut } \frac{1}{x}.$$

2.2) ▶ Pour tout t de $]0, \ln(2)[$, on a :

$$\frac{1}{2} \leq e^{-t} \leq \frac{3}{2}.$$

Par positivité de $t \mapsto t^{x-1}$ sur $]0, \ln(2)[$, on en déduit que pour tout t de $]0, \ln(2)[$, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{3t^{x-1}}{2}.$$

▶ Supposons x négatif. Comme $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{2}$ et $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ sont deux fonctions continues et positives sur $[0, 1]$, en utilisant le théorème de comparaison sur les intégrales généralisées à fonction positive et la divergence de $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2} dt$, conséquence de la divergence de $\int_0^1 t^{x-1} dt$ vue dans la question précédente, on peut donc affirmer que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est divergente.

▶ Supposons x strictement positif. Comme $t \mapsto \frac{3t^{x-1}}{2}$ et $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ sont deux fonctions continues et positives sur $[0, 1]$, d'après le théorème de comparaison sur les intégrales généralisées à fonction positive et la convergence de $\int_0^1 \frac{3t^{x-1}}{2} dt$, conséquence de la convergence de $\int_0^1 t^{x-1} dt$ vue dans la question précédente, on peut donc affirmer que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

On a prouvé que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

3. $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur \mathbf{R}_+^* , $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est donc une intégrale généralisée uniquement à cause des bornes 0 et de $+\infty$. Par définition,

$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si :

$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ convergent. Or, dans les questions précédentes, on a vu que : $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge pour tout réel x . On en déduit donc que $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

On a donc prouvé que Γ est définie sur \mathbf{R}_+^* .

PARTIE II — QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CETTE FONCTION

4. 4.1) La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est strictement positive continue sur \mathbf{R}^{+*} , donc $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$.

4.2) Soit x un réel strictement positif. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Par intégration par parties, possible car $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$

sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-t} t^x dt &= [-e^{-t} t^x]_a^b + x \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= e^{-a} a^x - e^{-b} b^x + x \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt. \end{aligned}$$

On réalise l'intégration par parties sur cet intervalle puisque l'intégrale est généralisée en zéro et en $+\infty$. On en déduit, comme $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ converge car x est supérieur à -1 , que :

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{-t} t^x dt &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(e^{-a} a^x - e^{-b} b^x + x \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &= -e^{-b} b^x + x \int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

puis, de nouveau car $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-b} b^x + x \int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

par somme, croissances comparée. Cela est précisément le résultat souhaité : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4.3) Comme 1 est un réel strictement positif, on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt$ converge. On a alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour tout n entier naturel non nul, on appelle $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse suivante : $\mathcal{P}(n)$: " $\Gamma(n) = (n-1)!$ ". Nous venons de voir que la propriété est vérifiée au

rang $n = 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul. En appliquant la question précédente, comme n est non nul, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)! \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= n! \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

Donc pour tout entier naturel non nul n , $\Gamma(n) = (n-1)!$.

5. On note L_1 la limite de Γ en 1, L_{0^+} la limite de Γ en 0^+ et $L_{+\infty}$ la limite de Γ en $+\infty$.
5.1) Pour tout entier naturel non nul n , on sait que $\Gamma(n) = (n-1)!$, donc par caractérisation séquentielle de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Gamma(n)) = L_{+\infty}.$$

On en déduit que : $L_{+\infty} = +\infty$.

La fonction Γ est définie en 1. On admet que Γ a une limite en 1. On sait que si une fonction est définie en un point et a une limite alors cette limite est son image. On en déduit que $L_1 = \Gamma(1)$ soit $L_1 = 1$ d'après la question précédente. Reste à présent la limite en zéro.

Pour tout réel strictement positif x , on sait que : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} (x\Gamma(x))$ existe et vaut L_1 . Si L_{0^+} est un réel alors, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} (x\Gamma(x))$ est $0 \times L_{0^+}$ soit 0. Or L_1 est non nul. On en déduit que L_{0^+} est $+\infty$ ou $-\infty$. Par positivité de Γ , on peut affirmer que $L_{0^+} = +\infty$.

5.2) Nous avons $\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1)$ pour tout $x > 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$ et (par composition) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\Gamma(x-1)) = +\infty$. Par produit, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\Gamma(x)}{x}\right) = +\infty.$$

6. 6.1) On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ vaut $\sqrt{2\pi}$. Par parité de $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ existe et vaut $\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{2}$. On a donc prouvé :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ existe et vaut } \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

6.2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. On va faire le changement de variable $y = \sqrt{2t}$ (on aura alors $t = \frac{y^2}{2}$ et $\frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{t}} = dy$), $t \mapsto \sqrt{2t}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et croissante, ce changement de variable est donc licite. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0}(\sqrt{2t}) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty}(\sqrt{2t}) = +\infty$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ converge, on sait alors que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ converge aussi et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ d'après la précédente question.} \end{aligned}$$

On a donc : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

6.3) Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous avons montré que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Mais :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} (2n - 1) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^2} (2n - 1) (2n - 3) \left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \dots = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!} \Gamma(1/2). \end{aligned}$$

On démontre donc, par récurrence, la formule suivante :

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

PARTIE III — UNE DENSITÉ DE PROBABILITÉ

7. 7.1) Comme $x \mapsto x$ ne s'annule pas \mathbf{R}^* , $f_{a,\lambda}$ est continue par produit sur \mathbf{R}^* . De

plus, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{a-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Par produit, on en déduit aisément que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_{a,\lambda}(x)) = \begin{cases} \lambda & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Comme $f_{a,\lambda}$ est nul sur \mathbf{R}_- et λ est non nul, on peut donc affirmer :

$f_{a,\lambda}$ est continue sur \mathbf{R}^* . $f_{a,\lambda}$ est continue sur \mathbf{R} si et seulement si $a > 1$.

7.2) Par produit, $f_{a,\lambda}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* . Pour tout réel strictement positif x , on a :

$$f'_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-2} \times (-\lambda x + a - 1).$$

La fonction $f_{a,\lambda}$ est donc croissante sur $\mathbf{R}_+^* \cap]0, \frac{a-1}{\lambda}[$ et décroissante sur $\mathbf{R}_+^* \cap]\frac{a-1}{\lambda}, +\infty[$.

Si $a > 1$ alors $\frac{a-1}{\lambda}$ est un réel strictement positif et le tableau de variations de $f_{a,\lambda}$ est le suivant :

x	0	$\frac{a-1}{\lambda}$	$+\infty$
$f_{a,\lambda}(x)$	0	$f_{a,\lambda}\left(\frac{a-1}{\lambda}\right)$	0

La limite en $+\infty$ a été obtenue par croissances comparées. Si maintenant $0 < a \leq 1$ alors $\frac{a-1}{\lambda}$ n'est pas un réel strictement positif et le tableau de variations de $f_{a,\lambda}$ est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f_{a,\lambda}(x)$	∞	0

La limite en $+\infty$ a été obtenue par produit.

- 8. 8.1)** On reconnaît dans ce cas une loi exponentielle de paramètre λ .
- 8.2)** Par produit, on constate que $f_{a,\lambda}$ est une fonction définie et positive sur \mathbf{R} . De plus, elle est continue sur \mathbf{R} sauf en un nombre fini de points (ici, 0 peut poser problème). Il reste à prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\lambda}(x) dx$ existe et vaut 1 pour conclure.

Le changement de variable $t = \lambda x$ est licite (et donne $dt = \lambda dx$) car $x \mapsto \lambda x$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur \mathbf{R}^+ . De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (\lambda x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} (\lambda x) = +\infty$ et $\Gamma(a)$ converge, on sait alors que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{a-1} \lambda dx$ converge aussi et :

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{a-1} \lambda dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{a-1} dx \lambda^a \end{aligned}$$

Comme $\Gamma(a)$ est non nul (car strictement positif), on obtient :

$$\frac{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{a-1} \lambda dx \lambda^a}{\Gamma(a)} = 1$$

ce qui signifie précisément que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\lambda}(x) dx$ existe et vaut 1.

$f_{a,\lambda}$ est bien une densité de probabilité.

- 8.3)** On pose $Y = \frac{\lambda}{\lambda'} X$. On note F_Y la fonction de répartition de Y et F_X celle de X .

Pour tout réel t , on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P\left(\frac{\lambda}{\lambda'} X \leq t\right) \\ &= P\left(X \leq \frac{\lambda'}{\lambda} t\right) \text{ car } \frac{\lambda'}{\lambda} > 0 \\ &= F_X\left(\frac{\lambda'}{\lambda} t\right) \end{aligned}$$

Comme X est une variable à densité, F_X est continue sur \mathbf{R} et est de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par composition, F_Y est continue sur \mathbf{R} et est de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Y est donc une variable à densité et, comme F_X est dérivable sur \mathbf{R}^* , une densité de Y est donc :

$$f_Y \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longrightarrow \end{array} \right. \begin{cases} F_Y'(t) = \frac{\lambda'}{\lambda} f_X\left(\frac{\lambda'}{\lambda} t\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Après calculs, on trouve que $\frac{\lambda'}{\lambda} X$ a pour densité $f_{a,\lambda'}$.

- 9.** Pour tout réel x , on a :

$$x f_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^a & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^a dx \lambda^{a+1}$$

et donc $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^a dx$ converge et vaut $\frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}}$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^a dx$ converge et vaut $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \times \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}}$ soit $\frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \Gamma(a)}$ soit $\frac{a}{\lambda}$. Par définition de $f_{a,\lambda}$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x) dx$ converge vers $\frac{a}{\lambda}$. Donc

X admet une espérance, qui vaut $\frac{a}{\lambda}$.

10. 10.1) Par somme et produit, $F_{a,\lambda}$ est dérivable sur \mathbf{R}^* . Pour tout réel x strictement négatif, on a :

$$\begin{aligned} F'_{a,\lambda}(x) &= 0 \\ &= F_{a,\lambda}(x). \end{aligned}$$

La fonction $F_{a,\lambda}$ est donc une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur \mathbf{R}^* . Pour l'autre cas, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} F'_{a,\lambda}(x) &= - \sum_{k=0}^{a-1} e^{-\lambda x} \left(\frac{k(\lambda x)^{k-1} \lambda}{k!} - \lambda \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \\ &= - \sum_{k=0}^{a-1} e^{-\lambda x} \left(\frac{k(\lambda x)^{k-1} \lambda}{k!} - \lambda \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^{a-1} e^{-\lambda x} \left(\frac{(\lambda x)^{k-1} \lambda}{(k-1)!} - \lambda \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) + \lambda e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Nous voyons que la somme est télescopique. Il vient :

$$F'_{a,\lambda}(x) = e^{-\lambda x} \lambda \frac{(\lambda x)^{a-1}}{(a-1)!} - \lambda e^{-\lambda x} + \lambda e^{-\lambda x} = f_{a,\lambda}(x).$$

La fonction $F_{a,\lambda}$ est donc une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur \mathbf{R}^* .

10.2) Attention, cela ne signifie pas pour autant que $F_{a,\lambda}$ est la fonction de répartition de X .

De manière générale : si $F'_{a,\lambda}(x) = f_{a,\lambda}(x)$ pour tout x sauf éventuellement en un nombre fini de points, **et** que $F_{a,\lambda}$ est la fonction de répartition de X , alors $f_{a,\lambda}$ est une densité de X et X est à densité. Mais par contre on ne sait pas encore ici que $F_{a,\lambda}$ est une fonction de répartition.

En effet, $F_{a,\lambda}$ est croissante sur \mathbf{R}^*_+ (car sa dérivée sur \mathbf{R}^*_+ est positive) et, par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} (F_{a,\lambda}(x)) = 0$ et, par somme, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F_{a,\lambda}(x)) = -1$ car, si x vaut 0, on a :

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} &= -1 - \sum_{k=1}^{a-1} \frac{0^k}{k!} \\ &= -1. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout réel strictement positif x , on a : $-1 \leq F_{a,\lambda}(x) \leq 0$. La fonction $H_{a,\lambda}$ suivante est, en revanche, la fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, H_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > t) &= \int_t^{+\infty} f_{a,\lambda}(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (F_{a,\lambda}(x)) - F_{a,\lambda}(t) \\ &= -F_{a,\lambda}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

On a donc : $\mathbf{P}(X > t) = \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.

10.3) Supposons que Z suive une loi de POISSON de paramètre λt . Comme Z est à valeur entière, on en déduit que :

$$\mathbf{P}(Z < a) = \mathbf{P}(Z = 0) + \mathbf{P}(Z = 1) + \dots + \mathbf{P}(Z = a - 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$= \mathbf{P}(X > t) \text{ d'après la question précédente.}$$

D'où le résultat.