DEVOIR MAISON # 4

à rendre le Mardi 01/02/2022

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.

Exercice 1 | Oral des Ponts 2021 – BCPST

1. Montrer que la fonction $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

est une fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Dans la suite, on se donne X une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition F.

2. Montrer que X est à densité et déterminer une densité, et son espérance si elle existe.

3. **3.1)** Soit $k \in \mathbf{N}^\star$, et $t \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{P}\left(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\right)$.

   3.2) Soit $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier la formule

$$\forall t \in]0,1[, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\right).$$

   3.3) En déduire que Y est une variable aléatoire de même loi que X.

Solution (exercice 1)

1. La fonction F est croissante, on a aussi clairement $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et F est continue sur $\mathbf{R}$ car $\frac{\ln(1+1)}{\ln(2)} = 1$, $\frac{\ln(1+0)}{\ln(2)} = 0$. Donc d'après un théorème du cours, $\boxed{\text{il existe X de sorte que } F_X = F,}$ définie sur un certain $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

2. La fonction F est continue, comme déjà dit. De plus, elle est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1. Donc X est à densité et une densité est donnée par :

$$\boxed{f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{(x+1)\ln(2)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

L'espérance existe puisque $\mathbf{P}(X \in [0,1]) = 1$. De plus, elle vaut :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)\ln(2)}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{\ln 2}\left(1 - (\ln 2 - 0)\right).$$

Donc finalement : $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1-\ln(2)}{\ln 2}.}$

3. **3.1)** Soient $k \in \mathbf{N}^\star$, et $t \in]0,1[$. Alors

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{k+t} \leqslant X \leqslant \frac{1}{k}\right) \quad \text{car } \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k+t} \in]0,1] \\ &= \frac{1}{\ln 2}\int_{\frac{1}{k+t}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+u}\,du \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(u+1)\right]_{\frac{1}{k+t}}^{\frac{1}{k}} \\ &= \boxed{\frac{1}{\ln 2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k+t}\right)\right)}. \end{aligned}$$

   3.2) Soit $t \in]0,1[$. Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements associé à $\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ qui est une variable aléatoire discrète. Comme $\mathbf{P}(X \in [0,1]) = 1$, on a $\mathbf{P}\left(\frac{1}{X} \in [1,\infty[\right) = 1$ donc $\left\{\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right\}_{k\in\mathbf{N}^\star}$ est un système complet d'évènements et on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y \leqslant t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(Y \leqslant t, \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant t+k, k \leqslant \frac{1}{X} < k+1\right) \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\right)}.\end{aligned}$$

$t \in]0,1[$, *donc* $\left\{\frac{1}{X} \leqslant t+k\right\} \subset \left\{\frac{1}{X} \leqslant 1+k\right\}$

3.3) Il s'agit donc de montrer que Y est aussi à densité et a pour densité celle de X, ou encore que $F_Y = F$. Constatons que par définition de la partie entière, $Y(\Omega) \subset [0,1[$, donc :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$F_Y(0) = \mathbf{P}(Y \leqslant 0) = \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} = 1\right) = \mathbf{P}(X = 1) = 0,$$

car X est à densité. Il ne reste donc plus qu'à calculer $F_Y(t)$ pour tout $t \in]0,1[$. D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\mathbf{P}(Y \leqslant t) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k+t}\right)\right).$$

Cette série — qui a l'air franchement compliquée — ne fait intervenir que des termes téléscopiques. Commençons par réarranger un peu l'expression :

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k+t}\right) &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+t}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(k+t)(k+1)}{k(k+t+1)}\right) \\ &= \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) + \left(\ln(k+t) - \ln(k+t+1)\right).\end{aligned}$$

Soit maintenant $N \in \mathbf{N}^\star$, on obtient par téléscopage :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N} \left(\left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) + \left(\ln(k+t) - \ln(k+t+1)\right)\right) \\ &= \ln(N+1) + \ln(1+t) - \ln(N+t+1) \\ &= \ln\left(\frac{N+1}{N+t+1}\right) + \ln(1+t).\end{aligned}$$

En faisant $N \to \infty$, on déduit que

$$\forall t \in]0,1[, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\right) = \frac{\ln(1+t)}{\ln(2)}.$$

Comme $F_Y = F_X$, on déduit que $\boxed{\text{Y a même loi que X.}}$

Exercice 2 | On considère l'application $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0,+\infty[$, par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n \,dt, \quad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n \,dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n \,dt.$$

Partie I — Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0,+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.

2. **2.1)** Montrer que φ est strictement positive sur $[0,1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

2.2) Établir, pour tout réel $t \in]0,\infty[$: $\left|\varphi(t)\right| < 1$.

3. **3.1)** Montrer, pour tout réel $t \in [0,+\infty[$: $\varphi(t) \geqslant 1-t$. *Indication : On pourra étudier les variations sur* $[0,+\infty[$ *de l'application* $t \mapsto \sin t - t + t^2$.

3.2) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, que : $\mathrm{J}_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la nature de la série de terme général J_n, $n \geqslant 1$.

Partie II — Étude de I_1

4. **4.1)** Montrer, pour tout réel $x \in [1,\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4.2) En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

5. **5.1)** Montrer, pour tout réel $t \in [0,+\infty[$: $|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t))$.

5.2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5.3) Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

On a donc prouvé que I_1 *est une intégrale semi-convergente.*

Solution (exercice 2) ....

1. La fonction φ est clairement continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par quotient de telles fonctions dont le dénominateur est non nul. D'après un équivalent classique du cours, $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 1$, donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbf{R}^+.}$
Soit $n \geqslant 1$. Par opérations sur les fonctions continues, la fonction φ^n est également continue sur le segment $]0,1]$ donc $\boxed{\mathrm{J}_n \text{ existe.}}$

2. **2.1)** Soit $t \in [0,1]$, alors $\sin(t) > 0$ puisque $]0,1[\subset \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel le sinus ne s'annule pas, et en $t=0$ la fonction vaut 1. Donc $\boxed{\varphi > 0 \text{ sur } [0,1]}$.
Et pour tout $t \in [0,1]$,

$$\varphi'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos(t)\cdot(t-\tan t)}{t^2}.$$

Le signe de la dérivée est donc celui de $h : t \in [0,1] \longmapsto t - \tan t$. La fonction h est dérivable, et pour tout $t \in [0,1]$, $h'(t) = 1-(1+\tan^2(t)) = -\tan^2(t) \leqslant 0$ donc h est décroissante, et donc $h(t) \leqslant h(0) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et ne s'annule qu'en $t=0$. Ainsi φ' est strictement négative, et nulle uniquement en $t=0$, donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$

2.2) Soit $t \in]0,\infty[$. Alors si $t \in [0,1]$, en utilisant la stricte monotonie précédente, on voit que

$$-1 < \varphi(1) = \sin(1)\varphi(t) < \varphi(0) = 1.$$

Soit maintenant $t > 1$. Alors $\left|\varphi(t)\right| \leqslant \frac{1}{t} < 1$ car $t > 1$. Donc finalement $\boxed{\left|\varphi(t)\right| < 1}$ pour tout $t > 0$.

3. **3.1)** Soit $t \in [0,+\infty[$. Notons g la fonction auxiliaire donnée en indication. Elle est clairement dérivable en tant que somme de telles fonctions, et $g'(t) = \cos t - 1 + 2t$, $g''(t) = -\sin(t)+2 \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Donc g' est croissante, et $g'(t) \geqslant g'(0) = 0$, d'où $\boxed{g \text{ est croissante}}$ elle aussi et comme $g(0) = 0$ on déduit que g positive sur $\mathbf{R}^+$. Revenons à nos moutons, l'inégalité est clairement vérifiée pour $t=0$ et pour $t \neq 0$ elle est équivalente à $g(t) \geqslant 0$, ce que l'on vient de démontrer. Donc : $\boxed{\varphi(t) \geqslant 1-t}$.

3.2) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. En intégrant l'inégalité établie dans la question précédente, on déduit que :

$$\mathrm{J}_n \geqslant \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

Partie I — Étude de I_1

4. **4.1)** Soit $x \in [1,\infty[$, alors puisque les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $-\cos$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, on déduit par intégration par parties que

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - (-1)\int_1^x \frac{-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'où après calcul du terme de crochet :

$$\boxed{\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

4.2) Puisque pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et que $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, on déduit par théorème de comparaison que $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (on a notamment utilisé que la convergence absolue entraîne la convergence). Donc $\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Par ailleurs la somme des deux premiers termes tend vers $\cos(1)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{K}_1 \text{ converge}}$. Mais comme J_1 converge d'après la première question, par définition de l'intégrale, $\boxed{\mathrm{I}_1 \text{ converge aussi}}$.

5. 5.1) Soit $t \in [0, +\infty[$. Commençons par prouver l'indication, il s'agit dans un premier temps de se débarrasser de la valeur absolue. Faisons donc deux cas.

- Si $\sin(t) \in [0,1]$, alors l'inégalité est équivalente à $\sin(t) \geqslant \sin^2(t)$ qui est vraie puisque le carré d'un réel entre 0 et 1 est inférieur à ce réel.
- Si $\sin(t) \in [-1,0]$, alors l'inégalité est équivalente à $-\sin(t) \geqslant \sin^2(t)$ c'est-à-dire $\sin(t)(\sin(t)+1) \leqslant 0$ ce qui est bien le cas puisque $\sin(t)+1 \geqslant 0$.

Donc par formule de linéarisation, on déduit que

$$\boxed{\forall t \in [0,\infty[, \quad |\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)).}$$

5.2) Par changement de variable $u = 2t$, licite puisque $t \longmapsto 2t$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante, on déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ a même nature que $\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$. Pour étudier cette dernière intégrale, on utilise la même méthode qu'au début de la partie. Soit $x > 2$, par intégration par parties puisque les fonctions sin et $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\int_2^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Le terme de crochet converge vers $\frac{-\sin 2}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on montre comme avant que $\int_2^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge vers une limite finie lorsque $x \to \infty$, puis l'intégrale associée converge absolument.

Donc : $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

5.3) Pour tout $t > 0$, on a :

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \geqslant 0.$$

Il suffit de montrer que $\int_1^\infty \left(\frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}\right)\mathrm{d}t$ diverge, le théorème de comparaison permettra alors de conclure. Soit $\mathrm{A} > 1$, alors

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}[\ln t]_1^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{A}) \xrightarrow{\mathrm{A}\to\infty} \infty.$$

Donc comme $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge, et d'après la question précédente, $\int_1^\infty \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$, donc par différence $\boxed{\mathrm{I}_1 \text{ diverge.}}$