

DEVOIR SURVEILLÉ # 4

le Samedi 15/01/2022, 8h → 10h



Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.



Problème 1 D'après A-ENV 2014 Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Nous considérons la fonction f définie sur \mathbf{R}^{+*} par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

PARTIE I — ÉTUDE DE LA FONCTION f .

1. Considérons la fonction g définie sur \mathbf{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

- 1.1) Étudier les variations de g sur \mathbf{R}_+^* et donner son tableau de variations sur \mathbf{R}_+^* .
 - 1.2) Montrer que l'équation $g(x) = 0, x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution, notée α dans la suite.
 - 1.3) En déduire le tableau de signe de g sur \mathbf{R}_+^* .
2. Étudier les variations de f sur \mathbf{R}_+^* et dresser son tableau de variations sur \mathbf{R}_+^* .

PARTIE II — ÉTUDE DE LA PRIMITIVE DE f SUR \mathbf{R}_+^* QUI S'ANNULE EN 1 Dans la suite, la notation F désigne la primitive de f sur \mathbf{R}_+^* qui s'annule en 1, i.e. :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

3. Étudier les variations de F sur \mathbf{R}_+^* et dresser son tableau de variations sur \mathbf{R}_+^* .

4. On souhaite étudier la limite de F en 0.

4.1) Considérons la fonction u définie sur \mathbf{R}_+^* par $u(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que u est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, u désigne encore la fonction ainsi prolongée en 0, c'est désormais une fonction définie et continue sur \mathbf{R}_+^* .

4.2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x u(t) dt.$$

4.3) En déduire que F admet une limite finie en 0 et que cette limite en 0 est égale à $\int_0^1 u(t) dt$.

On décide alors de prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = \int_0^1 u(t) dt$. La fonction F est alors définie et continue sur \mathbf{R}^+ .

5. On souhaite calculer une valeur approchée de $F(0)$.

5.1) Soient $x \in \mathbf{R}_+^*, k \in \mathbf{N}$. Calculer

$$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt.$$

5.2) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

5.3) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt.$$

En déduire que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x).$$

5.4) En déduire que :

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Que dire de la nature de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$? Converge-t-elle absolument ?

5.5) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n peut-on affirmer que

$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$, $n \in \mathbf{N}$ est une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-4} près ?

5.6)  Écrire alors une fonction Python qui calcule une valeur approchée de $F(0)$ à ϵ près, ϵ étant un réel strictement positif en paramètre de fonction.

6. On souhaite dans cette question étudier la dérivabilité de F en 0.

6.1) Déterminer la limite de F' en 0.

6.2) Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de F en 0 ? Interpréter géométriquement ce résultat .

7. On souhaite dans cette question étudier la limite de F en $+\infty$.

7.1) Montrer par changement de variable que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x).$$

7.2) En déduire la limite de F en $+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

8. Esquisser la courbe représentative de F .

Solution (problème 1)

1. Considérons la fonction g définie sur \mathbf{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

1.1) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors g est dérivable en x comme somme produit de telles fonctions et

$$g'(x) = 2x - 4x \ln(x) - 2x = -4x \ln(x).$$

Donc on déduit le tableau de variations de g .

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	1	2	$-\infty$

La limite obtenue en zéro est obtenue par croissances comparées. En $+\infty$:

$$g(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln(x) \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty.$$

1.2) Montrons que l'équation $g(x) = 0, x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution, notée α dans la suite. Il s'agit d'une application du théorème de la bijection puisque l'on souhaite de l'unicité. La fonction g est continue, et $g([1, \infty[) =]-\infty, 2] \ni 0$, est strictement monotone sur $[1, \infty[$ donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique $\alpha \in [1, \infty[$ de sorte que $g(\alpha) = 0$. Par ailleurs, $g([0, 1]) =]1, 2[$ donc g ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Donc l'équation $g(x) = 0, x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

1.3)

2. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Alors f est dérivable en x comme somme produit de telles fonctions, et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln(x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) - \ln(x)(2x^2)}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

Donc le signe de f' est celui de g , on obtient alors le tableau de variations. Les limites obtenues sont obtenues par propriétés sur les limites usuelles.

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

La limite en $+\infty$ est obtenue par croissances comparées.

PARTIE I — ÉTUDE DE LA PRIMITIVE DE f SUR \mathbf{R}_+^* QUI S'ANNULE EN 1

3. La fonction F est par définition dérivable et $F' = f$. Il faut donc chercher le signe de f . On sait que $\alpha \geq 1$ donc $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{1+\alpha^2} \geq 0$, et par ailleurs $f(1) = 0$. Donc f est négative sur $]0, 1]$, positive sur $[1, \infty[$. On déduit alors le tableau de variations de F .

x	0	1	$+\infty$
$F(x)$	$\lim_0 F$	0	$\lim_\infty F$

On ne cherche pas à calculer les limites, puisque cela est l'objet de la suite du problème.

4. On souhaite étudier la limite de F en 0.

- 4.1) La fonction u est prolongeable par continuité en 0 puisque $\arctan(x) \sim x$ donc $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. On prolonge donc u en posant $u(0) = 1$.

- 4.2) Faisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \\
 &= - \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt + [\arctan t \cdot \ln(t)]_1^x \quad \left. \begin{array}{l} t \rightarrow \ln t, t \rightarrow \arctan t \text{ sont } \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \\
 &= \boxed{\arctan(x) \ln(x) - \int_1^x u(t) dt.}
 \end{aligned}$$

- 4.3) On sait que $\arctan(x) \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissances comparées. De plus, puisque u est continue sur \mathbf{R}^+ , la fonction $x \mapsto \int_1^x u$ est dérivable donc continue, et $-\int_1^x u \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\int_1^0 u = \int_0^1 u$. Donc :

$$\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 u(t) dt.}$$

5. On souhaite calculer une valeur approchée de $F(0)$.

- 5.1) Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$, $k \in \mathbf{N}$. Alors l'intégrale I_k se calcule par intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned}
 I_k(x) &= \int_1^x t^k \ln(t) dt, \\
 &= - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{t(k+1)} dt + \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \cdot \ln(t) \right]_1^x \quad \left. \begin{array}{l} t \rightarrow \ln t, t \rightarrow \frac{t^{k+1}}{k+1} \text{ sont } \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \\
 &= - \frac{1}{k+1} \int_1^x t^k dt + \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \ln(x) \right] \\
 &= - \frac{1}{(k+1)^2} (x^{k+1} - 1) + \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \ln(x).
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{I_k(x) = \frac{1}{(k+1)^2} (1 - x^{k+1}) + \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \ln(x).}$$

5.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut par exemple partir de la formule de sommation de termes géométriques. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} &= \sum_{k=0}^n (-t^2)^k \\ &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -t^2 \neq 1 \\ &= \frac{1}{1 + t^2} - (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Donc en réarrangeant les termes, on déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{1 + t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2}.$$

5.3) Intégrons la question précédente entre 1 et x , après avoir multiplié par le logarithme.

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \int_x^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \ln t t^{2k} \right) dt + (-1)^{n+1} \int_x^1 \frac{\ln t \cdot t^{2n+2}}{1 + t^2} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} dt.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| &\leq \left| \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} dt \right| \\ &\leq \int_x^1 \left| \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} \right| dt \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{car } x \in]0, 1[\\ &= \int_x^1 \frac{t^{2n+2} |\ln(t)|}{1 + t^2} dt \\ &\leq \int_x^1 t^{2n+2} (-\ln(t)) dt = \int_1^x t^{2n+2} \ln(t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x).$$

5.4) Faisons ensuite tendre x vers zéro. On sait que la valeur absolue est continue, on peut donc inverser valeur absolue et symbole limite. De plus, par croissances comparées, on voit que pour tout $k \geq 0$,

$$I_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Et F admet une limite en zéro puisque nous l'avons prolongée. On peut donc enfin passer à la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x) = \left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} I_{2n+2}(x),$$

soit :

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Par le théorème d'encadrement, on déduit alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = F(0).$$

D'où la convergence de la série. De plus, elle converge absolument car

$$\forall k \geq 0, \quad \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{4k^2}.$$

Or, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, donc la convergence absolue découle par théorème de comparaison.

5.5) Pour les n de sorte que $\frac{1}{(2n+3)^2} \leq 10^{-4}$. On peut ensuite résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n+3)^2} \leq 10^{-4} &\iff (2n+3)^2 \geq 10^4 \\ &\iff 2n+3 \geq 10^2 \\ &\iff n \geq \frac{10^2-3}{2} \\ &\iff n \geq \left\lfloor \frac{10^2-3}{2} \right\rfloor + 1 = 49. \end{aligned}$$

5.6) ➤ On peut soit dire que, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{49} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \quad \text{convient,}$$

soit utiliser une boucle **while**, j'opte pour la seconde solution.

```
def calcul_F_zero(eps):
    n = 0
    S = 1
    while 1/(2*n+3)**2 > eps:
        n += 1
        S += (-1)**n/(2*n+1)**2
    return S
```

On déduit alors

```
>>> calcul_F_zero(10**(-4))
0.9159156091647405
```

6. On souhaite dans cette question étudier la dérivabilité de F en 0.

6.1) On a $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

6.2) Si F était dérivable en zéro, on aurait nécessairement

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F'(x).$$

En effet, si une fonction est définie en un point et admet une limite finie en ce point, alors la limite vaut la valeur de la fonction en ce point (voir le chapitre sur les limites, propriété dont on se sert assez peu souvent, mais là oui...). On aurait alors $F'(0) = -\infty$ — contradiction. Donc

F n'est pas dérivable en zéro.

Géométriquement, $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = -\infty$ signifie que l'on aura une pente infinie donc une tangente verticale en zéro.

7. On souhaite dans cette question étudier la limite de F en $+\infty$.

7.1) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt \\ &= - \int_{1/1}^t \frac{-\ln u}{1+1/u^2} \frac{1}{u^2} du \quad \left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{t}, \text{ car } t \mapsto 1/t \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \\ &= \int_1^t \frac{\ln u}{1+u^2} du \\ &= F(x). \end{aligned}$$

7.2) Par composition des limites, F admet une limite en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = F(0).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(0) = \int_0^1 u$.

8. Esquissons la courbe représentative de F . Ci-dessous, la courbe est obtenue à l'aide de la méthode des rectangles et de Python.

