

CONCOURS BLANC – DEVOIR S. # 5

le Jeudi 06/01/2022, 13h30 → 16h



Épreuve de format «**Calculs & Raisonnements**» du concours A-ENV.



Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.



Problème 1 Diffusion aléatoire sur le cercle Ce problème est constitué de trois parties. Dans la partie I, on démontre des résultats qui pourront être utilisés dans la partie II. La partie III est indépendante des deux autres.

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère un repère orthonormal du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) et le cercle unité \mathcal{C} sur lequel on place dans le sens trigonométrique p points équidistants A_0, \dots, A_{p-1} tels que A_0 soit d'affixe 1.

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, A_k est le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$. Pour $p = 3$, on a la représentation suivante :

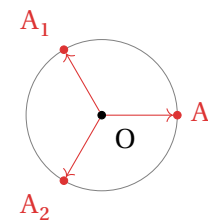


FIG. 1. : Cercle unité avec les points A_0, A_1, A_2

Partie I — Résultats préliminaires

1. On considère la matrice $D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$. C'est donc une matrice de format $p \times p$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux sur la surdiagonale qui sont égaux à 1, et le coefficient tout en bas à gauche, égal à 1 lui aussi.

1.1) Inverser les matrices D_3 et D_4 .

1.2) Prouver que la matrice D_p est inversible et donner son inverse. On pourra utiliser les résultats de la question précédente pour conjecturer l'inverse de D_p .

2. Soit $f : \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^p x_k$.

2.1) Prouver que f est une application \mathbb{C} -linéaire, i.e. linéaire lorsque $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est considéré comme un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

2.2) La fonction f est-elle injective?

2.3) La fonction f est-elle surjective?

2.4) Déterminer la dimension du noyau de f .

3. Calculez $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k$. Interprétez géométriquement le résultat obtenu.

4. Soit z un complexe non nul. Prouver que : $z^p = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$. On pourra mettre z sous forme exponentielle ou trigonométrique.

On admettra que l'équation $z^p = 1$ possède p solutions distinctes : z_0, z_1, \dots, z_{p-1} .

Partie II — Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

On considère l'expérience suivante : une particule est libre de se déplacer parmi les p points A_0, A_1, \dots, A_{p-1} . Initialement la particule se situe sur le point A_0 et, à chaque

étape, on choisit de façon équiprobable de la déplacer vers l'un de ses deux plus proches voisins.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note U_n la variable aléatoire réelle à valeurs dans $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et telle que l'emplacement occupé à l'étape n soit A_{U_n} . La variable aléatoire U_0 est donc constante égale à 0 et la variable aléatoire U_1 est égale à 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et à $p-1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$. La variable U_2 est à valeurs dans $\{2, 0, p-2\}$ et $\mathbf{P}(U_2 = 2) = \mathbf{P}(U_2 = p-2) = \frac{1}{4}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(U_n = 0) \\ \mathbf{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix}.$$

5. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier n , on a :

$$X_{n+1} = M_p X_n, \quad \text{où} \quad M_p = \frac{1}{2} (D_p + {}^T D_p).$$

6. Soit n un entier. Donner sans justifications l'expression de X_n en fonction de la matrice M_p et de n .

7. On suppose ici que $p = 3$, on a alors $M_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.1) Prouver que la matrice M_3 est diagonalisable et donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $M_3 = PDP^{-1}$.

7.2) Déterminer P^{-1} .

7.3) Soit $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Déterminer la limite de $\mathbf{P}(U_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez le résultat obtenu.

8. On revient à présent au cas général. Déterminer les valeurs propres complexes de D_p et les espaces propres associés. *Indication* : On pourra revenir à la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.

9. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathfrak{M}_p(\mathbf{C})$ inversible tel que

$$D_p = Q \cdot \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$$

et que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, le sous-espace propre de D_p associé à la valeur propre z_k est inclus dans le noyau de f .

On suppose dans toute la suite du sujet, que **p est impair**. Il existe donc un entier q non nul tel que $p = 2q + 1$.

10. Montrer que la matrice M_p est diagonalisable dans \mathbf{C} , en se souvenant que ${}^T D_p = D_p^{-1}$, et que les valeurs propres de M_p sont les $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ avec $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

11. Prouver que 1 est valeur propre de M_p et que l'espace propre associé que l'on notera G_0 est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base.

12. Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Prouver que l'espace propre associé à la valeur propre $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$, que l'on notera G_k , est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension 2 inclus dans le noyau de f .

13. Soit $V \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{C})$.

13.1) Prouver qu'il existe un unique $(V_0, V_1, \dots, V_q) \in G_0 \times G_1 \times \dots \times G_q$ tel que

$$V = \sum_{k=0}^q V_k.$$

13.2) Montrer que

$$V_0 = \frac{f(V)}{p} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 14. 14.1)** Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n$.
- 14.2)** En déduire, pour tout $\ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la limite de $\mathbf{P}(U_n = \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 14.3)** Interprétez le résultat obtenu.

■ Partie III — Étude d'une variable aléatoire

- 15.** On considère la fonction cotan qui à un réel x associe $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
- 15.1)** Déterminer l'ensemble de définition D de cotan.
- 15.2)** En remarquant que pour tout $x \in D$, on a $\cotan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, tracer, sans justifications, son graphe sur $[-2\pi; 2\pi] \cap D$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on note B_k le point d'intersection de la droite (A_0A_k) avec la droite d'équation $x = -1$.

- 16.** Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, montrer que l'ordonnée de B_k est $2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$.

On considère une variable W_p suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $Z_p = 2 \cotan\left(\frac{W_p\pi}{p}\right)$.

- 17.** Calculer l'espérance de Z_3 et l'espérance de $|Z_3|$.
- 18.** Déterminer l'espérance de Z_p . Interpréter. *On pourra utiliser que pour tout $x \in D$, on a $\cotan(x) = -\cotan(\pi - x)$.*

CORRECTION

Solution (problème 1)

Partie I — Résultats préliminaires

1. 1.1) On calcule les inverses par l'une des méthodes vues en cours; on trouve :

$$D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2) D'après la question précédente, on peut conjecturer que D_p est inversible et que son inverse est sa transposée, que l'on notera ${}^T D_p$. On prouve la conjecture en calculant le produit $D_p {}^T D_p$. Soit $A = D_p {}^T D_p = (a_{i,j})_{i,j}$. Le coefficient $a_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit (matriciel) de la ligne i de D_p par la colonne j de ${}^T D_p$, dont les coefficients sont ceux de la ligne j de D_p . Or chaque ligne de D_p ne comporte qu'un seul 1, qui se trouve en position $i + 1$ pour la ligne i (position 1 pour la ligne p); le 1 de la ligne i est donc dans la même position que celui de la ligne j si et seulement si $i = j$, donc $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Ceci prouve que $A = I_n$, ce qui montre que

D_p est inversible d'inverse ${}^T D_p$.

2. 2.1) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x'_1 \\ \vdots \\ \lambda x_p + \mu x'_p \end{pmatrix}$ d'où :

$$f(\lambda X + \mu X') = \sum_{k=1}^p (\lambda x_k + \mu x'_k) = \lambda \sum_{k=1}^p x_k + \mu \sum_{k=1}^p x'_k = \lambda f(X) + \mu f(X'),$$

ce qui prouve que f est une application \mathbb{C} -linéaire.

2.2) La fonction f n'est pas injective car par exemple $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$, donc le noyau de f contient un vecteur non nul.

2.3) La fonction f est surjective : soit $x \in \mathbb{C}$, cet élément de l'espace d'arrivée a pour antécédent par f par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.4) La dimension de \mathbb{C} comme \mathbb{C} -espace vectoriel est 1, donc le rang de f vaut 1 puisqu'elle est surjective, et donc d'après le théorème du rang, la dimension de son noyau est $\dim \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{C}) - 1 = p - 1$.

3. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, puisque $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^k$. On en déduit :

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k = \frac{1}{p} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^p}{1 - e^{\frac{2i\pi}{p}}} = 0.$$

Géométriquement, $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k$ est l'affixe de l'isobarycentre des points A_0, \dots, A_{p-1} , et on a trouvé que cet isobarycentre est le centre O du cercle sur lequel sont placés ces points.

4. Soit z un complexe non nul; on peut l'écrire $z = r e^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel quelconque. On a alors :

$$\begin{aligned} z^p = 1 &\iff r^p e^{ip\theta} = 1 \\ &\iff \begin{cases} r^p = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, p\theta = 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{p} \end{cases}. \end{aligned}$$

Partie II — Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

5. Il s'agit de relier la loi de U_{n+1} à celle de U_n . On va utiliser le système complet d'événements $\{(U_n = k)\}_{k \in [0, p-1]}$ et la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{P}(U_{n+1} = i | U_n = j) \times \mathbf{P}(U_n = j)$$

Ceci montre qu'on a bien une formule du type $X_{n+1} = M \cdot X_n$, où M est la matrice carrée dont les coefficients sont les $\mathbf{P}(U_{n+1} = i | U_n = j)$. Il reste à calculer ces probabilités. Lorsque la particule se trouve en A_j , elle ne peut se déplacer que vers A_{j+1} ou A_{j-1} (en notant $A_p = A_0$ et $A_{-1} = A_{p-1}$), et ceci avec probabilité $1/2$. Plusieurs cas sont possibles en fonction de si on se trouve sur le bord du cercle ou pas.

► si $i = 0$,

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = 0 | U_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(U_{n+1} = 0 | U_n = p-1) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = 0 | U_n = j) = 0, \quad \text{si } j \neq 1, p-1.$$

► si $i = p-1$,

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = p-1 | U_n = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(U_{n+1} = p-1 | U_n = p-2) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = p-1 | U_n = j) = 0, \quad \text{si } j \neq 0, p-2.$$

► si $i \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = i | U_n = i-1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(U_{n+1} = i | U_n = i+1) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(U_{n+1} = 0 | U_n = j) = 0, \quad \text{si } j \neq i-1, i+1.$$

On a ainsi obtenu la matrice qui a des $1/2$ sur la surdiagonale, la sousdiagonale, et les coins en haut à droite et en bas à gauche, et des 0 partout ailleurs. On reconnaît :

$$M_p = \frac{1}{2}(D_p + {}^T D_p), \quad X_{n+1} = M_p X_n.$$

6. On a : $X_n = M_p^n \cdot X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. L'énoncé ne le demande pas, mais on pourrait prouver cette formule par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

7. 7.1) On voit tout de suite que M_3 est diagonalisable car elle est symétrique à coefficients réels, mais cela ne dispense pas du calcul. On cherche donc les

valeurs propres de M_3 .

$$M_3 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim_{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright L_i \leftarrow 2L_i, \forall i \\ \curvearrowright L_1 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$\sim_{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \curvearrowright L_2 \leftarrow L_2 + (2\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\sim_{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -(2\lambda+1) & 1+2\lambda \\ 0 & 1+2\lambda & (1+2\lambda)(1-2\lambda) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\sim_{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -(2\lambda+1) & 1+2\lambda \\ 0 & 0 & 2(1+2\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{Spec}(M_3) = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$. On peut ensuite calculer les espaces propres, on obtient :

$$E_1(M_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1/2}(M_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $2 + 1 = 3$, la matrice M_3 est diagonalisable est

$$M_3 = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.2) Après calculs, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3) D'après la question 6), $X_n = M_p^n X_0$. On a :

$$\begin{aligned} M_3^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} \quad \text{récurrence sur } n \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(-1/2)^n & -(-1/2)^n & 1 \\ (-1/2)^n & 0 & 1 \\ 0 & (-1/2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n = k) = \frac{1}{3}.$$

Les trois positions tendent à devenir équiprobables lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

8. On revient, comme indiqué, à la définition de valeur propre. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vec-

teur et λ un complexe. On a :

$$D_p X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_p = \lambda x_{p-1} \\ x_1 = \lambda x_p \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_p = \lambda^{p-1} x_1 \\ x_1 = \lambda^p x_1 \end{cases}.$$

Le système est alors équivalent à

$$X = 0 \text{ ou } \lambda^p = 1 \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-1} x_1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc les complexes λ tels que $\lambda^p = 1$, donc les p -ièmes de l'unité (cf. les solutions obtenues dans la question 4) qui sont au nombre de p et sont distinctes. Et l'espace propre E_λ associé à un tel λ est de dimension 1 et engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix}$.

$$\text{Spec } M = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{p}}, k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \right\}, \quad \forall \lambda \in \text{Spec } M, E_\lambda(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix}.$$

En utilisant les notations de l'énoncé, $\text{Spec } M = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}\}$.

9. La somme des dimensions des espaces propres de D_p vaut p , donc la matrice D_p est diagonalisable et on obtient la formule annoncée en prenant pour Q la matrice obtenue en plaçant en colonne des vecteurs engendrant les espaces propres dans l'ordre des valeurs propres de la matrice diagonale, c'est-à-dire z_0, z_1, \dots, z_{p-1} . On peut donc prendre :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & \dots & z_{p-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \dots & \dots & z_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ z_0^{p-1} & z_1^{p-1} & \dots & \dots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre de D_p associé à la valeur propre z_k est $E_{z_k} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}$, et

il suffit de vérifier que l'image par f de ce vecteur vaut 0; par linéarité de f , tous leurs multiples seront alors aussi dans le noyau de f . On a, pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{p-1} z_k^i \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix} = \frac{1 - z_k^p}{1 - z_k} \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix} = 0, \quad k \neq 0$$

On a donc bien $E_{z_k} \subset \ker f$ pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

10. Notons Δ_p la matrice diagonale de la question 9 : $D_p = Q\Delta_p Q^{-1}$. Elle est inversible car elle est diagonale et n'a pas de 0 sur sa diagonale, donc

$$D_p^{-1} = (Q^{-1})^{-1} \Delta_p^{-1} Q^{-1} = Q \Delta_p^{-1} Q^{-1}$$

est donc également diagonalisable. D'où :

$$M_p = \frac{1}{2} Q (\Delta_p + \Delta_p^{-1}) Q^{-1} = \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_1 + \frac{1}{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

La matrice M_p est donc diagonalisable, dans la même base que D_p , et ses valeurs propres sont les $\frac{1}{2} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right)$ pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. On peut remarquer que ces valeurs propres sont en fait réelles (comme attendu d'après le théorème spectral, puisque M_p est symétrique réelle) :

$$\frac{1}{2} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2ik\pi}{p}} + e^{-\frac{2ik\pi}{p}} \right) = \cos \left(\frac{2k\pi}{p} \right).$$

11. Pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a : $\cos \left(\frac{2k\pi}{p} \right) = 1 \iff k = 0$. Donc 1 est bien valeur propre de M_p , et n'apparaît qu'une seule fois sur la diagonale de Δ_p , en première position, donc l'espace propre correspondant est engendré par la première colonne de Q , c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$E_1(M_p) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. En tenant compte du fait que p est impair, on a envie (au vu de la question) de prouver que cette valeur $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ apparaît exactement deux fois sur la diagonale de Δ_p . La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$ puis croissante sur $[\pi, 2\pi]$. Lorsque k varie de 1 à $p-1 = 2q$, l'angle $\frac{2k\pi}{2q+1}$ augmente, il est inférieur à π jusqu'à $k = q$ puis supérieur à π pour k entre $q+1$ et $2q$. Les $\cos\left(\frac{2k\pi}{2q+1}\right)$ forment donc une suite strictement décroissante pour k variant de 1 à q , puis strictement croissante pour k entre $q+1$ et $2q$. En particulier ces q premiers cosinus sont tous distincts. On va de plus montrer que les cosinus suivants prennent en fait les mêmes valeurs que les q premiers cosinus : en effet, d'après la formule $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$, on a $\cos\left(\frac{2k\pi}{2q+1}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{2q+1}\right) = \cos\left(\frac{2(2q+1-k)\pi}{2q+1}\right)$. Lorsque k augmente de 1 à q , $2q+1-k$ diminue de $2q$ à $q+1$. Chaque valeur de la diagonale de Δ_p , sauf la première, est donc présente deux fois, de façon symétrique : $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}}\right)$, $\frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{2}\left(z_{p-2} + \frac{1}{z_{p-2}}\right)$, etc... Et de plus ces q valeurs sont distinctes entre elles.

L'espace propre G_k est donc de dimension 2 : on vient de voir qu'il est de dimension supérieure ou égale à 2 puisqu'il contient deux vecteurs indépendants, associés aux valeurs propres distinctes z_k et z_{p-k} de D_p ; et comme la somme des dimensions des espaces G_k pour k entre 1 et q vaut $2q+1 - \dim(G_0) = 2q$, aucun ne peut être de dimension strictement supérieure à 2.

Il est engendré par les deux colonnes correspondantes de Q , c'est-à-dire les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ z_{p-k} \\ z_{p-k}^2 \\ \vdots \\ z_{p-k}^{p-1} \end{pmatrix}, \text{ i.e.}$$

$$G_k = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ z_{p-k} \\ z_{p-k}^2 \\ \vdots \\ z_{p-k}^{p-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

On a vu (d'après 9) que ces vecteurs sont bien dans le noyau de f , donc tous les

vecteurs de G_k y sont aussi car ce sont des combinaisons linéaires de ces deux-là et f est linéaire.

13. 13.1) On va prouver l'existence puis l'unicité.

- ▶ Notons C_j les colonnes de Q , pour $j \in \llbracket 0, 2q \rrbracket$. La famille (C_j) forme une base de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ d'après le cours, donc V peut s'écrire (de façon unique) $V = \sum_{j=0}^{2q} v_j C_j$. En posant $V_0 = v_0 C_0$, $V_1 = v_1 C_1 + v_{2q} C_{2q}, \dots, V_q = v_q C_q + v_{q+1} C_{q+1}$, on a l'existence des vecteurs V_k demandés.
- ▶ Supposons maintenant que $V = \sum_{k=0}^q V_k = \sum_{k=0}^q W_k$ avec $(V_0, \dots, V_q) \in G_0 \times \dots \times G_q$ et $(W_0, \dots, W_q) \in G_0 \times \dots \times G_q$. On fait la différence : $\sum_{k=0}^q (V_k - W_k) = 0$. Or les vecteurs $V_k - W_k$ sont dans des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, donc ceux qui sont non nuls forment une famille libre d'après un théorème du cours. Donc nécessairement tous ces vecteurs sont nuls, d'où :

$$\forall k \in \llbracket 0, q \rrbracket, \quad V_k = W_k.$$

On a donc établi l'existence et l'unicité des V_i comme dans la question.

13.2) Nous avons, avec les notations de la question précédente :

$$V = V_0 + \sum_{k=1}^q V_k.$$

Mais, puisque f est linéaire, on déduit :

$$f(V) = f(V_0) + \sum_{k=1}^q f(V_k).$$

Or, d'après une question précédente, les $V_k, k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ sont dans $\ker f$, donc

$$f(V) = f(V_0).$$

Mais puisque $V_0 \in G_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $V_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, par définition de f :

$$f(V) = f(V_0) = \lambda f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda p \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{f(V)}{p}.$$

D'où l'on tire alors la formule

$$V_0 = \frac{1}{p} f(V) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14. 14.1) Cette limite vaut 0 car avec les hypothèses sur k , l'angle $\frac{2k\pi}{p}$ est strictement compris entre 0 et π , et donc son cosinus est strictement compris entre -1 et 1.

14.2) Appliquons les résultats de la question précédente à $V = X_0$. On écrit $X_0 = \sum_{k=0}^q V_k$ avec $V_i \in G_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, q \rrbracket$. Les V_k sont des vecteurs propres de M_p , donc

$$M_p^n X_0 = \sum_{k=0}^q M_p^n V_k = V_0 + \sum_{k=1}^q \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n V_k,$$

qui tend vers V_0 quand n tend vers $+\infty$, puisque les coordonnées de tous les autres vecteurs apparaissant dans la somme tendent vers zéro. On a calculé V_0 à la question 13.2 : $f(X_0) = 1$ donc V_0 est la colonne dont tous les coefficients sont égaux à $1/p$. Ainsi :

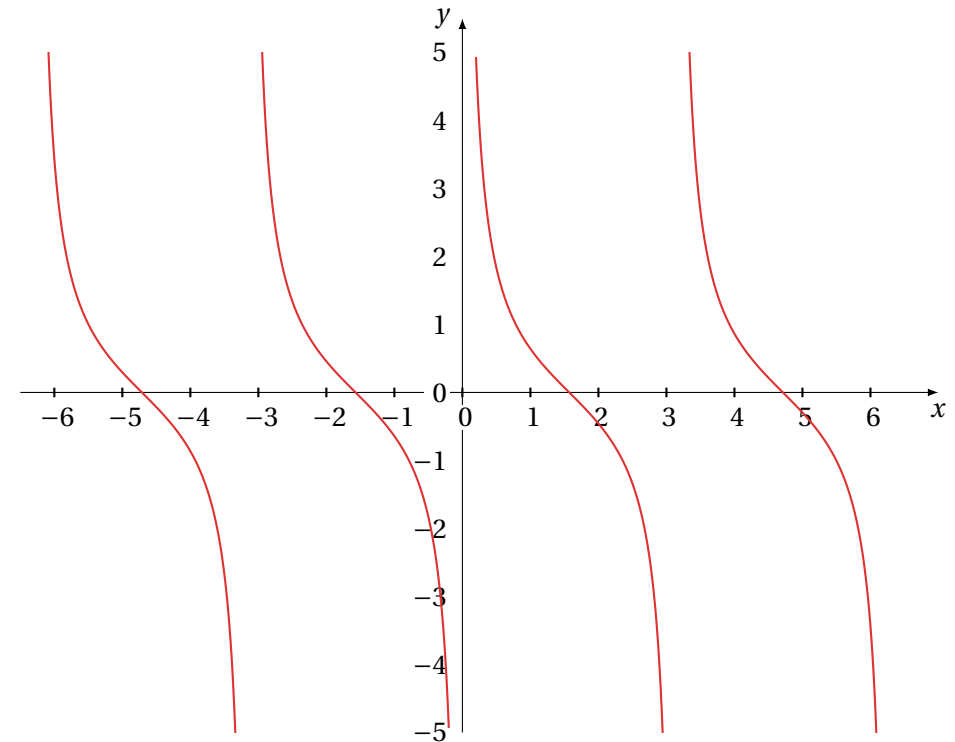
$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(U_n = k) = \frac{1}{p}.$$

14.3) Comme dans le cas particulier $p = 3$, les différentes positions possibles pour la particules tendent vers l'équiprobabilité lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

■ Partie III — Étude d'une variable aléatoire

15. 15.1) L'ensemble de définition de cotan est \mathbf{R} privé de l'ensemble des points où la fonction sinus s'annule, c'est-à-dire $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

15.2)



16. Le point A_0 a pour coordonnées $(1,0)$, le point A_k a pour coordonnées $(\cos(\frac{2k\pi}{p}), \sin(\frac{2k\pi}{p}))$, la droite $(A_0 A_k)$ a donc pour équation :

$$y - 0 = \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 0}{\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1} (x - 1).$$

Sur cette droite, le point d'abscisse -1 a donc pour ordonnée :

$$\begin{aligned}
 y_{B_k} &= -2 \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 0}{\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1} \\
 &= -2 \frac{2 \sin\left(\frac{k\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)}{\left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right) - 1} \\
 &= \boxed{2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)}.
 \end{aligned}$$

- 17.** La variable W_3 suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1;2\}$ puisque $3 - 1 = 2$. La variable Z_3 prend donc deux valeurs, chacune avec probabilité $1/2$, ces deux valeurs sont $2 \cotan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $2 \cotan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. On a donc :

$$E(Z_3) = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.$$

Et la variable $|Z_3|$ est constante et égale à $\frac{2}{\sqrt{3}}$: son espérance est égale à cette valeur. Pour l'espérance, on aurait pu aussi avoir recours au théorème de transfert (applicable puisque les variables aléatoires mises en jeu sont finies).

- 18.** Rappel : p est toujours supposé impair, $p = 2q + 1$. On se doute que cette espérance va être nulle, en s'inspirant de la question précédente, et l'indication qui nous incite à montrer que les valeurs prises par Z_p sont placées symétriquement autour de 0. Et en effet, la variable Z_p prend chacune des valeurs $2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$ pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ avec la même probabilité $1/(p-1)$, et les q dernières sont les opposées des q premières : pour $k \in \llbracket q+1, 2q \rrbracket$, en posant $k' = 2q+1-k$, on a $k' \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et :

$$2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) = 2 \cotan\left(\frac{(2q+1-k')\pi}{p}\right) = 2 \cotan\left(\pi - \frac{k'\pi}{p}\right) = -2 \cotan\left(\frac{k'\pi}{p}\right)$$

L'espérance de Z_p est donc nulle.

Cela signifie qu'en moyenne, B_k se situe autour de $(-1, 0)$.