

DEVOIR SURVEILLÉ # 3

le Samedi 20/11/2021, 8h → 11h



Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.



Je rappelle une règle de base : c'est une très mauvaise idée (point de vue barème) d'esquiver judicieusement les questions d'Informatique.

Problème 1 Hémodynamique. Modèle de WINDKESSEL pour modéliser la compliance sanguine (Solution : 5) On étudie dans cet exercice le débit de sang dans les vaisseaux sanguins du corps humain grâce au modèle de WINDKESSEL. À la manière d'une pompe manuelle, le coeur éjecte périodiquement du sang, puis s'arrête le temps de se remplir à nouveau. Le débit de sang expulsé du coeur subit donc des variations brutales, qui seraient dommageables pour le système vasculaire si les vaisseaux n'étaient pas partiellement élastiques. Cette propriété d'élasticité est mesurée par une grandeur nommée *compliance* et notée C dans la suite de l'exercice. On notera aussi R la résistance des vaisseaux à l'écoulement sanguin. Les quantités C et R sont deux grandeurs strictement positives supposées constantes dans le sujet.

Dans le modèle de WINDKESSEL, la pression $P(t)$ du sang au temps t à la sortie du ventricule gauche est une fonction dérivable qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad \forall t \geq 0, \quad CP'(t) + \frac{P(t)}{R} = Q(t),$$

où la fonction Q est le débit de sang expulsé par le coeur. Dans cet exercice on considérera que Q est une fonction périodique, dont nous donnerons une expression seulement sur l'intervalle de temps $[0, 10]$ (l'unité de temps est arbitraire).

1. À l'aide de vos connaissances physiques sur le circuit RC — résistance et condensateur branchés en série avec un générateur de tension variable — expliquer l'introduction de cette équation différentielle. On effectuera une analogie entre les grandeurs mises en jeu dans (E), et celles du circuit.

■ **Partie I — Étude de (E) lorsque Q est un créneau** Dans cette partie, on suppose que

$$\begin{cases} Q(t) = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ Q(t) = 5 & \text{si } 4 < t \leq 10. \end{cases}$$

On considère donc que le coeur n'expulse pas de sang pour t entre 0 et 4, puis que le sang accumulé est expulsé à débit constant 5 de $t = 4$ à $t = 10$.

2. Résoudre $(E_1) \quad Cy' + \frac{y}{R} = 0$. Donner l'expression de la solution P_1 de (E_1) vérifiant $P_1(0) = P_0 \in \mathbf{R}$.
3. Résoudre $(E_2) \quad Cy' + \frac{y}{R} = 5$. Donner l'expression de la solution P_2 de (E_2) vérifiant $P_2(4) = P_1(4) \in \mathbf{R}$.
4. Tracer les fonctions P_1 et P_2 sur \mathbf{R}^+ . Les valeurs des constantes R et C ne sont pas pertinentes pour ces graphes, seule leur allure vous est demandée. On supposera que $P_0 < 5R$.
5. On admet que l'on a alors $P(t) = P_1(t)$ pour $t \in [0, 4]$, puis $P(t) = P_2(t)$ pour $t \in [4, 10]$. Puis on résout à nouveau l'équation (E_1) sur $[10, 14]$, (E_2) sur $[14, 20]$, etc... en imposant à chaque fois des conditions aux limites pour avoir une solution continue — on dit que l'on a effectué des « raccords ».

Tracer sur un même graphe l'allure de Q (débit de sang expulsé par le coeur) et de P (pression du sang à la sortie du ventricule gauche) entre $t = 0$ et $t = 20$. Interpréter ce graphe : comment les variations brutales de Q se répercutent-elles sur la pression P ?

■ **Partie II — Résolution à l'aide d'un programme informatique** Dans cette partie, on prendra pour Q , le débit sanguin expulsé du coeur, une fonction plus proche de ce qui est observé expérimentalement. On prendra donc :

$$\forall t \in [0, 10], \quad Q(t) = e^{2-t} \sin(\sqrt{t}).$$

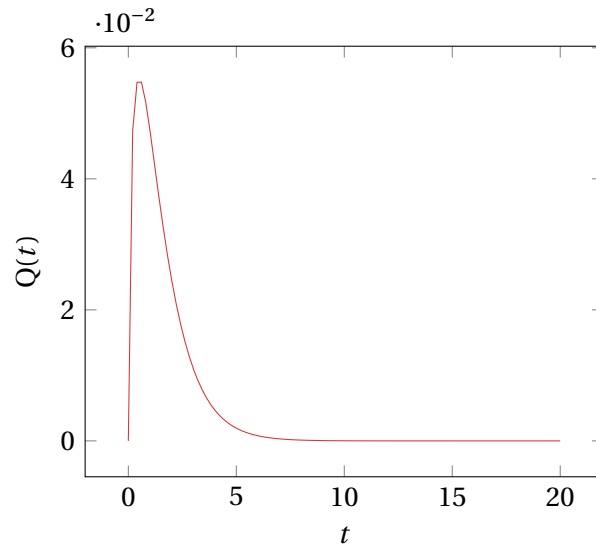


Fig. 0.1. : Allure du débit sanguin choisi pour la suite

On ne sait alors pas trouver les solutions exactes de l'équation différentielle (E) (en effet, nous obtenons une primitive non trivialement calculable lors de l'application de la méthode de variation de la constante), mais on peut calculer une approximation des solutions informatiquement, grâce à la méthode d'EULER.

RAPPEL DU PRINCIPE. La méthode d'EULER part du principe que l'on peut approximer la dérivée de P au temps t par le taux d'accroissement $\frac{P(t+h) - P(t)}{h} \approx P'(t)$ où h est un intervalle de temps très petit.

On peut alors écrire, si P vérifie l'équation (E) que :

$$P(t+h) \approx P(t) + h \left(-\frac{P(t)}{RC} + \frac{Q(t)}{C} \right) \text{ c'est à dire } P(t+h) \approx \left(1 - \frac{h}{RC} \right) P(t) + \frac{hQ(t)}{C}.$$

De cette façon puisqu'on connaît la valeur de P au temps 0, on peut en calculer une approximation au temps h , puis au temps $2h$ etc... (les temps seront les éléments de (t_n) dans la suite).

MISE EN PLACE. On cherche à calculer une approximation de P sur l'intervalle $[0, 10]$.

- ▶ On fixe un pas de temps $h = 0.05$ pour tout l'exercice.
- ▶ On définit une suite (t_n) de temps par $t_n = nh$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- ▶ On définit enfin la suite récurrente (p_n) par :

$$\begin{cases} p_0 = P_0, \\ \forall n \in \mathbf{N}, p_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{RC} \right) p_n + \frac{h}{C} Q(t_n). \end{cases}$$

- ▶ On prendra les valeurs suivantes : $P_0 = 1 \quad R = 1 \quad C = 4$.

De cette façon, pour tout entier naturel n , p_n risque d'être une bonne approximation de $P(t_n)$, la valeur de la solution exacte P au temps t_n .

6. >_☛ Écrire une fonction d'en-tête `calcul_p(N)` qui prend en argument un entier naturel N , et retourne une liste contenant p_0, \dots, p_N .
7. >_☛ En déduire quelques commandes permettant de tracer la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur un graphique jusqu'à un rang assez grand. Quel est le nombre N de termes qu'il faut calculer, avec le pas choisi, pour obtenir une approximation de P sur l'intervalle de temps $[0, 10]$?
8. >_☛ Écrire un programme qui calcule et affiche le temps à partir duquel la pression atteint la moitié de sa valeur initiale.

Problème 2 Dynamique de deux populations d'oiselles structurées en âge – D'après concours G2E (Solution 8) On rappelle que, pour tout $p \geq 2$, $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et p colonnes et à coefficients réels. Par convention, si $M \in \mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$, alors M^0 désigne la matrice identité de $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. On s'intéresse à deux populations d'oiseaux notées \mathcal{P}_1 (étudiée dans la partie I) et \mathcal{P}_2 (étudiée dans la partie II). Dans chacune de ces populations, la moitié sont des oiselles (c'est-à-dire des femelles) et on modélise l'évolution de l'effectif de ces oiselles en fonction de n , le nombre d'années écoulées depuis un instant initial correspondant à $n = 0$. L'évolution se fait donc ponctuellement chaque année, et l'âge d'un individu peut être non entier.

Ces deux parties peuvent être abordées indépendamment l'une de l'autre.

■ Partie I — Premier exemple dans $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$

1. Soient les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

- 1.1) Calculer $\det(P)$ puis P^{-1} .
 - 1.2) Démontrer que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
2. (Modèle à deux classes d'âge) Les oiselles de \mathcal{P}_1 sont classées en deux catégories :
- ▶ les oiselles jeunes, c'est-à-dire celles qui sont âgées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté j_n .
 - ▶ Les oiselles adultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'au moins deux ans. L'effectif des oiselles adultes est noté a_n .

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

- ▶ chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne à une oiselle pendant sa première année de vie et à 5 oiselles pendant sa deuxième année.
- ▶ 15 % des oiselles survivent au-delà de leur première année mais jamais au-delà de leur seconde année.

On note :

$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X'_n = P^{-1}X_n.$$

- 2.1) Justifier que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- 2.2) À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire une expression de X'_n en fonction de X'_0 et D .
- 2.3) En supposant j_0 et a_0 non nuls, démontrer que j_n et a_n sont équivalents à des termes généraux de suites géométriques.

■ Partie II — Second exemple dans $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$

3. Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3.1) Démontrer que 2 et -1 sont les seules valeurs propres de B , déterminer les espaces propres de B et en déduire que B n'est pas diagonalisable.
- 3.2) Démontrer que B est semblable à la matrice T ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3.3) Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de NEWTON.
4. (Modèle à trois classes d'âge) Les oiselles de \mathcal{P}_2 sont classées en trois catégories :
- ▶ les oiselles jeunes, c'est-à-dire celles qui sont âgées de strictement moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté J_n .
 - ▶ les oiselles pré-adultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'un an à moins de deux ans. L'effectif des oiselles pré-adultes est noté P_n .

- ▶ Les oiselles adultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'au moins deux ans. L'effectif des oiselles adultes est noté A_n .

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

- ▶ une oiselle de moins d'un an strictement n'est pas féconde.
 - ▶ Chaque oiselle âgée de 1 à strictement moins de 3 ans donne, en moyenne, naissance à 4 oiselles,
 - ▶ 75 % des oiselles survivent au-delà de leur première année,
 - ▶ les deux tiers des oiselles vivantes à la fin de la deuxième année (juste avant d'avoir 2 ans) survivent, mais jamais au-delà de la troisième année.
- 4.1) En s'inspirant de la partie précédente, montrer qu'il existe Q inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = QT^nQ^{-1} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

- 4.2) En déduire enfin qu'il existe trois matrices C_1, C_2 et C_3 appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = (2^n C_1 + (-1)^n C_2 + n(-1)^n C_3) \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

5. On note S_n l'effectif total des oiselles de \mathcal{P}_2 , et on suppose que J_0, P_0 et A_0 sont non nuls et que

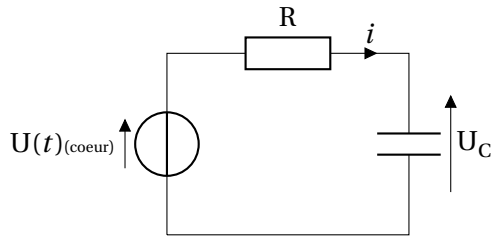
$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{32}{27} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que les suites $(J_n), (P_n)$ et (A_n) divergent vers $+\infty$.

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé 1)

1. L'équation différentielle est celle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur, branché en série avec un générateur de tension (*a priori* variable $Q(t)$) et une résistance.



D'où, en divisant par R :

$$CU'_c(t) + \frac{1}{R}U_c(t) = Q(t).$$

Le système coeur / vaisseaux peut donc être assimilé à un circuit RC où :

- ▶ la résistance matérialise la capacité qu'ont les vaisseaux à résister à l'écoulement sanguin,
- ▶ la capacité C du condensateur décrit la capacité qu'ont les vaisseaux à se charger en sang,
- ▶ le générateur de tension est ici le coeur.

Par exemple, si Q est un signal créneau périodique nul sur un intervalle (comme dans la première partie du problème), nous sommes censés observer deux régimes pour le condensateur :

- ▶ une phase de charge lorsque Q est non nul (*i.e.* lorsque le coeur éjecte du sang),
- ▶ puis ensuite une décharge complète lorsque le coeur se remplit à nouveau et donc qu'il n'éjecte plus de sang (notre circuit électrique, cela correspondrait à une suppression du générateur).

■ **Partie I — Étude de (E) lorsque Q est un créneau** Dans cette partie, on suppose

En effet, si on note U_c la tension aux bornes du condensateur et i l'intensité, on a par la loi des mailles :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, Ri(t) + U_c(t) &= Q(t) \\ \iff RCU'_c(t) + U_c(t) &= Q(t). \end{aligned}$$

que

$$\begin{cases} Q(t) = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ Q(t) = 5 & \text{si } 4 < t \leq 10. \end{cases}$$

On considère donc que le coeur n'expulse pas de sang pour t entre 0 et 4, puis que le sang accumulé est expulsé à débit constant 5 de $t = 4$ à $t = 10$.

2. L'équation différentielle (E₁) $Cy' + \frac{y}{R} = 0$ est linéaire à coefficients constants, et équivalente à

$$y' + \frac{y}{RC} = 0.$$

Donc $P_1(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $P_1(0) = P_0 = K$, donc

$$\forall t \geq 0, \quad P_1(t) = P_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

3. L'équation différentielle (E₂) $Cy' + \frac{y}{R} = 5$ est linéaire à coefficients constants, et équivalente à

$$y' + \frac{y}{RC} = \frac{5}{C}.$$

Donc $P_2(t) = Le^{-\frac{t}{RC}} + 5R$ — on a cherché une solution particulière sous forme d'une constante — pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $P_2(4) = P_1(4)$, condition équivalente à

$$Le^{-\frac{4}{RC}} + 5R = P_0 \cdot e^{-\frac{4}{RC}} \iff L = P_0 - 5Re^{\frac{4}{RC}}.$$

Donc :

$$\forall t \geq 0, \quad P_2(t) = \left(P_0 - 5Re^{\frac{4}{RC}} \right) e^{-\frac{t}{RC}} + 5R.$$

4. On en déduit les tracés suivants, par exemple avec les paramètres qui seront pris plus tard dans le sujet, et qui satisfont la condition $P_0 < 5R$, de sorte que

$$\forall t \geq 0, \quad P_1(t) = \exp\left(-\frac{t}{4}\right), \quad P_2(t) = (1 - 5e) \exp\left(-\frac{t}{4}\right) + 5.$$

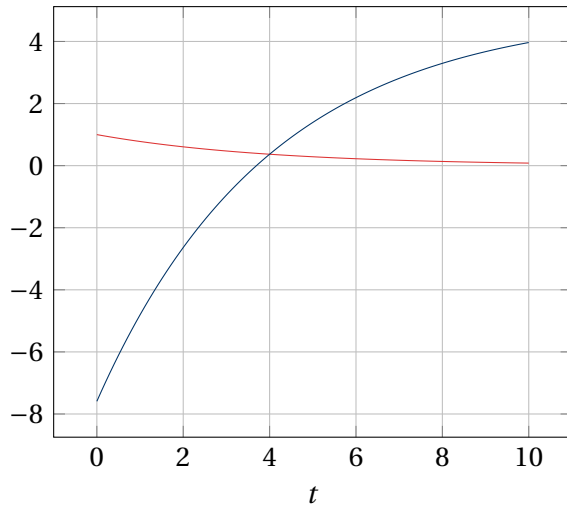


FIG. 0.2. : Allure de P_1, P_2

Les allures sont obtenues en observant les limites, et la monotonie par opérations usuelles sur les fonctions monotones. Notamment $P_0 - 5Re\frac{A}{RC}$ est négatif avec notre choix de constantes, donc P_2 est croissante.

- On admet que l'on a alors $P(t) = P_1(t)$ pour $t \in [0, 4]$, puis $P(t) = P_2(t)$ pour $t \in [4, 10]$. Puis on résout à nouveau l'équation (E_1) sur $[10, 14]$, (E_2) sur $[14, 20]$, etc... en imposant à chaque fois des conditions aux limites pour avoir une solution continue — on dit que l'on a effectué des «raccords».

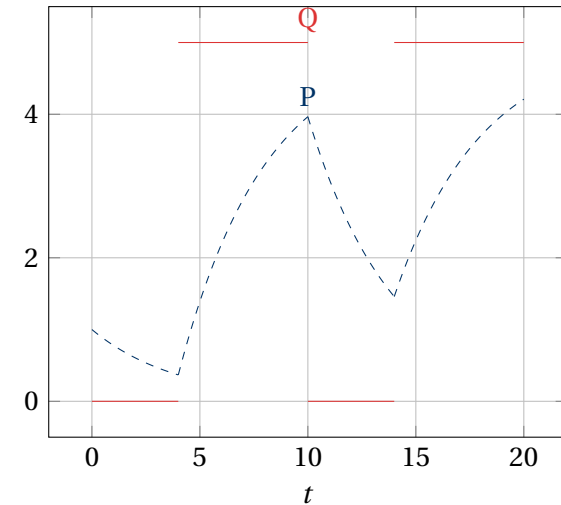


FIG. 0.3. : Évolution de la pression et comparaison avec Q

L'élasticité des vaisseaux permet de compenser en partie les variations brutales de débit sanguin : en particulier, on voit sur la courbe de P que la pression en sortie du coeur diminue lorsque Q vaut 0, mais que la pression n'est jamais nulle. Pour cette fonction Q, et ce jeu de paramètres, la pression ne semble pas diminuer suffisamment pour retourner à sa valeur initiale.

■ Partie II — Résolution à l'aide d'un programme informatique

RAPPEL DU PRINCIPE. La méthode d'EULER part du principe que l'on peut approximer la dérivée de P au temps t par le taux d'accroissement $\frac{P(t+h) - P(t)}{h} \approx P'(t)$ où h est un intervalle de temps très petit.

On peut alors écrire, si P vérifie l'équation (E) que :

$$P(t+h) \approx P(t) + h \left(-\frac{P(t)}{RC} + \frac{Q(t)}{C} \right) \text{ c'est à dire } P(t+h) \approx \left(1 - \frac{h}{RC} \right) P(t) + \frac{hQ(t)}{C}.$$

De cette façon puisqu'on connaît la valeur de P au temps 0, on peut en calculer une approximation au temps h , puis au temps $2h$ etc... (les temps seront les éléments de (t_n) dans la suite).

MISE EN PLACE. On cherche à calculer une approximation de P sur l'intervalle [0, 10].

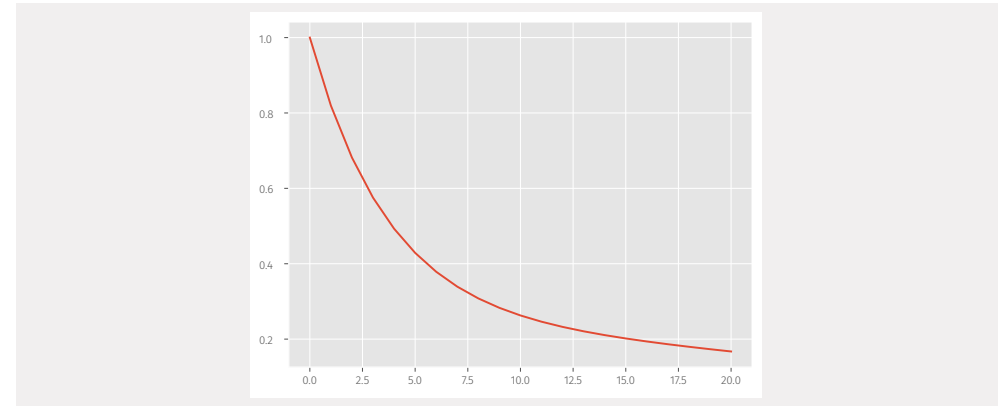
6. >_🐍

```
import math as ma

h = 0.05
P_0 = 1
R = 1
C = 4
def calcul_p(N):
    """
    retourne la liste des N+1 premiers termes de p
    """
    p = P_0
    P = [p]
    for k in range(1, N+1):
        p = (1-h/R*C)*p+(h/C)*ma.exp(2,
        ↪ -k*h)*ma.sin(ma.sqrt(k*h))
        P.append(p)
    return P
```

7. Puis on peut maintenant tracer la suite, par exemple jusqu'au rang N = 20.

```
import matplotlib.pyplot as plt
N = 20
P = calcul_p(N)
plt.plot(P)
```



Quel est le nombre N de termes qu'il faut calculer, avec le pas choisi, pour obtenir une approximation de P sur l'intervalle de temps [0, 10]? Il suffit de regarder le premier entier N vérifiant

$$10 \leq Nh,$$

on obtient après calcul N = 200.

8. >_🐍

```
import math as ma
def condition_pression():
    """
    retourne la liste des N+1 premiers termes de p
    """
    p = P_0
    k = 0
    while p > P_0/2:
        k += 1
        p = (1-h/R*C)*p+(h/C)*ma.exp(2,
        ↪ -k*h)*ma.sin(ma.sqrt(k*h))
    return k
```

On obtient :

```
>>> condition_pression()
```

```
4
```



Solution (problème 2) (énoncé : 3)

■ **Partie I — Premier exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

1. 1.1) Le déterminant de P est

$$\det(P) = -2 \times \frac{3}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = -\frac{8}{5}.$$

Donc $\det(P)$ est donc non nul, et P est inversible d'inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -2 \\ -\frac{1}{5} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

1.2) Calculons $P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $D = P^{-1}AP$ est donc diagonale, et donc $A = PDP^{-1}$.

2. 2.1) Au bout d'un an, toutes les oiselles jeunes disparaissent (soit elles meurent, soit elles deviennent adultes). Toutes les nouvelles oiselles jeunes sont donc de nouvelles naissances : il y en a une par jeune, et 5 par adulte, d'où $j_n + 5a_n$ oiselles jeunes. Toutes les adultes meurent, et 15% des jeunes deviennent adultes, d'où $\frac{15}{100}j_n$ adultes à l'année suivante. Finalement,

$$j_{n+1} = j_n + 5a_n, \quad a_{n+1} = \frac{15}{100}j_n = \frac{3}{20}j_n.$$

On a donc

$$AX_n = \begin{pmatrix} j_n + 5a_n \\ \frac{3}{20}j_n \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

2.2) Montrons par récurrence $X'_n = D^n X'_0$. Puisque D^0 est la matrice identité, la propriété est clairement vérifiée au rang $n = 0$. Supposons-là vraie au rang n . Alors

$$\begin{aligned} X'_{n+1} &= P^{-1}X_{n+1} \\ &= P^{-1}AX_n \\ &= DP^{-1}X_n \\ &= DX'_n \\ &= DD^n X'_0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{hypothèse de récurrence} \\ &= D^{n+1} X'_0 \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n + 1$. Par principe de récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X'_n = D^n X'_0.$$

2.3) Supposons que $j_0 \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} X_n &= PX'_n \\ &= PD^n X'_0 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(\frac{3}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n & -\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 20\left(\frac{3}{2}\right)^n - 20\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{3}{2}\right)^n + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n j_0 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n j_0 + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\ \frac{3}{40}\left(\frac{3}{2}\right)^n j_0 - \frac{3}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^n j_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$j_n = \left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}j_0 - \frac{5}{2}a_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Le premier terme tendant vers $+\infty$ et le second vers 0, on a donc

$$\frac{j_n}{\left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{4}j_0 - \frac{5}{2}a_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n} \rightarrow 1,$$

et donc

$$j_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

De la même façon,

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{3}{40}j_0 + \frac{1}{4}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

■ Partie II — Second exemple dans $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$

3. 3.1) On échelonne la matrice pour trouver, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\text{Rg}(B - \lambda I_3) = \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 3\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

On note alors que

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2,$$

et donc 2 et -1 sont bien les deux seules valeurs propres de B. On a alors

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B) \text{ si et seulement si}$$

$$\begin{cases} 3x - 8y = 0 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\text{et donc } X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

De même, on a $X \in E_{-1}(B)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

et donc $X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. On a donc

$$E_2(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1}(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut donc 2, et B n'est donc pas diagonalisable.

3.2) Soit f l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 canoniquement associé à B. Soient alors $e_1 =$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ On cherche alors } e_3 \text{ tel que } f(e_3) = e_2 - e_3, \text{ c'est-à-dire,}$$

$$\text{en posant } e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 4y + 4z = 4 - x \\ \frac{3}{4}x = -3 - y \\ \frac{2}{3}y = 2 - z \end{cases}$$

$$\text{Alors } e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ convient. On note que la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ forme}$$

une base de \mathbf{R}^3 , et la matrice de f dans cette base vaut bien T. Ainsi, B et T représentent le même endomorphisme, et donc sont semblables.

3.3) Écrivons $T = D + N$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note alors que D et N commutent, et que $N^2 = 0$. Par la formule du binôme, on a donc

$$\begin{aligned} T^n &= (D + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= D^n + nND^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. 4.1) Soit $n \in \mathbf{N}$. Chaque oiselle pré-adulte et adulte va donner naissance à quatre oiselles jeunes, et donc

$$J_{n+1} = 4P_n + 4A_n.$$

Ensuite seulement trois quarts des jeunes deviennent pré-adultes, donc $P_{n+1} = \frac{3}{4}J_n$, et seulement deux tiers des pré-adultes deviennent adultes, et les oiselles déjà adultes meurent, donc $A_{n+1} = \frac{2}{3}P_n$. On a alors

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ P_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Or on a vu que B et T sont semblables, et il existe donc une matrice inversible Q telle que $B = QTQ^{-1}$. On a alors, par récurrence immédiate $B^n = QT^nQ^{-1}$, et par récurrence

$$\begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = QT^nQ^{-1} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

4.2) On peut écrire, d'après la question précédente, que :

$$T^n = 2^n A_1 + (-1)^n A_2 + n(-1)^{n+1} A_3,$$

$$\text{où } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a alors,}$$

par linéarité du produit matriciel,

$$QT^nQ^{-1} = 2^n QA_1Q^{-1} + (-1)^n QA_2Q^{-1} + n(-1)^{n+1} QA_3Q^{-1},$$

et on a donc les matrices voulues en posant

$$C_1 = QA_1Q^{-1}, \quad C_2 = QA_2Q^{-1}, \quad C_3 = -QA_3Q^{-1}.$$

5. Notons C_{ij} la j -ième ligne de la matrice C_i . On a alors pour tout n

$$\begin{aligned} J_n &= 2^n C_{11} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + (-1)^n C_{21} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + n(-1)^n C_{31} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \left(C_{11} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n} C_{21} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n} C_{31} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Par croissance comparée, la parenthèse tend vers $C_{11} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$, qui est non nul

car J_0, P_0, A_0 et les coefficients de C_{11} sont strictement positifs. Ainsi, on a bien $J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. On trouve de-même :

$$\begin{aligned} P_n &= 2^n \left(C_{12} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n} C_{22} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n} C_{32} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right), \\ A_n &= 2^n \left(C_{13} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n} C_{23} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n} C_{33} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

et pour les mêmes raisons que (J_n) , les suites (P_n) et (A_n) divergent vers ∞ .