

ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale dure 40 minutes : 20 minutes de préparation, suivies de 20 minutes d'exposé devant l'examineur (temps d'émargement et d'installation du candidat, nettoyage de la table). Le sujet comporte toujours deux exercices dont un portant sur les probabilités. Les sujets couvrent l'ensemble du programme de première année et de deuxième année. Le jury n'accepte pas l'utilisation de résultats hors programme (sauf si le candidat est capable de les prouver). Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat expose à l'oral les résultats qu'il a obtenus. L'examineur peut intervenir à tout moment, pour demander l'énoncé précis d'un théorème, demander la définition d'une notion, obtenir des explications sur la démarche suivie. L'examineur peut donner des indications pour relancer un candidat, intervenir pour lui éviter une impasse, mais il peut aussi lui laisser du temps pour mieux apprécier sa capacité d'initiative. Le jury conseille vivement aux candidats, pendant le temps de préparation, de consacrer le même temps de travail aux deux exercices plutôt que de s'acharner sur le premier et de n'avoir rien à dire sur le second. Le jury rappelle que les deux exercices sont obligatoires.

Le candidat peut commencer la présentation par l'exercice de son choix.

Dans l'immense majorité des cas, le dialogue est constructif et le candidat peut ainsi montrer le niveau mathématique atteint et les compétences acquises. Toutefois, on constate de temps en temps des candidats qui contestent ce que leur dit l'interrogateur et cette attitude n'est pas des plus judicieuses.

De manière générale, on peut aussi déplorer que le cours soit très mal appris (énoncé de théorèmes avec des hypothèses précises, définitions...). L'analyse semble, dans l'ensemble, poser beaucoup de problèmes aux candidats ; en revanche, l'algèbre semble mieux maîtrisée qu'auparavant.

Enfin, il faut rappeler qu'un oral n'est pas une "colle" et qu'en aucun cas le jury n'a le temps d'expliquer au candidat comment il aurait dû faire-surtout en 20 minutes d'oral !

2 Remarques

2.1 Engager une recherche, définir une stratégie

- Il faut lire soigneusement l'énoncé. On évite alors des erreurs (tirages avec ou sans remise par exemple).
De même, lorsqu'on demande "d'en déduire" un résultat, il s'agit d'exploiter les résultats des questions précédentes et a priori de ne pas se lancer sans réfléchir dans de nouveaux calculs..
- Il pourrait être intéressant que les candidats lisent en entier l'énoncé de l'exercice avant de se lancer dans la résolution. Par exemple, lorsque l'exercice traite d'une intégrale et que la question portant sur cette valeur n'intervient qu'à la fin de l'exercice, il est malvenu d'essayer d'obtenir cette valeur dès la première question.
- Il ne faut pas tomber dans le piège des méthodes toutes faites et appliquées sans discernement. En algèbre linéaire par exemple, le recours au pivot de Gauss est trop souvent la seule méthode envisagée, même lorsque l'énoncé suggère de procéder autrement (on peut aussi ajouter que cette méthode est souvent longue et « presque » inutilisable lors d'un oral qui dure si peu de temps).
En algèbre linéaire, les candidats - peu nombreux malheureusement - qui ont une vision globale des notions mises en jeu (lien entre valeur propre, rang ou noyau d'une matrice/endomorphisme), réussissent davantage à mettre en avant leur capacité à raisonner et leurs connaissances théoriques, ce qui conduit à des échanges riches lors de leur exposé.

- Avant de se lancer dans certaines démarches, il faut vérifier que le contexte est correct. Par exemple avant de dériver une fonction du type $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$, on attend que le candidat justifie qu'elle est dérivable (la plupart du temps on entend : f est dérivable donc l'intégrale aussi). Lorsqu'on veut appliquer la formule des probabilités totales, il faut citer le système complet d'événements.
- Les candidats pensent plus souvent que les années précédentes, à examiner les premiers termes d'une suite et sont parfois capables de proposer alors une conjecture.

2.2 Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique

- La modélisation pose toujours beaucoup de problèmes.
- Dans le cas d'équiprobabilité, les candidats omettent très souvent de mentionner l'univers dans lequel on calcule des probabilités.
Lors de la recherche de la loi d'une variable aléatoire X , on attend des candidats qu'ils définissent $X(\Omega)$ avant de commencer tout calcul. Ceci permet d'éviter des confusions très nombreuses entre variables discrètes et variables à densité (beaucoup de confusions de méthodes entre ces deux types de variables aléatoires - détermination de la loi, calcul de l'espérance..).
- Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.
- Beaucoup de candidats ont des difficultés avec la notion d'événement et on constate par exemple des confusions entre union et intersection. On voit même des sommes d'événements ou des unions de probabilité. On voit assez souvent une probabilité qui est égale à un événement.
- Les formules de Bayes, probabilités totales ou composées sont rarement citées de manière correcte, et le système complet d'événements passé sous silence.
- La notion de système complet d'événements semble inconnue par de nombreux candidats.

2.3 Représenter, changer de registre

- Il faut savoir proposer l'étude d'une fonction pour étudier le nombre de solutions d'une équation. Et il serait intéressant que les candidats connaissent la fonction valeur absolue.
- De même il faut être capable de proposer une étude de fonction pour montrer une inégalité. Rappelons toutefois que résoudre une inégalité ne signifie pas résoudre au préalable l'égalité puis dresser ensuite au hasard un tableau de signes.
- Il faut être capable de donner la représentation graphique des fonctions de référence. Certains élèves ont eu du mal à tracer la courbe représentative de fonctions dont ils avaient pourtant donné le tableau de variation. Un dessin est toujours apprécié, et pas seulement en géométrie.
- En probabilités, de plus en plus de candidats savent utiliser un arbre pour calculer des probabilités, mais trop souvent ils sont incapables d'expliquer en termes d'événements les relations obtenues. Rappelons que la notion de système complet d'événements est essentielle en probabilités discrètes. À l'inverse, certains candidats font l'effort d'essayer d'écrire formellement les univers images d'une variable aléatoire ou cherchent à écrire des événements complexes à l'aide d'unions ou d'intersections mais cela masque la situation qui s'avère parfois "simple".
- En algèbre linéaire le passage entre un endomorphisme et sa matrice dans une base donnée reste souvent difficile.

2.4 Raisonner, démontrer, argumenter

- Les résultats du cours sont les points d'appui sur lesquels on demande aux candidats de construire leur raisonnement. Il est donc indispensable de connaître son cours et il faut s'attendre à ce que l'examineur demande de citer explicitement un théorème ou une définition. On commence à constater une certaine tendance à privilégier la résolution des exercices plutôt que la compréhension. Certains élèves savent que « on fait comme ça », ou citent « je connais un exercice qui ressemble ».
- Les candidats doivent faire attention à ne pas confondre méthode et astuce. Il faut par exemple savoir justifier (ce qui n'est pas très difficile) un résultat du type :
« La somme des coefficients de chacune des lignes de la matrice donne la même valeur donc cette valeur est une valeur propre »

- Certains candidats semblent parfois confondre «appliquer une méthode» et «construire un raisonnement»; on peut par exemple rappeler que tout n'est pas un raisonnement par récurrence.
- Il faut être capable d'identifier une condition nécessaire ou suffisante et surtout éviter de confondre ces deux notions.
- Les candidats semblent plus à l'aise avec la démonstration de l'égalité de deux ensembles.
- Il faut savoir expliciter la signification de l'égalité de deux fonctions ou sa négation.
- En algèbre linéaire il est parfois très difficile d'obtenir le moindre raisonnement.
- Le lien entre « 0 est valeur propre de f » et la non inversibilité de f est souvent ignoré.
- Les candidats devraient savoir comment réagir en face d'une matrice ne possédant qu'une seule valeur propre et pouvoir justifier si elle peut être diagonalisable (même si le jury est conscient que ce résultat n'est pas explicitement dans le programme). Il est très rare qu'un candidat sache donner le bon argument (pourtant, on retrouve souvent ces résultats dans les problèmes d'écrit).

2.5 Calculer, maîtriser le formalisme mathématique.

- Le jury, conformément au programme, n'attend aucune virtuosité calculatoire de la part des candidats. Mais la non maîtrise des règles de calcul élémentaires concernant les fonctions logarithme ou exponentielle et la mauvaise gestion de la composition de puissances est très pénalisante. Il faut maintenant dire la même chose avec les multiplications et les additions. En effet il y a maintenant des candidats qui écrivent

$$\prod_{k=1}^n p = np.$$

- La formule de la somme des termes d'une suite géométrique est souvent fautive et les conditions de validité sont presque toujours mauvaises (on aimerait entendre que la raison, dans le cas d'une somme finie est différente de 1 et dans le cas d'une somme infinie est, en valeur absolue, strictement plus petite que 1). Il y a aussi confusion entre la somme de la série et sa somme partielle. Le niveau des candidats, dans la conduite des calculs, est très hétérogène.
- Permuter deux sommes finies quand l'un des indices dépend de l'autre reste très difficile à obtenir.
- La dérivation pose de très gros problèmes pour certains; les candidats ne devraient pas hésiter à poser leurs formules et à détailler les étapes. Cela a des conséquences assez catastrophiques sur le résultat de l'épreuve. Il en est de même pour la recherche de primitives (même pour des fonctions de la forme u'/u ou u'/u^2 ...). Une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u)$ sans valeur absolue. Et on a aussi confusion entre primitive et dérivée.
- L'intégration par parties est maintenant devenue une difficulté pour beaucoup de candidats. Les candidats confondent aussi linéarité de l'intégrale avec la relation de Chasles.
- Les propriétés de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ où f est une fonction continue, sont totalement ignorées des candidats. Le mot «primitive» n'est plus jamais employé (obtient-on une fonction continue? dérivable? de classe C^1 ? tout cela reste très flou et on entend encore «continu donc dérivable...») Les candidats ne savent donc pas dériver une fonction définie par une intégrale.
- La plupart des élèves manipulent les intégrales convergentes sans précaution (par exemple lors d'intégration par parties ou en utilisant la linéarité de l'intégrale).
- Pour montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité, on doit montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1. Il y a une différence entre le candidat qui réduit cette question à un calcul qui commence sans précautions par $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt =$, celui qui écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt =$ et celui qui commence par dire la fonction f est continue "par morceaux" sur \mathbb{R} , on peut donc se donner a et b deux réels et considérer $\int_a^b f(t)dt \dots$
- Pour étudier $\int_1^{+\infty} f(t)dt$, certains élèves passent prudemment par une borne finie A mais une fois qu'ils ont établi la convergence de l'intégrale ils écrivent malheureusement $\int_1^A f(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t)dt$.
- Pour calculer $P(X = Y)$ avec X et Y variables aléatoires discrètes, on voit très souvent $P(X = Y) = P(X = Y = k)$ et le candidat ne comprend pas pourquoi ce résultat est faux!

Auparavant, le candidat rectifiait de lui-même quand on lui faisait remarquer que les 2 événements n'étaient pas égaux; mais cette année, impossible de les faire corriger leur erreur - comme si ils découvraient que cette égalité était fausse. Toujours sur les variables aléatoires discrètes, les questions relatives à la loi de la somme, du max ou du min posent beaucoup de problèmes alors que ce sont des questions classiques.

- Les symboles « implique » et « équivalent » sont employés comme des signes de ponctuation.
- Beaucoup de candidats ne présentent pas correctement les objets utilisés.
- Les inégalités posent toujours beaucoup de problèmes. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne lieu à des inégalités inversées (ou même est totalement ignorée). Cette inégalité s'applique avec une variable aléatoire à identifier clairement et un epsilon judicieusement choisi. La formule de transfert pour le calcul d'un moment d'une variable aléatoire est à connaître, ainsi que les propriétés sur l'espérance et la variance.
- Des formules « classiques » du cours sont souvent ignorées par les candidats : en particulier, la formule donnant la variance de la somme de deux variables aléatoires semble totalement inconnue ainsi que la bilinéarité de la covariance et du produit scalaire.
- La formule donnant le terme général du produit de deux matrices carrées n'est pas connue; les candidats savent calculer le produit si on leur donne deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par exemple, mais l'on n'arrive pas à leur faire écrire ou retrouver la formule générale. On observe aussi la même lacune pour le produit de deux polynômes.
- L'utilisation des quantificateurs est trop rare, notamment en algèbre pour la recherche de valeurs propres, images, noyaux et égalité de polynômes.

2.6 Communiquer à l'écrit et à l'oral

- D'une façon générale, les candidats ont tendance à utiliser un langage de plus en plus imprécis : on entend « on fait f », « on remplace », « on passe de l'autre côté » ..., « pour montrer qu'une matrice A est inversible, on fait des opérations sur les lignes » ...
- On peut aussi signaler que certains candidats ne se facilitent pas les choses en appelant x un nombre entier et k un réel ! Et ceci est de plus en plus fréquent !
- Rappelons que la communication n'est pas à sens unique et qu'il faut être capable de prendre en compte les suggestions de l'examineur et de réagir aux indications proposées.
- On voudrait mettre en garde aussi sur l'utilisation du "ça" : c'est dérivable ou c'est positif...sans sujet dans la phrase.
- Les candidats ont parfois tendance à mal doser l'équilibre oral/écrit.. Par exemple, ils tentent parfois d'expliquer vaguement un calcul à l'oral alors qu'on aimerait voir les détails écrits. Mais plus souvent, c'est l'inverse : ils perdent beaucoup de temps à écrire en toutes lettres des choses qui pourraient être dites à l'oral - récurrence évidente par exemple...

2.7 Identifier un problème sous différents aspects

- Les relations entre la fonction de répartition d'une loi, son support, l'existence et, le cas échéant, la valeur de sa densité sont le plus souvent connues de façon beaucoup trop imprécise.
- L'interprétation des colonnes de la matrice de f pour déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ est mal exploitée. Beaucoup de candidats semblent incapables de donner une famille génératrice de l'image.
- Les relations entre système linéaire, matrice et endomorphisme restent parfois très floues.
- La structure algébrique de $\mathbb{R}[X]$ est assez mal maîtrisée.

2.8 Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes

- L'expression de la densité gaussienne est fautive chez de nombreux candidats.
- Les hypothèses des théorèmes classiques (Rolle, accroissements finis, de la bijection,...) peuvent être incomplètes, fausses, voire complètement oubliées. Certains candidats semblent considérer que le théorème de Rolle ou des accroissements finis sont en fait des « formules » qui ne méritent pas d'hypothèses.

- Il est souvent difficile d'obtenir un énoncé précis de certains théorèmes (par exemple le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection) et beaucoup de candidats ne peuvent pas donner une définition correcte de quelques unes des notions fondamentales du programme (par exemple : famille génératrice, vecteur propre, f diagonalisable).
- Par exemple, si la variable est discrète, pour donner sa loi, trop souvent les candidats cherchent sa fonction de répartition sans envisager d'autres possibilités! Plus ennuyeux : pour calculer la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes, les candidats utilisent le produit de convolution donnant la somme de 2 variables aléatoires à densité et indépendantes.
- Plusieurs candidats affirment sans plus de précision que les matrices symétriques sont diagonalisables. On a toujours du mal à obtenir la définition de valeur propre ou de vecteur propre. Certains élèves semblent même ne pas comprendre la question : pouvez vous me donner la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme? La définition abstraite du noyau d'un endomorphisme et celle de son image sont mal connues.
Enfin on trouve une erreur qui revient très souvent : « A triangulaire supérieure donc elle est diagonalisable».
- Beaucoup de candidats ne savent pas non plus définir « A diagonalisable».
- Il y a parfois confusion entre les solutions obtenues grâce à l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et celle d'une équation différentielle.
- On aimerait que les candidats sachent justifier correctement que la fonction de répartition obtenue correspond à une v.a. à densité et ne pas entendre "on dérive".
- Les exercices sur le produit scalaire sont souvent très mal traités et on voit des règles de calcul très fantaisistes (la notation du produit scalaire avec un point - certes au programme- n'aide pas vraiment les candidats qui "sortent" les vecteurs du produit scalaire).

2.9 Critiquer ou valider un modèle ou un résultat

- Il y a encore beaucoup de candidats qui sont surpris qu'on leur demande si le signe d'une valeur numérique obtenue après calcul est conforme à ce qu'on pouvait attendre, qui ne voient pas ce qu'on peut vérifier quand on a calculé des probabilités, qui sont étonnés qu'on propose de vérifier que les vecteurs obtenus après calculs sont bien des vecteurs propres, ou qui ne pensent pas à vérifier pour les premiers termes une formule donnant une expression du terme d'une suite.
- Plus regrettable, beaucoup de candidats, notamment en probabilités, ne sont pas surpris de faire apparaître dans leurs réponses des paramètres qui n'interviennent pas dans l'énoncé du problème proposé.

3 Conclusion

Le but de l'examineur n'est pas de troubler le candidat mais de vérifier ses connaissances et ses capacités d'initiative et de réaction lors d'un dialogue s'appuyant sur la résolution des deux exercices proposés. Il faut souligner que les candidats l'ont bien compris et que, dans l'immense majorité des cas, l'oral se déroule sereinement dans une ambiance propice à l'atteinte des objectifs cités. Si certains candidats n'ont pas atteint le niveau attendu à ce niveau de formation, le jury a aussi pu entendre d'excellentes prestations qui ont été justement récompensées.

Intervalles		Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	0	0,00	0	0,00
1 à 1,99	0	0,00	0	0,00
2 à 2,99	0	0,00	0	0,00
3 à 3,99	3	0,48	3	0,48
4 à 4,99	12	1,94	15	2,42
5 à 5,99	29	4,68	44	7,10
6 à 6,99	43	6,94	87	14,03
7 à 7,99	62	10,00	149	24,03
8 à 8,99	64	10,32	213	34,35
9 à 9,99	52	8,39	265	42,74
10 à 10,99	38	6,13	303	48,87
11 à 11,99	63	10,16	366	59,03
12 à 12,99	70	11,29	436	70,32
13 à 13,99	67	10,81	503	81,13
14 à 14,99	37	5,97	540	87,10
15 à 15,99	20	3,23	560	90,32
16 à 16,99	30	4,84	590	95,16
17 à 17,99	17	2,74	607	97,90
18 à 18,99	10	1,61	617	99,52
19 à 19,99	2	0,32	619	99,84
20	1	0,16	620	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 620

Minimum : 3,01

Maximum : 20

Moyenne : 10,88

Ecart type : 3,44

Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	0	0,00	0	0,00
1 à 1,99	0	0,00	0	0,00
2 à 2,99	3	0,48	3	0,48
3 à 3,99	7	1,13	10	1,61
4 à 4,99	19	3,06	29	4,68
5 à 5,99	25	4,03	54	8,71
6 à 6,99	33	5,32	87	14,03
7 à 7,99	52	8,39	139	22,42
8 à 8,99	33	5,32	172	27,74
9 à 9,99	58	9,35	230	37,10
10 à 10,99	59	9,52	289	46,61
11 à 11,99	51	8,23	340	54,84
12 à 12,99	51	8,23	391	63,06
13 à 13,99	59	9,52	450	72,58
14 à 14,99	50	8,06	500	80,65
15 à 15,99	33	5,32	533	85,97
16 à 16,99	35	5,65	568	91,61
17 à 17,99	22	3,55	590	95,16
18 à 18,99	17	2,74	607	97,90
19 à 19,99	5	0,81	612	98,71
20	8	1,29	620	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 620

Minimum : 2,22

Maximum : 20

Moyenne : 11,35

Ecart type : 3,89

