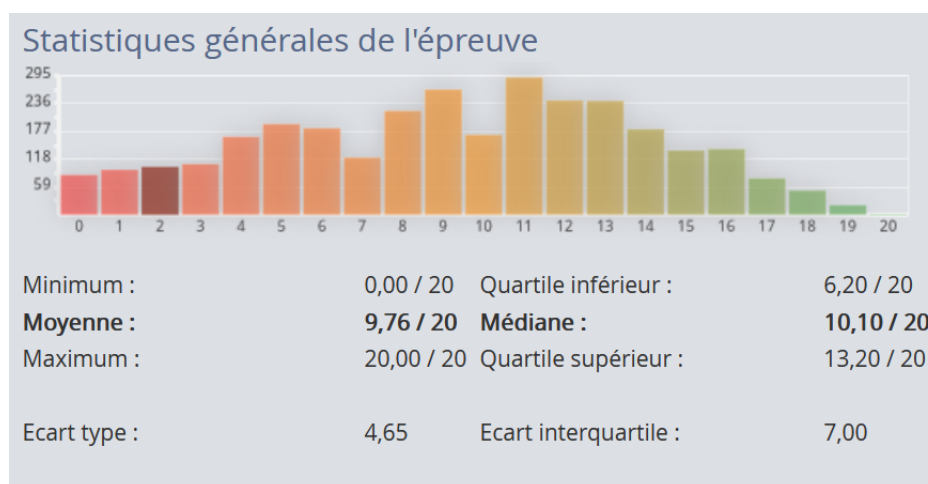




CONCOURS ABCPST - SESSION 2021

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT



L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.

De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'est pas difficile d'acquérir en s'entraînant.

Lors de l'utilisation d'un théorème, il est nécessaire de s'assurer que ses hypothèses sont vérifiées. La justification des calculs menés fait partie des points évalués par le jury.

Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

I. Étude d'un cas particulier

1. Il faut citer la formule des probabilités totales et préciser le système complet d'événements utilisé. La convention $0^0 = 1$ a posé problème.
2. Le jury a décidé de récompenser ici la méthode pour ne pas pénaliser ceux qui savent diagonaliser une matrice mais n'avaient pas obtenu la bonne à la question précédente. Il s'est donc adapté à la matrice obtenue à la question précédente.

La méthodologie de la réduction est bien connue. Il y a encore des confusions entre l'ordre, le rang, la taille, la dimension et certains candidats affirment à tort que leur matrice est symétrique, mais beaucoup moins que les années passées.

Nous saluons le travail effectué par les professeurs dans un contexte difficile.

Pour éviter les erreurs de calcul, on peut vérifier rapidement au brouillon que les vecteurs propres trouvés sont justes. Il est aussi possible de faire preuve de recul face à un résultat faux, notamment lorsque l'on obtient une matrice P clairement non inversible ou un vecteur propre nul.

3. Les récurrences sont globalement bien rédigées et les méthodes d'inversion de matrices sont connues. Il ne faut pas hésiter à vérifier rapidement P^{-1} avant de se lancer dans le calcul de M^n . Là encore, si le résultat est faux pour $n = 1$, une remarque, voire une correction des calculs, est appréciable.
4. Il fallait ici avoir la bonne matrice de départ pour arriver au résultat. A nouveau l'exploitation de M^n fautive pour obtenir les probabilités était récompensée, mais ne pouvait permettre d'obtenir l'égalité des espérances.

II. Cas général

5.
 - (a) Seul un tiers des candidats reconnaissent l'espérance d'une loi binomiale.
 - (b) Cette question nécessitait l'utilisation d'une somme double et a été très peu traitée.
 - (c) Le mot "moyenne" était attendu. L'interprétation était possible sans avoir traité les questions précédentes et aurait pu être abordée plus souvent.
6.
 - (a) Les candidats ne maîtrisent pas bien les notations mathématiques. L'évènement $X_n \in \{0, 2N\}$ a souvent été confondu avec $X_n \in \llbracket 0, 2N \rrbracket$. Pour ceux qui parviennent à découper la probabilité cherchée en deux, les minorations sont souvent sources d'erreurs.
 - (b) Cette question nécessitait d'utiliser la formule des probabilités totales, de justifier que certaines probabilités conditionnelles étaient égales à 1 et d'utiliser la question précédente ; elle n'a que très rarement été bien traitée
 - (c) Il s'agissait de trouver l'expression d'une suite arithmético-géométrique. Moins de 20% des candidats ont intégralement traité cette question.
 - (d) Il fallait faire le lien entre les suites u et w (qui ne sont pas égales) et faire preuve d'initiative pour généraliser le résultat de la question 4b. On pouvait néanmoins deviner le résultat et l'interpréter.

Partie II : Équilibre de Hardy-Weinberg

7. La loi binomiale est très souvent identifiée mais les justifications sont trop souvent partielles.
8. C'est une question de cours qui a été réussie dans 70% des copies.
9. Il s'agissait d'une question de cours. Elle a été souvent abordée mais moins de 10% des candidats ont eu l'intégralité des points.
La plupart du temps l'intégrale est correcte mais rarement justifiée. Ceux qui citent le théorème limite central ou celui de Moivre-Laplace sont souvent bien en peine d'en vérifier convenablement les hypothèses.
10.
 - (a) Une partie significative des candidats repère une matrice symétrique réelle.
 - (b) Question globalement bien traitée

- (c) La positivité de la variance est souvent citée mais les valeurs propres n'étaient pas $V(N_1)$ et $V(N_2)$. Les candidats n'ont pas le réflexe de bien poser le problème : « Soit λ une valeur propre de W et $X \neq 0$ un vecteur propre associé... »
 - (d) Question délicate correctement traitée dans une dizaine de copies.
 - (e) Il s'agissait d'utiliser le théorème spectral et la question précédente.
11. Il s'agissait d'un simple calcul matriciel qui nécessitait de connaître la transposée d'un produit.
 12. (a) On pouvait soit utiliser que $N_1 + N_2 = N - N_3$ soit dire que $N_1 + N_2$ est le nombre d'individus de type 1 ou 2.
 - (b) Il fallait utiliser la formule de polarisation ou au moins la donner.
 - (c) La formule de l'inverse d'une matrice 2x2 devrait être mieux connue. La fin du calcul nécessitait une bonne dextérité.
 - (d) Il s'agissait d'une question technique.

Partie III : Étude de la loi limite

13. Il s'agit d'une question classique, souvent abordée, mais incroyablement bâclée. Citons quelques points qui ont posé problème.
 - Tout d'abord, l'énoncé demandait de montrer que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)$ était une densité de Z^2 et pas de montrer que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)$ était une densité.
 - Ensuite, la plupart des candidats introduisent un x jamais clairement défini et écrivent : $\mathbb{P}(Z^2 \leq x) = \mathbb{P}(Z \leq \sqrt{x})$ sans aucune justification ; d'autres, écrivent $\mathbb{P}(Z^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x})$ sans se préoccuper de savoir si x est positif. Il faut être plus rigoureux.
 - La majorité des copies ne connaissent pas les hypothèses de régularité à vérifier ou se contentent de les affirmer. Plus précisément, peu de copies vérifient la continuité de F et concernant la dérivabilité, le jury attend que soient clairement précisés les points où F n'est pas dérivable ; un simple « sauf éventuellement en un nombre fini de points » n'est pas suffisant. .
 - Enfin, la dérivation d'une composée de fonctions doit être acquise et il convient de ne pas dériver la fonction racine carrée en 0.
14. Il serait bon de préciser qu'il faut la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} t f_{Z^2}(t) dt$. Beaucoup de calculs n'aboutissent pas alors que la formule de Koenig-Huygens permettait d'obtenir l'espérance de Z^2 sans calculs.
15. De manière très surprenante, le théorème de changement de variable est très malmené. Les hypothèses ne sont pas connues et le calcul lui-même est souvent faux.
16. (a) Il était indispensable de vérifier les hypothèses du théorème donné avant de l'appliquer. La gestion des fonctions indicatrices a posé également des difficultés.
- (b) Quelques très rares candidats repèrent la loi exponentielle et trouvent la bonne valeur de C .
Précisons que la linéarité de l'espérance ne nécessite aucune hypothèse d'indépendance.