SESSION 2021

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont interdites. Les téléphones portables et autres «smartphones» doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits. Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLÈME 1

La partie A est consacrée à la résolution d'une équation différentielle (E). Deux fonctions sont étudiées en partie B : d'une part, une solution particulière de (E) qui est une fonction de densité et d'autre part une fonction permettant le calcul d'une intégrale généralisée à l'aide d'une série. Dans la partie C, on calcule une espérance et on utilise le résultat obtenu en partie B pour en déduire une variance.

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) ci-dessous à résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(1+e^x)y' - y + \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 = 0.$$

1. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. (a) Appliquer la méthode de variation de la constante et en déduire que y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\left(\lambda + \frac{1}{1+e^x}\right).$$

   (b) En discutant selon λ, déterminer un équivalent (le plus simple possible) de cette solution au voisinage de $+\infty$.

Partie B : Études de fonctions

On considère les fonctions f et g_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad g_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{e^{-kx}}{k}.$$

1. (a) Vérifier que f est une solution de (E) et étudier sa parité.
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Démontrer que f est une fonction de densité (dorénavant X désigne une variable aléatoire réelle dont f est une densité).
2. (a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_x^{+\infty} e^{-kt} \mathrm{d}t = \frac{e^{-kx}}{k}.$$
   (b) À l'aide d'une série géométrique de raison $-e^{-t}$, démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + (-1)^{n+1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} \mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\ln\left(1 + e^{-x}\right) - g_n(x)\right| \leqslant \frac{e^{-nx}}{n}.$$
   (d) En déduire enfin que :
$$\left| \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-x}\right) \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
3. (a) Démontrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) est absolument convergente (on admet que sa somme est $\frac{\pi^2}{12}$).
   (b) Déduire de ce qui précède que :
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C : Espérance et variance

1. (a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant e^{-x}.$$
   (b) Justifier que X admet une espérance et la calculer (on pourra considérer la parité de f).
2. Dans la dernière question de ce problème, on cherche à démontrer que X admet une variance et à la calculer.
   (a) À l'aide de deux intégrations par parties, que l'on justifiera avec soin, démontrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2} \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-x}\right) \mathrm{d}x.$$
   (b) Conclure.

PROBLÈME 2

Ce problème débute par l'étude probabiliste de la position d'un virus informatique. Cette étude menée en partie A amène à calculer une moyenne et une variance empirique en partie B. Un changement de modélisation aboutit à la résolution d'une équation matricielle (c'est-à-dire dont l'inconnue est une matrice) en partie C, cette étude étant complétée en partie D.

Dans tout le problème p désigne un réel appartenant à $]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.

Partie A : Une matrice diagonalisable

Un réseau informatique est constitué de deux serveurs notés A et B. À une date initiale, un virus s'introduit dans le serveur A. Au bout de deux semaines, ce virus reste en A avec une probabilité de p ou quitte A pour aller en B avec une probabilité de q. De même, s'il est en B, au bout de deux semaines, il peut y rester avec une probabilité de p ou revenir en A avec une probabilité de q. On admet qu'à chaque nouvelle quinzaine, le virus peut rester sur le même serveur ou le quitter avec les probabilités p et q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la probabilité de l'évènement «le virus se trouve en A au bout de $2n$ semaines» et v_n la probabilité de l'évènement «le virus se trouve en B au bout de $2n$ semaines».

1. Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier avec soin votre réponse.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n la matrice colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de coefficients u_n et v_n.
   (a) Préciser C_0 et déterminer $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = MC_n.$$
   (b) Justifier sans calcul que M est diagonalisable puis déterminer les espaces propres et les valeurs propres de M. En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant telles que :
   $$M = PDP^{-1}.$$
   (c) Calculer $PP^\top$ (produit de P par sa transposée) et en déduire P^{-1}.
3. (a) Déduire de ce qui précède, une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Ces suites sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites.
4. Quels résultats obtiendrait-on si le virus avait été initialement positionné sur le serveur B ?

Partie B : Moyenne et variance empiriques

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si au bout de $2i$ semaines le virus est sur le serveur A et -1, s'il est sur le serveur B. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la moyenne empirique de $(X_0, \dots, X_n)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_i pour tout $i \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i < j$.
   (a) Justifier que :
   $$\mathbb{P}(X_j = 1 | X_i = 1) = \mathbb{P}(X_{j-i} = 1).$$
   (b) En déduire une expression de $\mathbb{P}(X_j = 1, X_i = 1)$.
   (c) Déterminer de même une expression de $\mathbb{P}(X_j = -1, X_i = 1)$, $\mathbb{P}(X_j = 1, X_i = -1)$ et $\mathbb{P}(X_j = -1, X_i = -1)$.

(d) En déduire que $\mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \mathbb{P}(X_{j-i} = 1)$ puis calculer $\mathbb{E}(X_iX_j)$.

3. (a) Déterminer l'espérance de M_n.

   (b) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left(M_n^2\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{E}(X_iX_j).$$

   (c) Déduire de ce qui précède une expression de l'espérance de la variance empirique de $(X_0, \ldots, X_n)$.

Partie C : Équation matricielle

On souhaite modéliser la position du virus toutes les semaines plutôt que toutes les quinzaines. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note donc w_n la probabilité de l'évènement «le virus se trouve en A au bout de n semaines» et x_n la probabilité de l'évènement «le virus se trouve en B au bout de n semaines». Enfin on note D_n la matrice colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de coefficients w_n et x_n.

1. Quelle relation lie D_{2n} et C_n ?
2. On suppose qu'il existe au moins une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} = ND_n.$$

   (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(N^2 - M\right) C_n = 0.$$

   (b) En déduire que $N^2 = M$.

   (c) On pose $\Delta = P^{-1}NP$. Démontrer que $\Delta^2 = D$ et en déduire que Δ est une matrice diagonale et que $p - q$ vérifie une égalité à préciser. Donner alors toutes les matrices Δ solutions de $\Delta^2 = D$.

   (d) En déduire enfin qu'il existe au plus deux matrices N solutions du problème.

Partie D : Généralisation de l'équation précédente

On souhaite généraliser la recherche précédente et on se pose la question suivante : peut-on affirmer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe une ou plusieurs matrice(s) $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle(s) que $N^2 = M$?

Dans cette partie, on note :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Démontrer que $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Im} M$.

   (b) Démontrer qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = QTQ^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Résoudre l'équation $\Theta^2 = T$ d'inconnue $\Theta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Conclure.