

DEVOIR SURVEILLÉ # 2

le Samedi 16/10/2021, 8h → 10h30



Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.



Problème 1 Agro/Véto 2016 – Calculs & Raisonnements (épreuve légèrement remaniée) (Solution : 4)

■ **Partie I — Étude d'une fonction** Soit f la fonction définie sur $D =]-1, +\infty[$, par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = e^{-x} \ln(1+x).$$

Pour tout le problème, on donne : $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,649$, $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1,948$.

1. Vérifier que f est dérivable sur D et montrer qu'il existe une fonction φ définie sur D telle que :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = e^{-x} \varphi(x).$$

2. 2.1) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α . On admettra que $\alpha \in]1/2, 1[$.

2.2) ➤_☞ Écrire une fonction d'en-tête `approx_alpha_dicho(prec)` qui retourne une valeur approchée de α à précision `prec`, en utilisant l'algorithme de dichotomie. On pourra commencer par créer une fonction d'en-tête `phi(x)` qui retourne $\varphi(x)$ pour tout x dans D .

2.3) Déterminer le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de $x \in D$.

3. Dresser le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative Γ dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Préciser les asymptotes ainsi que la tangente en O .

■ **Partie II — Recherche d'une valeur approchée de α au moyen d'une suite**

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, par :

$$\forall x \in I, \quad h(x) = e^{1/(x+1)} - 1.$$

4. 4.1) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ est équivalente à $h(x) = x$. Que dire de $h(\alpha)$?

4.2) Démontrer que $h(I) \subset I$.

5. Justifier que l'on peut définir alors la suite (U_n) suivante :

$$U_0 = 1, \quad U_{n+1} = h(U_n).$$

6. 6.1) Montrer que : $\forall x \in I, \quad -\frac{4}{9}e^{2/3} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{1/2}$.

6.2) En déduire qu'il existe un réel $\lambda \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \lambda |U_n - \alpha|.$$

6.3) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|U_n - \alpha| \leq \lambda^n |U_0 - \alpha|.$$

6.4) Établir la convergence de (U_n) , on précisera la limite.

7. ➤_☞ On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$, α est compris entre U_n et U_{n+1} . En déduire une fonction d'en-tête `approx_alpha_suite(prec)` qui retourne une valeur approchée de α à précision `prec`, en utilisant la suite (U_n) .

Problème 2 Agro/Véto 2016 – Calculs & Raisonnements (épreuve légèrement remaniée) (Solution : 6) Dans ce problème, n désigne un élément de \mathbf{N}^* .

■ **Partie I — Définitions et premières propriétés** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. Elle est dite *pseudo-inversible* s'il existe $B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ telle que :

$$\begin{cases} AB = BA, \\ ABA = A, \\ BAB = B. \end{cases} \quad (\star)$$

On dit alors que B est une *pseudo-inverse* de A. Nous allons notamment établir que toute matrice inversible est pseudo-inversible.

1. (Quelques exemples) Dans cette première question nous admettons provisoirement que si une matrice est pseudo-inversible, alors sa pseudo-inverse est unique. On s'autorise donc provisoirement à parler de *la* pseudo-inverse d'une matrice pseudo-inversible, et la note $B = A^*$.

- 1.1)** Montrer que la matrice nulle d'ordre n est pseudo-inversible. Déterminer sa pseudo-inverse.
- 1.2)** Montrer que toute matrice inversible M est pseudo-inversible. Déterminer sa pseudo-inverse.
- 1.3)** Soit N nilpotente d'ordre $p \geq 1$ (i.e. $N^p = 0$, et $N^{p-1} \neq 0$), et pseudo-inversible.
 - i)** Montrer que : $\forall k \geq 2, N^*N^k = N^{k-1}$. Quelle est la seule matrice nilpotente d'ordre $p = 1$?
 - ii)** En déduire que N est nulle, i.e. que $p = 1$.
 - iii)** Que peut-on en déduire concernant $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

2. (Preuve de l'unicité) Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ pseudo-inversible, on suppose l'existence de B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

- 2.1)** En calculant AB_1AB_2 de deux façons, montrer que $AB_2 = AB_1$ et que $B_2A = B_1A$.
- 2.2)** En déduire que $B_1 = B_2$. Ainsi, si la matrice A est pseudo-inversible, alors elle admet un unique pseudo-inverse appelée *la* pseudo inverse de A et notée A^* .

3. (Cas d'une matrice diagonalisable) On rappelle qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est *diagonalisable* s'il existe $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ inversible telle que :

$P^{-1}AP$ soit diagonale.

3.1) Toute matrice diagonale de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est-elle inversible? Si oui, le montrer, si non, fournir un contre-exemple. Dans la suite, on s'intéresse à la pseudo-inversibilité des matrices diagonales puis plus généralement diagonalisables.

3.2) (Cas particulier lorsque $n = 3$) Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

deux réels non nuls. Montrer que D est pseudo-inversible, et que

$$D^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3) En s'inspirant du cas précédent, montrer que toute matrice diagonale de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est pseudo-inversible et préciser sa pseudo-inverse.

3.4) Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ pseudo-inversible et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ inversible. Montrer que $A' = PAP^{-1}$ est pseudo-inversible et que

$$(A')^* = PA^*P^{-1}.$$

3.5) En conclure que toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible.

3.6) (Exemple lorsque $n = 2$) Soient $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- i)** Chercher une matrice $P \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ inversible de sorte que $PD = AP$.
- ii)** En déduire que A est pseudo-inversible.

■ Partie II — Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la base canonique \mathcal{B} et on introduit l'endomorphisme canoniquement associé à A, i.e. l'endomorphisme $a : x \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \rightarrow Ax$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, qui vérifie $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(a)$. Le but de cette partie est d'établir l'équivalence ci-dessous :

$$A \text{ pseudo-inversible} \iff \text{Ker } a \cap \text{Im}(a) = \{0\}.$$

Nous admettrons l'implication directe, et montrerons uniquement

$$\text{Ker } a \cap \text{Im}(a) = \{0\} \implies A \text{ pseudo-inversible.}$$

4. Dans cette question on suppose donc que $\text{Ker } a \cap \text{Im}(a) = \{0\}$. On définit l'application $a_0 : \text{Im}(a) \rightarrow \text{Im}(a), x \mapsto a(x)$, elle est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire.

- 4.1)** Calculer le noyau de a_0 puis en déduire que a_0 est un automorphisme de $\text{Im}(a)$.
- 4.2)** On considère une base (e_1, \dots, e_s) de $\text{Ker } a$ et (f_1, \dots, f_r) une base de $\text{Im}(a)$ où $r = \text{Rg } a$.
 - i)** Donner une relation entre r, s, n .

- ii) Montrer que $(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
- iii) En déduire que pour tout $x \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker } a \times \text{Im}(a)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

4.3) On définit l'application b de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la manière suivante : pour tout $x \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on considère l'unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker } a \times \text{Im}(a)$ tel que $x = x_1 + x_2$ et on pose $b(x) = (a_0)^{-1}(x_2)$. Montrer que b est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

4.4) Montrer que :

$$\begin{cases} a \circ b = b \circ a, \\ a \circ b \circ a = a, \\ b \circ a \circ b = b. \end{cases}$$

4.5) En déduire que A est pseudo-inversible.

5. On suppose dans cette question l'équivalence complète établie. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. Montrer que A est pseudo-inversible si et seulement si elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 \text{ inversible.}$$

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé 1)

■ **Partie I — Étude d'une fonction** Soit f la fonction définie sur $D =]-1, +\infty[$, par :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = e^{-x} \ln(1+x).$$

1. la fonction f est dérivable sur D en tant que produit de telles fonctions, et :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = e^{-x} \left(-\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right).$$

On définit donc $\varphi : x \in D \mapsto \left(\frac{1}{1+x} - \ln(1+x) \right)$.

2. 2.1) Il s'agit ici d'appliquer le théorème de la bijection à φ sur D . La fonction φ est elle-aussi dérivable sur D et pour tout $x \in D$,

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0,$$

donc φ est continue strictement décroissante. De plus,

$$\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \ln(1+x) \left(\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} - 1 \right),$$

or par croissances comparées et composition des limites $(x+1)\ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, donc $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$. Nous avons donc montré que

$$\varphi(D) = \mathbf{R} \ni 0,$$

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α . On admettra que $\alpha \in]1/2, 1[$.

2.2)

```
import math as ma
def phi(x):
    return 1/(1+x)-ma.log(1+x)
```

```
def approx_alpha_dicho(prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de phi
    """
    a = 1/2
    b = 1
    if phi(a)*phi(b) > 0:
        return False
    while b - a > prec:
        c = (a + b)/2
        if phi(a)*phi(c) <= 0:
            # changement de signe sur [a,c]
            b = c
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,c]
            a = c
    return (a + b)/2

Par exemple, approx_alpha_dicho(10**(-3)) retourne
0.76318359375.
```

2.3) Il vient directement :

- ▶ si $x \leq \alpha$, $\varphi(x) \geq 0$,
- ▶ si $x > \alpha$, $\varphi(x) < 0$.

3. On déduit alors le tableau suivant, puisque l'exponentielle est toujours stricte-

x	-1	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

ment positive.

La limite en -1 est obtenu par opérations usuelles sur les limites, celle en $+\infty$ par croissances comparées. Nous avons une asymptote verticale $x = -1$ au voisinage de $-\infty$, en $x = \alpha$ une tangente horizontale car φ s'annule en α . Voici la courbe.

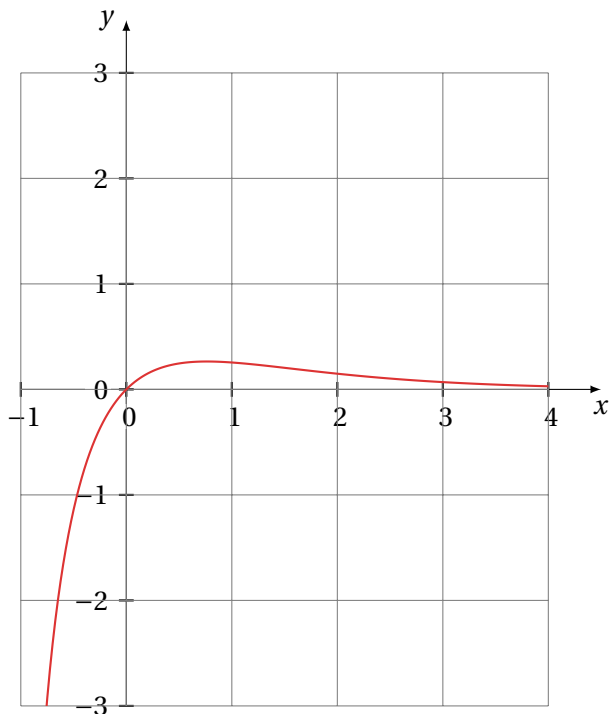


FIG. 0.1 : Graphe de f

■ Partie II — Recherche d'une valeur approchée de α au moyen d'une suite

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, par :

$$\forall x \in I, \quad h(x) = e^{1/(x+1)} - 1.$$

4. 4.1) Soit $x \in D$, alors

$$\varphi(x) = 0 \iff f'(x) = 0 \iff \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)$$

d'où en passant à l'exponentielle :

$$\varphi(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{1+x}} = x+1 \iff \boxed{h(x) = x}.$$

On obtient alors que $h(\alpha) = \alpha$ — c'est un point fixe de h .

4.2) La fonction h est dérivable et pour tout $x \in I$, $h'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} \leq 0$.

Donc h est décroissante et donc $h(I) = [h(1), h(1/2)] = [e^{1/2} - 1, e^{3/2} - 1] \subset I$ en utilisant les valeurs approchées rappelées en introduction. Donc $\boxed{h(I) \subset I}$.

5. Récurrence immédiate : puisque $U_0 \in I$, $h(U_0)$ aussi donc U_1 est bien défini, et donc $U_n = h(U_{n-1})$ est bien défini pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

6. 6.1) pour tout $x \in I$, $h'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$, puis en redérivant : $h''(x) = e^{\frac{1}{x+1}} \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, donc h' est une fonction croissante, et l'on déduit :

$$\forall x \in I, \quad -\frac{4}{9} e^{2/3} h'(1/2) \leq h'(x) \leq h'(1) = -\frac{1}{4} e^{1/2},$$

$$\text{d'où : } \boxed{\forall x \in I, \quad -\frac{4}{9} e^{2/3} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{1/2}.}$$

6.2) Appliquons l'égalité des accroissements finis à la fonction h entre U_n et α pour tout $n \in \mathbf{N}$. La fonction h est continue dérivable sur I tout entier, donc il existe c_n entre U_n et α tel que :

$$|U_{n+1} - \alpha| = |h(U_n) - h(\alpha)| = |h'(c_n)| |U_n - \alpha|.$$

En passant à la valeur absolue dans la question précédente, on a :

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{4} e^{1/2} \leq |h'(x)| \leq \frac{4}{9} e^{2/3} = \lambda < 1,$$

donc comme $U_n, \alpha \in I$,

$$|h'(c_n)| \leq \lambda \in]0, 1[.$$

Donc, en conclusion :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{|U_{n+1} - \alpha| \leq \lambda |U_n - \alpha|}.$$

6.3) Faisons une récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. Pour $n = 0$, la propriété est trivialement vérifiée puisque $\lambda^0 = 1$. Supposons-là vraie au rang n , alors

$$\begin{aligned} |U_{n+1} - \alpha| &\leq \lambda |U_n - \alpha| \\ &\leq \lambda \lambda^n |U_0 - \alpha| \quad \left. \begin{array}{l} \text{hyp. de récurrence} \\ \downarrow \end{array} \right\} \\ &\leq \lambda^{n+1} |U_0 - \alpha|. \end{aligned}$$

D'où la propriété par principe de récurrence.

6.4) Puisque $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc par théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \alpha}.$$

7. ➤ Désignons une fonction d'en-tête `approx_alpha_suite(prec)` qui retourne une valeur approchée de α à précision `prec`, en utilisant la suite (U_n) .

```

import math as ma
def h(x):
    return ma.exp(1/(1+x))-1

def approx_alpha_suite(prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de phi
    """
    U = 1
    V = h(U)
    while abs(V-U) > prec:
        W = h(V)
        U, V = V, W
    return (U+V)/2

```

Par exemple, `approx_alpha_suite(10**(-3))` retourne 0.763132790896212.

Solution (problème 2) (Énoncé 1)

■ Partie I — Définitions et premières propriétés

1. 1.1) On vérifie sans peine que la matrice nulle est pseudo-inversible, de pseudo-inverse la matrice nulle puisque $A = 0, B = 0$ vérifient (\star) .
- 1.2) Soit M une matrice inversible. Alors par définition $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$. On constate alors sans peine que le choix $A = M, B = M^{-1}$ dans (\star) fonctionne, puisque

$$I_n = I_n \quad I_n M = M, \quad I_n M^{-1} = M^{-1}.$$

Donc M est pseudo-inversible et $M^* = M^{-1}$.

- 1.3) La matrice N est pseudo-inversible et nilpotente d'ordre p .
 - i) D'après la première ligne de (\star) , les deux matrices N, N^* commutent, donc

$$N^* N^k = (N^* N) N^{k-1} = (N N^* N) N^{k-2}$$

car $k \geq 2$, mais $N N^* N = N^*$ d'après la deuxième ligne de (\star) . Donc

$$\boxed{N^* N^k = N N^{k-2} = N^{k-1}}.$$

La seule matrice nilpotente vérifiant $N = 0$ et $N^0 \neq 0$ est la matrice nulle.

- ii) Supposons que $p \geq 2$, $N^* N^p = N^{p-1}$ d'où $N^{p-1} = 0$ ce qui est contradictoire. Donc $p = 1$ et la matrice N est donc nulle (car la seule matrice nilpotente d'ordre 1 est la matrice nulle).
- iii) La matrice N de l'énoncé est bien nilpotente (d'ordre deux) car $N^2 = 0$ et $N \neq 0$. Si elle était pseudo-inversible, d'après la question précédente, on pourrait affirmer que N serait nilpotente d'ordre $p = 1$, ce qui n'est pas le cas car N est non nulle. Donc N n'est pas pseudo-inversible car N n'est pas égale à la matrice nulle.

2. Soient B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A . On souhaite montrer ici que $B_1 = B_2$.

2.1) $AB_1 AB_2 = (AB_1 A) B_2 = AB_2$ en utilisant la seconde ligne d' (\star) , puis d'autre part $AB_1 AB_2 = (AB_1) (AB_2) = (B_1 A) (B_2 A) = B_1 (AB_2 A) = B_1 A = AB_1$. En égalisant, on a donc montré :

$$\boxed{AB_1 = AB_2},$$

puis $B_2 A = B_1 A$ en utilisant la première ligne d' (\star) .

2.2) $AB_2 = AB_1$ d'après la question précédente, d'où en multipliant par B_2 à gauche et en utilisant la ligne 3 d' (\star) : $B_2 = B_2 AB_1$. Toujours d'après la question précédente $B_2 A = B_1 A$ d'où en multipliant par B_1 à droite $B_2 AB_1 = B_1 AB_1 = B_1$ d'où $B_1 = B_2 AB_1 = B_2$ et $B_1 = B_2$ Il y a donc unicité de la pseudo inverse.

3. 3.1) Non, la matrice nulle est diagonale et pourtant non inversible (car de rang 0).

3.2) Posons $D' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $DD' = D'D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

et $DD'D = D, D'DD' = D'$ donc D est pseudo-inversible telle que

$$\boxed{D^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

3.3) Soit $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale. Définissons, comme dans le cas précédent, $D' = \text{Diag}(b_1, \dots, b_n)$ tel que si $d_i \neq 0$, $b_i = \frac{1}{d_i}$, sinon on pose $b_i = 0$.

On vérifie sans peine que D' est la pseudo-inverse de D .

3.4) Soit A^* pseudo inverse de A . On montre que $B = P^{-1}A^*P$ est la pseudo-inverse de A' . En effet :

$$A'B = P^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}AA^*P = P^{-1}A^*AP = P^{-1}A^*PP^{-1}AP = BA'$$

$BA'B = P^{-1}A^*PP^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}A^*AA^*P = P^{-1}AP = A'$. De même, on montre que $A'BA' = B$. Ainsi

A' est pseudo-inversible et sa pseudo-inverse est $P^{-1}A^*P$.

3.5) Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice diagonale D : il existe donc P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, $A = Q^{-1}DQ$ avec $Q = P^{-1}$. La matrice D étant diagonale, elle est pseudo-inversible, et donc A l'est aussi d'après la question précédente.

3.6) i) Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$. Alors $PD = AP$ équivaut à :

$$3 \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ -2a+4c & -2b+4d \end{pmatrix}.$$

On obtient dès lors les conditions suivantes :

$$4a = 2c, \quad b = 2d, \quad c = 2a, \quad 2b = 4d.$$

Soit $2a = c, b = 2d$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ convient car elle est inversible.

ii) Donc A et D sont semblables, donc A est diagonalisable, et elle est pseudo-inversible. Des questions précédentes on déduit que :

$$A^* = PD^*P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Partie II — Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles

4. 4.1) Montrons que a_0 est un endomorphisme de $\text{Im}(a)$. Soit $x \in \text{Ker } a_0$, i.e. $a_0(x) = 0$ et $x \in \text{Im}(a)$ donc $x \in \text{Ker } a \cap \text{Im}(a) = \{0\}$. Donc $\text{Ker } a_0 = \{0\}$ et a_0 est injectif. Puisque a_0 est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, nous avons alors que a_0 est un automorphisme.

4.2) i) D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } a + \text{Rg}(a) = \dim E$ donc $n = r + s$.

ii) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r$ tels que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_r f_r = 0.$$

Alors en appliquant a :

$$a(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_r f_r) = 0,$$

d'où $\beta_1 a(f_1) + \dots + \beta_r a(f_r) = 0$ car $e_1, \dots, e_s \in \text{Ker } a$ et car a est linéaire. D'où :

$$\beta_1 a_0(f_1) + \dots + \beta_r a_0(f_r) = 0.$$

Or a_0 est un endomorphisme bijectif, donc l'image d'une base de $\text{Im}(a)$ est encore une base de $\text{Im}(a)$. Ainsi $(a_0(f_1), \dots, a_0(f_r))$ est une famille libre donc $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Ainsi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s = 0$, et (e_1, \dots, e_s) est aussi une famille libre donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$. En conclusion, $(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = n = \#(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$, nous obtenons donc le résultat souhaité :

$(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

iii) Tout vecteur x se décompose sur la base ci-dessus. Il existe une unique famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r)$ telle que :

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_r f_r.$$

On pose $x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s \in \text{Ker } a$ (car c'est une combinaison linéaire d'éléments de $\text{Ker}(a)$) et $x_2 = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_r f_r \in \text{Im}(a)$ (car c'est une combinaison linéaire d'éléments de $\text{Im}(a)$).

Montrons l'unicité : si $x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ avec $x_1, x_3 \in \text{Ker } a$ et $x_2, x_4 \in \text{Im}(a)$, on a alors $x_1 - x_3 = -x_2 + x_4$. Nous avons $x_1 - x_3 \in \text{Ker } a \cap \text{Im}(a) = \{0\}$ d'où $x_1 = x_3$, $-x_2 + x_4 = 0$ d'où $x_2 = x_4$. Il y a donc unicité de la décomposition.

Pour tout x , il existe un unique couple (x_1, x_2) tel que $x_1 \in \text{Ker } a$ et $x_2 \in \text{Im}(a)$ et $x = x_1 + x_2$.

4.3) On pose $b(x) = (a_0)^{-1}(x_2)$. L'application b est une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Soient $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, λ, μ , donnons de plus un nom aux décompositions de x, y : $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in \text{Ker } a$ et $x_2, y_2 \in \text{Im}(a)$. Nous avons $\lambda x + \mu y = \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 = z_1 + z_2$ avec $z_1 = \lambda x_1 +$

$\mu y_1 \in \text{Ker } a$ et $z_2 = \lambda x_2 + \mu y_2 \in \text{Im}(a)$. D'où $b(\lambda x + \mu y) = (a_0)^{-1}(\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda(a_0)^{-1}(x_2) + \mu(a_0)^{-1}(y_2)$ car $(a_0)^{-1}$ est linéaire, donc $b(\lambda x + \mu y) = \lambda b(x) + \mu b(y)$ et b est bien linéaire. b est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

4.4) On reprend les mêmes notations que dans la question précédente. Nous avons $a \circ b(x) = a((a_0)^{-1}(x_2)) = x_2$. De plus $b \circ a(x) = b \circ a(x_2) = (a_0)^{-1}(a(x_2))$ car $a(x_2) \in \text{Im}(a)$ d'où $b \circ a(x) = x_2$. Donc pour tout x , $a \circ b(x) = b \circ a(x)$ d'où $a \circ b = b \circ a$. On vérifie de la même manière les autres conditions.

4.5) Soit B la matrice de b dans la base canonique, alors B vérifie les conditions de pseudo-inversibilité comme nous venons de le montrer. Donc A est pseudo-inversible, de pseudo-inverse B .

5. \Leftarrow Soit $A' = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A_0 étant inversible, elle est pseudo-

inversible de pseudo inverse A_0^{-1} . Posons $B' = \begin{pmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors B' vérifie (\star) ,

donc A' est pseudo-inversible de pseudo inverse B' . Or A est semblable à A' , donc A est pseudo-inversible aussi.

\Rightarrow Réciproquement, supposons que A soit pseudo-inversible. D'après une question précédente $\text{Im}(a) \cap \text{Ker } a = \{0\}$. On peut donc construire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ notée $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_r, e_1, \dots, e_s)$ comme ci-dessus. Comme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) =$

$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où A_1 est la matrice de a_0 dans la base (f_1, \dots, f_r) de $\text{Im}(a)$. Com-

ma a_0 est bijectif, A_1 est inversible. Les matrices A et $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ représentent

le même endomorphisme dans deux bases différentes donc sont semblables.

A est pseudo-inversible si et seulement si A est semblable à une matrice de la

forme $\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A_0 inversible.