DEVOIR MAISON # 2

à rendre le Mardi 12/10/2021

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet <u>est complètement inutile pour tout le monde.</u>

Problème 1 ***Matrice semblable à elle-même*** (Solution : 3) On dit que deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ sont semblables s'il existe P inversible à coefficients réels de format 3×3 telle que $B = P^{-1}AP$. On notera $A \sim B$.

Dans tout le problème, E désignera un **R**-espace vectoriel de dimension 3. Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $u^n = u\circ\ldots\circ u$ la puissance n-ième de u.

1. Soient A, B, C trois matrices de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$. Montrer que $A\sim C$ et $B\sim C$ alors $A\sim B$. Autrement dit, si deux matrices sont semblables à une même troisième matrice, alors elles sont semblables.
2. Soient A, B deux matrices de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$. Montrer que si $A\sim B$ alors $A+I_3 \sim B+I_3$.

Partie I — Premier exemple

Dans cette partie seulement, on considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
4. En calculant P^2, montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
5. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire que A, A^{-1} sont semblables.

Partie II — Résultat théorique

6. Soient f, g deux endomorphismes de u, et $h = g|_{\mathrm{Ker}\,(f\circ g)}$ l'application g restreinte à $\mathrm{Ker}\,(f\circ g)$, *i.e.*

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\,(f\circ g) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x). \end{array} \right.$$

6.1) Montrer que $\mathrm{Im}\,(h) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

6.2) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker} f\circ g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) \quad (\star)$.

7. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 2$.

7.1) En utilisant $(\star)$, montrer que :

$$\dim\mathrm{Ker}\,(u^3) - \dim\mathrm{Ker}\,(u) \leqslant \dim\mathrm{Ker}\,(u^2) \leqslant 2\dim\mathrm{Ker}\,(u).$$

7.2) En déduire que $\dim\mathrm{Ker}\,(u^2) = 2$.

7.3) Montrer qu'il existe $a\in E$ non nul tel que $u^2(a) \neq 0_E$. En déduire que la famille $\mathscr{B} = (u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

7.4) Montrer que la matrice U de u dans $\mathscr{B}$ est

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et calculer la matrice V de $u^2 - u$ dans $\mathscr{B}$.

8. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 1$.

8.1) Montrer qu'il existe $b\in E$ non nul tel que $u(b) \neq 0_E$.

8.2) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}\,(u)$ tel que $(u(b), c)$ soit libre. *<u>Indication :</u> On pourra raisonner par l'absurde, et ainsi supposer que pour tout c dans $\mathrm{Ker}\,(u)$, $(u(b), c)$ est liée et constater qu'alors $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Im}\,(b)$.*

8.3) En déduire que la famille $\mathscr{B}' = (b, u(b), c)$ est une base de E, où c est choisi comme dans la question précédente.

8.4) Montrer que la matrice U' de u dans $\mathscr{B}'$ est

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et calculer la matrice V' de $u^2 - u$ dans $\mathscr{B}'$.

Partie III — Représentation matricielle de certains endomorphismes nilpotents

Soit désormais une matrice $A \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ quelconque, semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R}).$$

On se propose de montrer que A est semblable à A^{-1}. On introduit pour cela $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et P inversible réelle de format 3×3 de sorte que

$$P^{-1}AP = T = I_3 + N.$$

9. Si $N = 0$, montrer que A, A^{-1} sont semblables.

10. Montrer que $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} T$, puis justifier que A est bien inversible.

11. Calculer N^3, puis montrer que $I_3 + N$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$.

12. En déduire que : $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

13. On suppose que $\operatorname{Rg} N = 2$ et on pose $M = N^2 - N$, de sorte que

$$P^{-1}A^{-1}P = I_3 + M.$$

13.1) En utilisant la partie précédente, montrer que N est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et déterminer une matrice semblable à M.

13.2) Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{Rg} M$.

13.3) En utilisant la partie précédente, montrer que M, N sont semblables.

13.4) En déduire alors que A, A^{-1} sont semblables.

14. On suppose dans cette question que $\operatorname{Rg} N = 1$ et on pose $M = N^2 - N$. Montrer que A, A^{-1} sont semblables.

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé : 1)

1. Soient A, B, C trois matrices de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$. Supposons que $A \sim C$ et $B \sim C$, alors il existe P_1, P_2 toutes deux inversibles telles que :

$$A = P_1^{-1}CP_1, \quad B = P_2^{-1}CP_2 \quad \Longleftrightarrow \quad C = P_2BP_2^{-1}.$$

Donc en combinant : $A = P_1^{-1}P_2BP_2^{-1}P_1 = (P_2^{-1}P_1)^{-1}B(P_2^{-1}P_1)$, *i.e.* $\boxed{A \sim B}$.

2. Soient A, B deux matrices de $\mathfrak{M}_{3,3}(\mathbf{R})$. Supposons que $A \sim B$ alors il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$. Donc $A + I_3 = P^{-1}BP + P^{-1}I_3P = P^{-1}(B + I_3)P$, *i.e.* $\boxed{A + I_3 \sim B + I_3.}$

Partie I — Premier exemple

Dans cette partie seulement, on considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Après application de la méthode du miroir, on trouve que A est inversible avec $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$

4. On constate que $P^2 = I_3$ donc P est inversible d'inverse elle-même : $\boxed{P^{-1} = P.}$

5. Après calculs, $P^{-1}AP = PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$ d'où l'on déduit que $\boxed{A, A^{-1} \text{ sont semblables.}}$

Partie II — Résultat théorique

6. Soient f, g deux endomorphismes de E, et $h = g|_{\mathrm{Ker}(f\circ g)}$ l'application g restreinte à $\mathrm{Ker}(f \circ g)$, *i.e.*

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(f\circ g) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x). \end{array} \right.$$

6.1) Soit $y \in \mathrm{Im}(h)$, alors il existe $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$ tel que $y = g(x)$. Mais alors $f(y) = f \circ g(x) = 0$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(f).}$

6.2) D'après la question précédente, nous avons $\mathrm{Rg}\, h \leqslant \dim \mathrm{Ker}(f)$, par ailleurs, en appliquant le théorème du rang à h, on a :

$$\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) = \dim \mathrm{Ker}\, h + \mathrm{Rg}\, h \leqslant \dim \mathrm{Ker}(h) + \dim \mathrm{Ker}(f).$$

A-t-on $\dim \mathrm{Ker}(h) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(g)$? Oui puisque $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$, en effet si $h(x) = 0$ avec $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g) \subset E$ alors $g(x) = 0$ avec $x \in E$, donc $x \in \mathrm{Ker}(g)$. D'où en conclusion : $\boxed{\dim(\mathrm{Ker} f \circ g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) \quad (\star).}$

7. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 2$.

7.1) Appliquons $(\star)$ avec $f = u, g = u^2$:

$$\dim \mathrm{Ker}(u^3) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u^2),$$

donc

$$\dim \mathrm{Ker}(u^3) - \dim \mathrm{Ker}(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u^2),$$

on a donc obtenu le membre de gauche de l'inégalité. Reste à établir que

$$\dim \mathrm{Ker}(u^2) \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}(u).$$

Pour cela il suffit d'appliquer $(\star)$ avec $f = g = u$. En conclusion, on a montré que :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(u^3) - \dim \mathrm{Ker}(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u^2) \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}(u).}$$

7.2) Puisque u^3 est nul, on sait qu'il est de rang 0, donc $\dim \mathrm{Ker}(u^3) = \dim E = 3$ d'après le théorème du rang. Et comme u est de rang 2, d'après le théorème du rang $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1. Donc finalement, la question précédente donne :

$$3 - 1 \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u^2) \leqslant 2.1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dim \mathrm{Ker}(u^2) = 2}.$$

7.3) $\boxed{\text{Il existe } a \in \mathrm{E} \text{ non nul tel que } u^2(a) \neq 0_\mathrm{E}}$, car dans le cas contraire u^2 serait nul et donc $\dim \mathrm{Ker}\left(u^2\right) = \dim \mathrm{E}$ serait égal à 3 — contradiction.
Montrons alors que $\mathscr{B} = \left(u^2(a), u(a), a\right)$ est une base de E. C'est une famille de cardinal 3 (en effet, si $u^2(a) = u(a)$ alors $0 = u^2(a)$ en composant par u— contradiction et faire de-même pour les autres cas), et par ailleurs $\dim \mathrm{E} = 3$, il suffit donc de montrer la liberté. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tels que

$$\lambda u^2(a) + \mu u(a) + \nu a = 0,$$

alors en appliquant à gauche u^2, qui est linéaire, on obtient :

$$0 + 0 + \nu u^2(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu = 0$$

car $u^2(a) \neq 0$. On a alors

$$\lambda u^2(a) + \mu u(a) = 0,$$

alors en appliquant à gauche u, qui est linéaire, on obtient :

$$0 + \mu u^2(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 0$$

donc

$$\lambda u^2(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

donc finalement la famille $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de E.}}$

7.4) On a les relations $u(u^2(a)) = 0, u(u(a)) = 1.u^2(a)$ et $u(u(a)) = 1.u^2(a), u(a) = 1.u(a)$, donc

$$\boxed{\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

après simples calculs matriciels, on déduit

$$\boxed{\mathrm{V} = \mathrm{U}^2 - \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

8. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 1$.

8.1) $\boxed{\text{Il existe } b \in \mathrm{E} \text{ non nul tel que } u(b) \neq 0_\mathrm{E},}$ car sinon u est l'endomorphisme nul et donc il serait de rang 0.

8.2) Supposons que pour tout $c \in \mathrm{Ker}\,(u)$, $(u(b), c)$ est liée, *i.e.* il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\lambda u(b) = c \in \mathrm{Im}\,(u)\,,$$

donc $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Im}\,(u)$, mais alors $\dim \mathrm{Ker}\,(u) \leqslant 1$, et d'après le théorème du rang $3 = \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Rg}\, u \leqslant 2$—contradiction. Donc :
$\boxed{\text{il existe } c \in \mathrm{Ker}\,(u) \text{ tel que } (u(b), c) \text{ soit libre.}}$

8.3) Notons $\mathscr{B}' = (b, u(b), c)$, on vérifie comme précédemment que $\#\,\mathscr{B}' = 3 = \dim \mathrm{E}$, montrons la liberté. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0$. Alors en appliquant u, on a

$$\lambda u(b) + \mu u^2(b) + 0 = \lambda u(b) = 0,$$

donc comme $u(b) \neq 0_\mathrm{E}$, on a $\lambda = 0$ et donc

$$\mu u(b) + \nu c = 0.$$

Or la famille $\mathscr{B}' = (b, u(b), c)$ est libre, donc

$$\mu = \nu = 0.$$

En conclusion, $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de E.}}$

8.4) On a les relation $u(b) = 1.u(b), u(u(b)) = 0, u(c) = 0$ donc

$$\boxed{\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

puis

$$\boxed{\mathrm{V}' = \mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Partie III — Représentation matricielle de certains endomorphismes nilpotents

9. Si $N=0$, on a $P^{-1}A^{-1}P=I_3$, et donc $A=I_3=A^{-1}$, donc $\boxed{A\sim A^{-1}}$ (choisir pour P la matrice identité dans la définition).

10. Puisqu'on ne change pas le rang en multipliant à droite ou à gauche par une matrice inversible, on a $\boxed{\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} T}$. Comme T est de rang 3, la matrice $\boxed{\text{A est également de rang 3, et est donc inversible.}}$

11. On a $\boxed{N^3=0}$ puis on calcule

$$\begin{aligned}(I_3+N)(I_3-N+N^2)&=I_3-N+N^2+N-N^2+N^3\\&=I_3+N^3\\&=I_3,\\(I_3-N+N^2)(I_3+N)&=I_3-N+N^2+N-N^2+N^3\\&=I_3+N^3\\&=I_3.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{I_3+N \text{ est inversible d'inverse } I_3-N+N^2.}$

12. On peut inverser l'égalité $P^{-1}AP=I_3+N$ car chacun des termes est inversible, et

$$(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}(I_3+N)^{-1}=I_3-N+N^2,$$

donc $\boxed{P^{-1}A^{-1}P=I_3-N+N^2}$.

13. On suppose que $\operatorname{Rg} N=2$ et on pose $M=N^2-N$, de sorte que

$$P^{-1}A^{-1}P=I_3+M.$$

13.1) Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à N, *i.e.* $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}(u)=N$ où $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ désigne la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Alors u vérifie $u^3=0$ puisque $N^3=0$, et $\operatorname{Rg} N=\operatorname{Rg} u=2$ on peut donc utiliser les résultats de la question 7. Dans une certaine base la matrice de u est $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Cela signifie, d'après les formules de changement de base, que $\boxed{\text{N est semblable à }\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$

Toujours d'après la question 7), $\boxed{M=N^2-N \text{ est semblable à }\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$

13.2) Il existe P, P^{-1} inversibles tels que

$$M=P\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},$$

mais $\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3=0$ donc

$$M^3=P\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3P^{-1}=\boxed{0}.$$

Le rang de M est celui de $\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\operatorname{Rg} M=2.}$

13.3) Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à M, *i.e.* $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}(v)=M$ où $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ désigne la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Alors v vérifie $v^3=$

0 puisque $M^3 = 0$, et $\operatorname{Rg} M = \operatorname{Rg} v = 2$ on peut donc utiliser les résultats de la question 7. Dans une certaine base la matrice de v est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cela signifie, d'après les formules de changement de base, que $\boxed{\text{M est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Ainsi, $M \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc d'après la question 1), $\boxed{\text{M, N sont semblables.}}$

13.4) D'après 2), $I_3 + M \sim I_3 + N$. Donc $P^{-1}A^{-1}P \sim T = P^{-1}AP$. Ainsi, il existe Q inversible telle que

$$P^{-1}A^{-1}P = Q^{-1}P^{-1}APQ,$$

donc

$$A^{-1} = (PQP^{-1})^{-1}A(PQP^{-1}).$$

Donc $\boxed{\text{A, }A^{-1}\text{ sont semblables.}}$

14. On suppose dans cette question que $\operatorname{Rg} N = 1$ et on pose $M = N^2 - N$. Cette fois-ci on cherche à appliquer les résultats de la question 8). A-t-on $N^2 = 0$? Puisque N est de rang 1, soit α est nul, soit γ est nul (sinon la matrice serait de rang 2). Donc $\alpha\gamma = 0$, et donc

$$\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Donc notons u l'endomorphisme canoniquement associé à N, *i.e.* $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathscr{M}\text{at}}(u) = N$ où $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ désigne la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Alors u vérifie $u^2 = 0$ et $\operatorname{Rg} u = 1$ on peut donc utiliser les résultats de la question 8. Dans une certaine base la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cela signifie, d'après les formules de changement de base, que $\boxed{\text{N est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Puis $M = N^2 - N$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := B$. Or, $\operatorname{Rg} B = 1$ et $B^2 = 0$ donc B est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, M, N sont semblables à une même matrice, et donc on conclut ensuite de la même manière que dans la question précédente : $\boxed{\text{A, }A^{-1}\text{ sont semblables.}}$