ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Le sujet, relativement long, était constitué de deux problèmes totalement indépendants.

Le premier problème abordait l'étude des probabilités discrètes et en particulier de variables aléatoires réelles en lien avec les lois géométrique et binomiale. Ce problème s'achevait par l'utilisation du théorème de la limite centrale. Le second problème était consacré à quelques aspects des modèles proies-prédateurs. Après avoir démontré des résultats préliminaires d'analyse et d'algèbre, on s'attelait aux équations de prédation de Lotka-Volterra. La dernière partie, purement algébrique, proposait l'étude d'un modèle discret.

De nombreux résultats intermédiaires étaient donnés dans l'énoncé, ce qui a permis à certains candidats d'admettre la question et de pouvoir avancer dans le sujet. Mais cela impliquait alors qu'une réponse justifiée était attendue et qu'il ne s'agissait pas de paraphraser l'énoncé. De telles tentatives étaient systématiquement sanctionnées. À l'inverse, le sujet contenait également des questions plus ouvertes ou plus calculatoires : dès lors, tout début de réponse cohérent était valorisé. Finalement, la variété des thèmes abordés et la progressivité des différentes questions ont permis aux candidats faibles d'engranger quelques points alors que certains candidats particulièrement brillants sont parvenus à aborder la quasi totalité du sujet.

Si la présentation des copies nous a semblé globalement satisfaisante, les résultats importants étant en général bien mis en valeur, nous rappelons cependant que les candidats qui n'ont pas suffisamment soigné leur copie se sont vus retirer un nombre significatif de points.

PROBLÈME 1

Ce problème était consacré à l'étude d'une suite $(X_1^{(i)})_{i\in[\![1,n]\!]}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi et dont on cherchait à démontrer une propriété relative à leur somme. Ce problème a posé de grandes difficultés aux candidats (en particulier la partie B).

Partie A

Cette partie présentait deux variables aléatoires X_1 et X_2 dont on établissait les lois. Elle a été en général assez bien traitée mais nous conseillons vivement aux futurs candidats de bien réfléchir à la notion de probabilité conditionnelle. Par ailleurs nous rappelons que l'utilisation de la formule des probabilités totales doit toujours être signalée et justifiée à l'aide d'un système complet (ou quasi-complet) d'événements.

1. Trop peu de candidats ont justifié leur résultat par l'indépendance citée en hypothèse. Ensuite, pour conclure que $1 + X_1$ suivait une loi géométrique, il fallait impérativement commencer par vérifier que l'univers image est bien $\mathbb{N}^*$. Bien entendu, il ne fallait pas confondre la loi géométrique avec la loi notée $\mathcal{G}^{-1}$ dans l'énoncé.
2. Certains candidats ont confondu conditionnement et intersection. Il fallait s'interroger sur la signification de la probabilité conditionnelle cherchée. Rappelons enfin que $(X_2 = k|X_1 = j)$ n'est pas un événement de Ω et insistons sur la bonne rédaction de la formule des probabilités totales (il fallait ici citer le système quasi-complet d'événements associé à la variable aléatoire réelle X_1).

Partie B

Cette partie et la suivante ont été les moins bien comprises du sujet. Si le début de la partie B a été en général traité correctement, la fin fut souvent catastrophique. Aussi nous invitons les candidats à mieux connaître les propriétés de l'indépendance mutuelle et à étudier les démonstrations des propriétés de stabilité qui en découlent (par exemple pour la loi binomiale).

1. La première partie de la question n'a guère posé de problème ; beaucoup de candidats ont d'ailleurs inutilement redémontré la formule de Pascal. La fin de la question nécessitait à nouveau la formule des probabilités totales et le système quasi-complet d'événements associé à X_n.
2. L'indépendance demandée a souvent été très mal justifiée, certains ont essayé de la prouver par le calcul. Il s'agissait en fait d'une conséquence de la mutuelle indépendance des $(X_1^{(i)})_{i\in[\![1,n]\!]}$ et nous avons été extrêmement surpris de constater que peu de candidats ont cité ce résultat (souvent connu sous le nom de «lemme des coalitions», mais le mot «coalitions» n'était pas attendu de la part des candidats) ou l'ont énoncé d'une façon similaire à ce qui apparaît explicitement dans le programme de première ou de deuxième année BCPST. L'hérédité n'a en général pas été abordée, et parfois lorsqu'elle l'était, il y avait manifestement une confusion entre la loi binomiale et la loi $\mathcal{B}^{-1}$. Enfin, la dernière question relative à $X_n + X_m$ n'a pas soulevé de difficulté.

Partie C

Cette dernière partie abordait le théorème de la limite centrale. Nous avons constaté une très grande disparité dans la réussite de cette question. Encore une fois, signalons qu'un candidat qui a consciencieusement récité précisément les hypothèses de ce théorème et qui a vérifié qu'elles s'appliquaient dans le problème, a pu gagné quelques précieux points. Ainsi nous conseillons aux candidats de bien connaître les hypothèses de tous les théorèmes au programme en BCPST.

1. Cette question a souvent été abordée avec peu de rigueur dans l'argumentation. Précisons que l'égalité $P(A) = P(B)$ n'implique pas que $A = B$.
2. Le calcul de l'espérance et de la variance de X_n ne présentait pas de difficulté. Il fallait cependant utiliser judicieusement les questions 1.(b) des parties A et B et, encore une fois, un argument de mutuelle indépendance. Nous avons été étonnés de constater le taux d'échec élevé à cette question. La fin de la question a été très discriminante : régulièrement excellemment traitée mais trop souvent de façon approximative, de nombreux candidats oubliant même que le théorème de la limite centrale concerne une suite de variables aléatoires réelles.

PROBLÈME 2

Ce problème, souvent mieux compris que le premier, était essentiellement consacré à l'étude de modèle proie-prédateurs. Une première partie abordait deux questions préliminaires. La seconde question préliminaire comportait une erreur d'énoncé. Il nous est heureusement apparu qu'aucun candidat n'a été gêné par cette erreur, nous tenons cependant à présenter nos excuses aux candidats et à leurs enseignants. Le premier modèle étudié (partie B) était le modèle dit de Lotka-Volterra. Dans la partie C, on se consacrait à un modèle discret qui reposait, entre autres, sur la diagonalisation d'une matrice.

Partie A

Nous avons pu apprécier dans cette partie, en général fort bien comprise, la bonne maîtrise des candidats concernant l'analyse de première année et, dans une moindre mesure, la diagonalisation de matrices.

1. Cette première question a soulevé peu de difficultés. Signalons toutefois qu'il fallait justifier la dérivabilité d'une fonction avant de la dériver. De plus, quelques candidats ont interprété $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $x \geqslant 1$, d'autres ont, semble-t-il, oublié que ln n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. Il était crucial de justifier que l'on pouvait utiliser (a) car les quantités manipulées étaient toutes strictement positives.
2. L'ensemble $\mathcal{E}$ présenté n'était pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Insistons sur le fait que nous n'avons pas observé de copie où le candidat était manifestement embarrassé par cette erreur, il nous a au contraire semblé qu'elle était passée inaperçue pour l'immense majorité d'entre eux, d'ailleurs seuls deux candidats l'ont signalé explicitement dans leur copie. Nous n'avons évidemment pas sanctionné une erreur sur le corps des scalaires utilisé par les candidats. Il était aussi possible de faire apparaître $\mathcal{E}$ comme un sous-espace engendré par une partie, ce qui était à la fois efficace et utile pour la suite. De nombreux candidats ont obtenu sans difficulté une base de $\mathcal{E}$ mais trop peu ont justifié soigneusement la liberté de cette base (rappelons que ce n'est pas parce que des vecteurs sont non colinéaires qu'ils forment une famille libre).

3. Les justifications de diagonalisabilité ont parfois été approximatives. On a lu de nombreuses confusions entre diagonalisabilité et existence de valeurs propres, voire entre l'inversibilité de A et l'inversibilité de $A - \lambda I_2$. Signalons enfin qu'il existe des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisables mais n'ayant pas deux valeurs propres !

Partie B

Ici encore de nombreux candidats ont montré une bonne maîtrise des notions d'analyse abordées.

1. La majorité des candidats ont cherché à résoudre le système, souvent avec succès, alors qu'il s'agissait en fait d'une simple vérification, d'où parfois une perte de temps et de clarté. À notre grand étonnement, la seconde partie de la question a souvent été traitée de façon incomplète : il y avait deux couples à trouver mais beaucoup de candidats n'en ont trouvé qu'un seul (et pas toujours le même).
2. Cette seconde question s'est avérée très délicate : la négation de la proposition était souvent mal posée et les justifications apportées souvent très confuses. La deuxième partie de la question utilisait essentiellement un argument de continuité. Signalons enfin une erreur de compréhension de la question régulièrement rencontrée : on attendait que le candidat prouve que le modèle mathématique choisi garantit la positivité des solutions et l'argument «ce sont des populations donc elles sont positives» n'était pas recevable.
3. Le calcul des dérivées partielles de φ n'a pas soulevé de difficulté mais de trop nombreux candidats ont pensé que «extremum» et «point critique» sont synonymes. Nous conseillons aux candidats de bannir des formulations utilisant «lorsque» ou «quand» qui sont en fait peu précises. Au contraire, une référence précise à une propriété du cours (avec par exemple une formulation «si ... alors ... ») était valorisée. Pour démontrer que cet extremum était un minimum on ne pouvait pas se contenter d'une étude sur les axes, il fallait utiliser le début de la partie A, ce que de nombreux candidats ont pressenti sans toutefois parvenir à le rédiger correctement.
4. Cette question a été assez discriminante : de nombreux candidats ont utilisé à bon escient le gradient (ou ont appliqué ce qu'on appelle la «règle de la chaîne»), quand d'autres se sont perdus dans des calculs faux. Signalons également que l'on pouvait aussi revenir à l'expression de $\varphi(x(t), y(t))$.

Partie C

Cette dernière partie du problème, indépendante de la précédente a été moins bien traitée. Certaines questions de calcul ont témoigné d'une grande maladresse de nombreux candidats. Nous conseillons donc aux futurs candidats de ne pas négliger ce type de calcul «basique».

1. On attendait une explication concernant les équations du système, explication trop souvent négligée.
2. Certains candidats se sont apparemment laissés tenter par le bluff : seule l'hypothèse de négligeabilité de $u_n v_n$ par rapport aux termes u_n, $\frac{bd}{c} v_n$, v_n et $\frac{ac}{b} u_n$ permettait d'obtenir la matrice A. Précisons qu'un candidat qui après des calculs faux obtenait miraculeusement la matrice A (donnée dans l'énoncé) laissait une impression désastreuse au correcteur. Il s'agissait dans la suite de cette question d'appliquer les résultats de la partie A (et il n'était pas utile de les redémontrer).
3. Le début de cette question a parfois donné lieu à des calculs interminables. Si le calcul de $(A - I)^2$ n'a guère posé de difficulté, nous avons conscience que le calcul de A^n était plus fastidieux : une démonstration par récurrence incomplète mais bien amorcée était valorisée.
4. Cette dernière question a été très peu abordée, et souvent de manière erronée.