DEVOIR MAISON # 4

à rendre le Jeudi 04/02/2021

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.

Problème 1 (Solution : 3) Toutes les variables aléatoires du texte sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}} = \begin{cases} \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 — Donner l'allure du graphe de f et montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire de densité f.

2 — 2.1) Donner un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$, suffisamment petit tel que $\mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = 1$. Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

2.2) À quelle condition sur a, X admet-elle une variance ? Donner sa valeur lorsque cette condition est remplie.

3 — Déterminer la fonction de répartition de X.

4 — Montrer que $\mathrm{F_X}\big|_{[1,\infty[}$ est bijective, déterminer une expression de son inverse noté G.

5 — Montrer que G(U) a même fonction de répartition que X, où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

6 — En déduire une fonction Python d'en-tête `X(a)` retournant un nombre réel aléatoire tiré suivant la loi de X. On spécifiera donc la valeur de a en paramètre.

7 — On fixe $a > 1$ et on considère, pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, une famille $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose alors

$$\mathrm{T}_n = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n).$$

7.1) Montrer que T_n est une variable aléatoire réelle à densité et déterminer une densité de T_n.

7.2) La variable aléatoire T_n admet-elle une espérance ? Quelle est sa valeur ?

7.3) À quelle condition sur a et n, T_n admet-elle une variance ? Quelle est alors sa valeur ?

7.4) Écrire une fonction d'en-tête `T(n,a)` permettant de simuler un nombre réel en suivant la loi de T_n, où `n` et `a` sont les paramètres n et a du texte.

8 — On pose $\mathrm{Z} = \ln(\mathrm{X})$.

8.1) Donner un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathbf{R}$, suffisamment restreint tel que $\mathbf{P}(\mathrm{Z} \in \mathrm{J}) = 1$. Déterminer la loi de Z.

8.2) Donner l'espérance et la variance de Z.

9 — Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes suivant la loi de X, $\mathrm{Z}_1 = \ln \mathrm{X}_1$, $\mathrm{Z}_2 = \ln \mathrm{X}_2$.

9.1) Donner une densité de $\mathrm{W} = \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2$.

9.2) En déduire qu'une densité de $\mathrm{P} = \mathrm{X}_1.\mathrm{X}_2$ est donnée par :

$$\forall p \in \mathbf{R}, \quad f_{\mathrm{P}}(p) = a^2 \frac{\ln(p)}{p^{a+1}} \mathbb{1}_{\{p \geq 1\}}.$$

9.3) Quelle est l'espérance de P ?

9.4) Quelle est sa variance dans le cas $a > 2$?

9.5) Écrire une fonction Python d'en-tête `P(a)` permettant de tirer au sort un nombre réel en suivant la loi de P, `a` est le paramètre a de l'énoncé.

Exercice 1 ***A-ENV 2019 – Maximum de lois exponentielles*** (Solution : 6) Soient $(\mathrm{X}_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $\mathrm{Y}_n = \max(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n)$, et on note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1 — 1.1) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0,1]$. Vérifier que la variable $-\ln(\mathrm{U})$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

1.2) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.

1.3) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n)}{\mathrm{S}_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geqslant 2$.

2 — On note F_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.

3 — 3.1) Montrer que pour tout réel u de $[0,1]$, on a :

$$(1-u)^n \geqslant 1 - nu.$$

3.2) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - \mathrm{F}_n(x))\,\mathrm{d}x$ est convergente, et que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \mathrm{F}_n(x)) = 0$.

4 — 4.1) Pour tout $\mathrm{A} > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^{\mathrm{A}} x f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{A}} (1 - \mathrm{F}_n(x))\,\mathrm{d}x - \mathrm{A}(1 - \mathrm{F}_n(\mathrm{A})).$$

4.2) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) = \int_0^{+\infty} (1 - \mathrm{F}_n(x))\,\mathrm{d}x.$$

5 — À l'aide du changement de variable $t = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, montrer que :

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t}\,\mathrm{d}t,$$

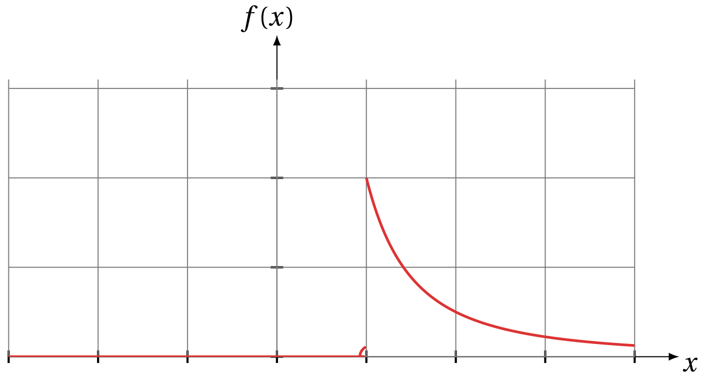
et en déduire finalement que :

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) = \mathrm{S}_n.$$

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé : 1)

1 —



Montrons que f est une densité de probabilité. En effet, f est une fonction positive car a est positif, elle est continue sauf éventuellement en 1. On étudie ensuite

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\mathrm{A} > 1$, alors

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{A}} x^{-a-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-a}}{-a}\right]_1^{\mathrm{A}} = \frac{1}{a}\left(1-\mathrm{A}^{-a}\right) \xrightarrow{\mathrm{A}\to\infty} \frac{1}{a}.$$

Donc l'intégrale étudiée converge et vaut $\int_{-\infty}^{\infty} f = \frac{a}{a} = 1$. Pour toute ces raisons, $\boxed{f \text{ est donc une densité de probabilité.}}$

2 — 2.1) Prenons $\boxed{\mathrm{I} = [1,\infty[}$. Alors $\mathbf{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = \int_1^{\infty} f = \int_{-\infty}^{\infty} f = 1$. Pour l'étude de l'espérance, on étudie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x = a\int_1^{\infty} \left|\frac{x}{x^{a+1}}\right|\mathrm{d}x = a\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{a}}\,\mathrm{d}x.$$

On calcule comme précédemment l'intégrale partielle : soit $\mathrm{A} > 1$,

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{x^{a}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{A}} x^{-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^{\mathrm{A}} = \frac{1}{1-a}\left(-1+\mathrm{A}^{-a+1}\right) \xrightarrow{\mathrm{A}\to\infty} \frac{1}{a-1}$$

puisque $-a+1 < 0$ par hypothèse. Donc X admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \frac{a}{a-1}.}$

2.2) Pour l'étude de la variance, on étudie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x = a\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{a-1}}\,\mathrm{d}x.$$

On calcule comme précédemment l'intégrale partielle : soit $\mathrm{A} > 1$, alors d'après les calculs précédents (remplacer a par $a-1$), on obtient

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{x^{a-1}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2-a}\left(-1+\mathrm{A}^{-a+2}\right) & \text{si } a \neq 2, \\ \ln \mathrm{A} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En faisant $\mathrm{A} \longrightarrow \infty$, on constate que X n'admet pas de moment d'ordre deux si $a = 2$. De plus, si $1 < a < 2$, alors $0 < -a+2 < 1$, donc $\frac{1}{2-a}\left(-1+\mathrm{A}^{-a+2}\right) \xrightarrow{\mathrm{A}\to\infty} \infty$ et X n'admet pas de moment d'ordre deux. En revanche, si $a > 2$, alors $-a+2 < 0$, donc $\mathrm{A}^{-a+2} \xrightarrow{\mathrm{A}\to\infty} 0$, et X admet un moment d'ordre deux donc une variance. Par König-Huygens, on obtient :

$$\boxed{\mathbf{Var}(\mathrm{X}) = \frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2}} = \boxed{\frac{a}{(a-2)(a-1)^2}}.$$

3 — Soit $x \in \mathbf{R}$, alors comme $\mathrm{X}(\Omega) = [1,\infty[$, nous avons $\mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = 0$ si $x < 1$. Soit donc $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant x) &= a\int_1^{x} \frac{1}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x, \\ &= -1\left[\frac{1}{x^{a}}\right]_1^{x}, \\ &= 1 - \frac{1}{x^{a}}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^a} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}}$

4 — Notons $F = F_X|_{[1,\infty[}$. Alors d'après les règles sur les fonctions monotones, F est une fonction croissante strictement, de plus elle est continue pour les mêmes raisons. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{F \text{ réalise une bijection de } [1,\infty[\text{ vers } [\lim_1 F, \lim_\infty F[= [0,1[.}$
Soit donc $y \in [0,1[$, résolvons

$$y = 1 - \frac{1}{x^a} \iff x^a = e^{\frac{1}{a}\ln x} = \frac{1}{1-y},$$

ceci est équivalent en prenant le logarithme (les deux membres sont strictement positifs) :

$$\ln x = -a\ln(1-y) \iff x = e^{-a\ln(1-y)} = \frac{1}{(1-y)^a}.$$

Donc, pour tout $y \in [0,1[$,

$$\boxed{G(y) = (1-y)^{-1/a}}.$$

5 — D'après les questions précédentes, on sait que $G(U)(\Omega) = [1,\infty[$. Soit $x \geqslant 1$, alors puisque F est croissante :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(G(U) \leqslant x\right) &= \mathbf{P}\left(U \leqslant F(x)\right) && F(x) \in [0,1] \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Et si $x < 1$, alors $\mathbf{P}\left(G(U) \leqslant x\right) = 0 = F(x)$. On a donc bien $\boxed{F_{G(U)} = F}$.

6 — On vient donc de montrer que G(U) a même loi que X, il suffit donc de simuler la variable aléatoire G(U).

```python
import random as rd
import math as ma
def X(a):
    U = rd.random()
    return     ma.exp(-1/a*ma/log(1-U))
```

7 — On fixe $a > 1$ et on considère, pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose alors

$$T_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

7.1) Comme $X_i \geqslant 1$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, on sait alors que

$$T_n(\Omega) = [1,\infty[.$$

Soit $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(T_n > x\right) &= \mathbf{P}\left(X_1 > x, ;X_n > x\right) && \textit{indépendance, et } X_i \textit{ de même loi} \\ &= \mathbf{P}\left(X_1 > x\right)^n \\ &= (1 - F(x))^n = \left(\frac{1}{x^a}\right)^n = \frac{1}{x^{na}}. \end{aligned}$$

Donc :

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^{na}} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction F_{T_n} est alors continue car elle l'est sur $]1,\infty[$ et $]-\infty,1[$ et

$$\lim_{x \to 1} \left(1 - \frac{1}{x^{na}}\right) = 1 - 1 = 0.$$

Elle est de plus $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 1 en tant que sommes de telles fonctions. Donc T_n est à densité, et une densité s'obtient en dérivant : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{f_{T_n}(x) = \frac{na}{x^{na+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)}.$$

On reconnaît ici la loi étudiée dans la première question, $\boxed{\text{avec paramètre } a' = na.}$

7.2) Donc d'après la première question, T_n admet une espérance car $a' = na > 1$, et

$$\boxed{\mathbf{E}(T_n) = \frac{na}{na-1}}.$$

7.3) De-même, elle admet une variance si et seulement si $na > 2$. Sachant que $n \geq 2$ et $a > 1$, cette condition est toujours remplie. On a alors

$$\boxed{\mathbf{Var}(T_n) = \frac{na}{(na-1)^2(na-2)}}.$$

7.4) On peut (plutôt que d'utiliser un tri), simuler chaque vecteur n fois, et ensuite garder le plus petit en testant au fure et à mesure.

```python
import random as rd
import math as ma
def T(n,a):
    T = X(a)
    for _ in range(1, n+1):
        X = X(a)
        if X < T:
            T = X
    return T
```

8 — On pose $Z = \ln(X)$.

8.1) Puisque $X(\Omega) = [1, \infty[$, alors $Z \geqslant 0$, et $\mathbf{P}\left(Z \in \mathbf{R}^+\right) = \mathbf{P}(Z \geqslant 0) = \mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1$. On pose donc $\boxed{J = \mathbf{R}^+.}$ Soit $z \in \mathbf{R}$, alors d'après le constat précédent, pour $z < 0$, $F_Z(z) = 0$. Soit $z \geqslant 0$,

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z \leq z) = \mathbf{P}(\ln X \leq z) = \mathbf{P}\left(X \leq e^z\right) = 1 - \frac{1}{(e^z)^a} = 1 - e^{-az}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{E}(a)$. Donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{E}(a).}$

8.2) Donc d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{a}, \quad \mathbf{Var}(Z) = \frac{1}{a^2}}.$$

9 — Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes suivant la loi de X, $Z_1 = \ln X_1$, $Z_2 = \ln X_2$.

9.1) Par lemme des coalitions, les variables aléatoires Z_1, Z_2 sont bien indépendantes. On calcule donc une densité par convolution en utilisant la densité exponentielle du cours. Pour tout $z \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f_W(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a\cdot e^{-ax}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\, a\cdot e^{-a(z-x)}\mathbb{1}_{\{z-x\geq 0\}}\,dx \\ &= a^2 e^{-a\cdot z}\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{x\leq z\}}\,dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f_W(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ a^2 e^{-a\cdot z}\cdot z & \text{si } z \geq 0. \end{cases}}$$

9.2) On constate que $P = X_1 X_2 = e^W$. Calculons sa fonction de répartition, pour tout $p \in \mathbf{R}$, on a $\mathbf{P}(P \leqslant p) = 0$ si $p < 1$ puisque $P \geqslant 1$. Soit donc $p \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(P \leqslant p) &= \mathbf{P}\left(e^W \leqslant p\right), \\ &= \mathbf{P}(W \leqslant \ln p) = F_W(\ln p). \end{aligned}$$

La fonction F_P est alors continue sur $]1, \infty[$ et $]-\infty, 1[$ (composée de telles fonctions), et en 1 également car :

$$\lim_{p\to 1} F_X(\ln p) = F_W(0) = 0,$$

d'après la densité trouvée précédemment. De plus, elle est $\mathscr{C}^1$ par composition de telles fonctions, sauf éventuellement en 1. Donc P est à densité et une densité est donnée par

$$\forall p \in \mathbf{R}, \quad f_P(p) = \frac{1}{p} f_W(\ln p)\mathbb{1}_{\{p\geq 1\}}.$$

Soit l'expression ci-après en utilisant la question précédente :

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{R}, \quad f_P(p) = a^2\frac{\ln(p)}{p^{a+1}}\mathbb{1}_{\{p\geq 1\}}.}$$

9.3) Par indépendance, puisque X_1, X_2 ont une espérance, c'est aussi le cas de $P = X_1X_2$ et

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbf{E}(X_1).\mathbf{E}(X_2) = \boxed{\left(\frac{a}{a-1}\right)^2}.$$

9.4) Si $a > 2$, on a par indépendance de X_1, X_2 :

$$\mathbf{E}(P^2) = \mathbf{E}(X_1^2 \cdot X_2^2) = \mathbf{E}(X_1^2) \cdot \mathbf{E}(X_2^2) = \left(\frac{a}{a-2}\right)^2,$$

donc par KÖNIG-HUYGENS,

$$\boxed{\mathbf{Var}(P) = \left(\frac{a}{a-2}\right)^2 - \left(\frac{a}{a-1}\right)^4}.$$

9.5) On sait simuler la loi de X, on s'en sert donc ici.

```python
def P(a):
    X_1 = X(a)
    X_2 = X(a)
    return X_1 * X_2
```

Solution (exercice 1) (Énoncé : 1)

1 — 1.1) Calculons la fonction de répartition de $Z = -\ln(U)$. Soit donc $t \in \mathbf{R}$. Si $t < 0$, il est clair que $P(Z \leqslant t) = 0$. Sinon, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \leqslant t) &= \mathbf{P}(-\ln(U) \leqslant t)\\ &= \mathbf{P}(U \geqslant e^{-t})\\ &= 1 - \mathbf{P}(U < e^{-t})\\ &= 1 - e^{-t}.\end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, et donc $\boxed{-\ln(U) \text{ suit bien cette loi.}}$

1.2)

```python
import math as ma
import random as rd

def y(n):
    X = -ma.log(rd.random())
    for _ in range(1, n+1):
        Y = -ma.log(rd.random())
        if Y > X:
            X = Y
    return X
```

1.3) On approche $\mathbf{E}(Y_n)$ en réalisant un grand nombre de simulations de Y_n, puis en calculant la moyenne.

```python
def S(n):
    '''
    retourne la valeur de la somme partielle
    harmonique d'ordre n
    '''
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S += 1/k
    return S

def esp(n):
    '''
    retourne une valeur approchée de l'espérance (pour
    1000 simu)
    '''
    N = 1000
    S = 0
    for _ in range(N):
```

```python
        S += y(n)
    return S/N
```

Alors la commande `esp(100)/S(100)` retourne `1.0035532532970681`. On conjecture donc de l'égalité entre $\mathbf{E}(Y_n)$ et S_n au moins pour n assez grand. Nous allons le montrer dans la suite.

2 — Soit $t \in \mathbf{R}$. On note que le maximum des X_i est inférieur à t si et seulement si tous les X_i sont inférieurs à t. On a donc, pour $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}(Y_n \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leqslant x) \qquad \textit{indépencance} \\ &= (1-e^{-x})^n. \end{aligned}$$

Les X_i ne prenant que des valeurs positives, il est clair que $F_n(x) = 0$ si x est strictement négatif. La fonction F_n est bien $\mathscr{C}^1$, sauf éventuellement en 0, et est bien continue sur $\mathbf{R}$ (en 0, on a $\lim_{x\to 0+}(1-e^{-x})^n = 0$). En dérivant cette fonction, on obtient donc une densité :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^{+\star}(x)}}.$$

3 — 3.1) Introduisons la fonction $f_n : u \in [0,1] \longmapsto (1-u)^n - 1 + nu$. Puisque $f(0) = 0$, il suffit de montrer que f est croissante pour établir l'inégalité. Or, puisque pour tout n, f_n est dérivable et que

$$\forall u \in [0,1], \quad f'(u) = -n(1-u)^{n-1} + n = n\left(1-(1-u)^{n-1}\right),$$

il vient que $f'(u) \geqslant 0$ puisque $u \in [0,1]$. Donc f est une fonction croissante et la réponse en découle : $\forall u \in [0,1]$,

$$\boxed{(1-u)^n \geqslant 1 - nu}.$$

3.2) La fonction $1 - F_n$ est continue en 0, l'intégrale étudiée est donc généralisée seulement en $+\infty$. Soit $x \geqslant 0$. Alors $e^{-x} \in [0,1]$, et donc d'après la question précédente :

$$1 - F_n(x) \leqslant 1 - (1 - ne^{-x}) = ne^{-x}.$$

Les fonctions $1 - F_n$ et $x \mapsto ne^{-x}$ étant positives, et $\int_0^\infty (ne^{-x})\,dx$ converge (calcul simple avec des intégrales partielles), $\int_0^\infty (1-F_n(x))\,dx$ converge donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives.
De plus, on a de la même façon pour tout $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant x(1-F_n(x)) \leqslant nxe^{-x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

par croissances comparées. On déduit alors par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x(1-F_n(x)) = 0}.$$

4 — 4.1) Soit $A > 0$. Soient u et v les fonctions définies sur $]0, A]$ par $u(x) = x$ et $v(x) = 1 - F_n(x)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1_1$ sur $]0, A]$, et donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A x f_n(x)\,dx &= -\int_0^A u(x)v'(x)\,dx \\ &= -[u(x)v(x)]_0^A + \int_0^A u'(x)v(x)\,dx \\ &= \boxed{-A(1-F_n(A)) + \int_0^A (1-F_n(x))\,dx}. \end{aligned}$$

4.2) On a vu précédemment que le membre de droite de l'égalité précédente convergeait quand $A \to \infty$, vers $\int_0^\infty (1-F_n(x))\,dx$. L'intégrale $\int_0^\infty x f_n(x)\,dx$ converge donc bien, et $\boxed{Y_n \text{ admet bien une espérance}}$, qui est celle demandée.

5 — La fonction $\varphi \ : \ t \in]0,1[\longmapsto -\ln(1-t)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone, et donc par formule de changement de variable :

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) = \int_0^1 (1-\mathrm{F}_n(-\ln(1-t)))\frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnait alors une somme géométrique :

$$\forall t \neq 1, \quad \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k,$$

et donc par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) = \mathrm{S}_n.}$