DEVOIR MAISON # 3

à rendre le Jeudi 03/12/2020

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet <u>est complètement inutile pour tout le monde.</u>

Exercice 1 ***Approximation de*** e (Solution : 2) On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

1 — Écrire une fonction d'en-tête `calcul_u_v(n)` qui retourne u_n et v_n sans utiliser la fonction factorielle existante dans l'un de ces modules.

2 — Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Préciser leur limite commune.

3 — 3.1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que : $n!u_n < n!\mathrm{e} < n!u_n + \frac{1}{n}$.

3.2) En déduire que e n'est pas rationnel en raisonnant par l'absurde.

3.3) Écrire une fonction d'en-tête `approx_e(eps)` donnant un encadrement de e d'amplitude eps, un paramètre strictement positif.

4 — Soit $n \geqslant 1$, montrer que : $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{1}{n\cdot n!}$. En déduire un encadrement de $\frac{v_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e} - u_n}$.

5 — Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-u_n}$.

6 — Qui de $(v_n - \mathrm{e})$ ou $(u_n - \mathrm{e})$ tend le plus vite vers zéro ?

Exercice 2 (Solution : 3) On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est convergente et de calculer sa somme.

1 — 1.1) Déterminer la limite quand $\lambda \to +\infty$ de $\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}$.

1.2) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et $\lambda > 0$. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2 — En utilisant une formule d'addition pour le cosinus, exprimer pour tout $t \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

3 — En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, et $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

4 — Montrer alors que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.$$

5 — En utilisant la première question, établir la convergence de $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 1}$ et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

6 — Écrire une fonction d'en-tête `approx(eps)` qui retourne le premier indice n tel que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin k}{k}$ soit proche de $-\frac{1}{2}$ à eps près.

CORRECTION

Solution (exercice 1) (Énoncé : 1)

1 —

```python
def calcul_u_v(n):
    '''
    retourne les valeurs de un et vn
    on calcule la factorielle à chaque étape
    '''
    facto = 1
    u = 1
    for i in range(1, n+1):
        facto = facto * i
        u += 1/facto
    return u, u + 1/(n*facto)
```

2 — La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante d'après le cours : c'est la somme partielle d'une série à termes positifs. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ quant à elle décroissante. En effet, soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n!}\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n!}\frac{-1}{n(n+1)^2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est décroissante. De plus, $u_n - v_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Donc : $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes et convergent vers une même limite finie.}}$ De plus, d'après le cours sur les séries nous savons que $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}.}$

3 — 3.1) Soit $n \geqslant 1$. L'encadrement souhaité est équivalent à $u_n < \mathrm{e} < v_n$. Or, comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \geqslant 0$ nous avons $u_n \leqslant v_n$. Mais comme elles sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante, la valeur de la limite e vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_n.$$

Les inégalités sont-elles strictes? Oui. Puisque (u_n) est strictement croissante (en effet, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$), et de-même $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!}\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ d'après un calcul déjà fait. Donc les deux suites restent strictement différentes de leur limite.

Donc : $\boxed{n!u_n < n!\mathrm{e} < n!u_n + \frac{1}{n}.}$

3.2) Supposons que e s'écrive sous la forme $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ où $q \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in \mathbf{Z}$. Alors en prenant $n = q$ dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + \frac{1}{q}.$$

Or, $q!u_q$ est un entier en tant que somme d'entiers, puisque

$$q!u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q} q(q-1)\dots(k+1).$$

Mais comme $\frac{1}{q} \in]0,1[$, l'inégalité $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + \frac{1}{q}$ prétend qu'il existe un entier strictement compris entre $q!u_q, q!u_q + \frac{1}{q}$ — c'est une (jolie) contradiction. Donc : $\boxed{\text{e est irrationnel.}}$

3.3) On regarde simplement quand l'écarte entre les deux suites est assez petit.

```python
def approx_e(eps):
    '''
    retourne une valeur approchée de e à précision eps
```

```python
    '''
    n = 0
    while calcul_u_v(n)[1] - calcul_u_v(n)[1] < eps:
        n += 1
    return (calcul_u_v(n)[0]+calcul_u_v(n)[1])/2
```

4 — Soit $n \geqslant 1$. On a déjà vu que $\lim_{n\to\infty} v_n = \mathrm{e}$ et que (v_n) décroît vers e. Ainsi, $v_n = u_n + \frac{1}{nn!} \geqslant \mathrm{e}$ donc $\frac{1}{nn!} \geqslant \mathrm{e} - u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
Pour l'autre partie de l'encadrement, constatons simplement que $u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$ puisque (u_n) croît vers e. Ainsi, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e}$ donc $\mathrm{e} - u_n \geqslant \frac{1}{(n+1)!}$.
D'où :

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{1}{n \cdot n!}}.$$

En utilisant la relation $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{v_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e} - u_n} &= \frac{u_n + \frac{1}{nn!} - \mathrm{e}}{\mathrm{e} - u_n} \\ &= -1 + \frac{1}{nn!}\frac{1}{\mathrm{e} - u_n}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'inverser l'encadrement de la première partie de la question précédente, on déduit alors

$$0 = 1 - 1 \leqslant \frac{v_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e} - u_n} \leqslant \frac{(n+1)!}{nn!} - 1.$$

D'où :

$$\boxed{0 \leqslant \frac{v_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e} - u_n} \leqslant \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}}.$$

5 — Par théorème d'encadrement, on déduit alors : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e} - u_n} = 0.}$

6 — D'après la question précédente, nous avons $v_n - \mathrm{e} \underset{n\to\infty}{\sim} o(\mathrm{e} - u_n)$. Donc $\boxed{(v_n - \mathrm{e}) \text{ tend « plus vite » vers zéro.}}$

Solution (exercice 2) (Énoncé : 1)

1 — 1.1) Puisque $\left|\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$, nous déduisons d'après le théorème d'encadrement que :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} = 0.}$$

1.2) Les fonctions f et $t \in [0,1] \longmapsto \frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, il vient alors par intégration par parties :

$$\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 f(t)\frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}t + \left[f(t)\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\right]_0^1 \tag{0.1}$$

$$= -\int_0^1 f(t)\frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}t + f(1)\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}. \tag{0.2}$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(1)\frac{\sin(t\lambda)}{\lambda} = 0.$$

De plus, par inégalité triangulaire pour l'intégration, nous avons :

$$\begin{aligned} \left|-\int_0^1 f(t)\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 |f(t)|\left|\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est une constante indépendante de λ, nous déduisons par théorème d'encadrement que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^1 f(t)\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Finalement, dans notre égalité d'intégration par parties les deux termes apparaissant convergent vers zéro, donc :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0}.$$

2 — Soient $t \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$. Nous avons d'après la formule d'addition :

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) = \cos\left(kt + \frac{t}{2}\right), \\ = \cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin(kt)\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

On peut ensuite faire de-même pour l'autre cosinus :

$$\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) = \cos\left(kt - \frac{t}{2}\right), \\ = \cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin(kt)\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Ainsi, en sommant les deux relations, nous obtenons :

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) = 2\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Puis, on divise par deux :

$$\boxed{\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)}.$$

3 — Soient $t \in [0,1]$, et $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors en sommant la relation précédente entre 1 et n, on obtient

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right), \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right), \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=2}^{n+1}(-1)^{\ell-1}\cos\left(\frac{2\ell-1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) - \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right), \\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - (-1)^{n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right).
\end{aligned}$$

changement d'indice $\ell = k+1$ dans la première somme

renommage d'indice

téléscopage

D'où, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(-1)^{n+2} = (-1)^n$, on déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)}.$$

4 — Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, constatons que $u_n = (-1)^n\frac{\sin n}{n} = (-1)^n\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}u_k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\frac{1}{2}\left((-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos(t/2)} - \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\mathrm{d}t, \\
&= \boxed{(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

question précédente

5 — Cherchons à faire tendre n vers $+\infty$ dans la question précédente. D'après la première question pour $f : t \in [0,1] \longmapsto \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$, nous avons

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\frac{\cos(\lambda t)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = 0.$$

Donc par composition de limites, puisque $\frac{2n+1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = 0.$$

Donc comme

$$0 \leqslant \left|(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

on obtient que $\boxed{\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge,}}$ et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\frac{1}{2}}.$$

6 — >_

```python
import math as ma
def approx(eps):
    '''
    retourne le plus petit indice tel que Sn soit proche
    de -1/2 à précision eps
    '''
    S = - ma.sin(1)
    n = 0
    while abs(S - 1/2) > eps:
        n += 1
        S += (-1)**n*ma.sin(n)/n
    return n
```