DEVOIR MAISON # 2

à rendre le Jeudi 05/11/2020

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet <u>est complètement inutile pour tout le monde.</u>

Problème 1 (Solution : 3)

Partie I — Résolution d'équations différentielles

1 — On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par :

$$(\mathrm{E}_1) \quad xy' - y = \ln(x).$$

1.1) Résoudre (E_1).

1.2) Préciser la solution f de (E_1) telle que $f(1) = 0$.

2 — On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par :

$$(\mathrm{E}_2) \quad x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x).$$

2.1) Déterminer une solution de l'équation différentielle sans second membre associée à (E_2) de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

2.2) On cherche les solutions de (E_2) sous la forme $y(x) = x^\alpha z(x)$ où α est la valeur trouvée à la question précédente et z est une fonction deux fois dérivable.
Montrer que y est solution de (E_2) si et seulement si z' vérifie une équation différentielle (E_3) du premier ordre.

2.3) Résoudre (E_3) et déterminer l'ensemble des solutions de (E_2).

3 — ***(Seconde méthode pour la résolution de*** (E_2)***)*** On va effectuer le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, on pose alors $w(t) = y(\mathrm{e}^t)$.
Déterminer une équation différentielle (E_4) vérifiée par w si et seulement si y vérifie (E_2). Résoudre (E_4) et en déduire les solutions de (E_2).

4 — Démontrer que la fonction f est l'unique solution de (E_3) vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

Partie II — Étude de f

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$.

5 — Étudier rapidement la fonction f.

6 — Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$: $\ln(x) \leq x - 1 \quad (\star)$. Préciser le cas d'égalité.

Partie III — Comparaison de moyennes

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs, avec $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle :

- moyenne arithmétique le réel m_a défini par : $m_a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$,
- moyenne géométrique le réel m_g défini par : $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$,
- moyenne harmonique le réel m_h défini par : $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.

7 — 7.1) En utilisant $(\star)$, établir que $m_g \leqslant m_a$. <u>*Indication :*</u> *On pourra introduire les réels* $\frac{a_i}{m_a}$.

7.2) Dans quel cas a-t-on $m_a = m_g$?

8 — 8.1) En utilisant $(\star)$, établir que $m_h \leqslant m_g$. <u>*Indication :*</u> *On pourra introduire les réels* $\frac{m_h}{a_i}$.

8.2) Dans quel cas a-t-on $m_h = m_g$?

9 — Montrer que $m_h \leq m_a$. En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$, on a :

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Partie IV — Applications

10 — Déduire de $m_g \leq m_a$ que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

11 — Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Montrer que :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

12 — 12.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

12.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$\frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}.$$

13 — 13.1) Déterminer la limite de $\sqrt[n]{n!}$ lorsque $n \to \infty$.

13.2) Montrer que $\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

13.3) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$n \ln n - n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1).$$

13.4) Montrer finalement :

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-1).$$

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé : 1)

Partie I — Résolution d'équations différentielles

1 — On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par :

$$(\mathrm{E}_1) \quad xy' - y = \ln(x).$$

1.1) L'équation (E_1) est équivalente à la suivante sur $\mathbf{R}^{+\star}$:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}.$$

Donc, d'après le cours, les solutions de l'homogène sont les éléments de

$$\mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\ln|x|}\right) = \mathrm{Vect}\,(x \longmapsto x).$$

On chercher alors une solution particulière de la forme $x \longmapsto \mathrm{C}(x)x$ par variation de la constante. En injectant dans (E_1), on obtient la condition $\mathrm{C}'(x)x = \frac{\ln x}{x}$ soit $\mathrm{C}'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. On cherche ensuite une primitive de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$, par changement de variable. On calcule alors pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$ — la borne 1 en borne du bas n'a rien d'obligatoire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(x) &= \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{1/x} (-\ln u)(-\,\mathrm{d}u) \qquad \textit{changement } u = \tfrac{1}{t} \\
&= [u\ln u - u]_1^{1/x} \\
&= 1 - \frac{1}{x}(\ln x + 1).
\end{aligned}$$

Donc $x \longmapsto x(1 - \frac{1}{x}(\ln x + 1))$ est une solution particulière. L'ensemble des solutions de (E_1) est alors

$$\boxed{\left\{x \longmapsto \mathrm{C}x + x\left(1 - \frac{1}{x}(\ln x + 1)\right),\ \mathrm{C} \in \mathbf{R}\right\}}.$$

1.2) Avec la condition $f(1) = 0$, on obtient une relation sur C : $\mathrm{C} + 1(1 - (0 + 1)) = 0$ soit $\mathrm{C} = 0$. L'unique solution est alors $\boxed{f : x \longmapsto x(1 - \frac{1}{x}(\ln x + 1)) = x - \ln x - 1.}$

2 — On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par :

$$(\mathrm{E}_2) \quad x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x).$$

2.1) On injecte l'expression donnée dans l'équation différentielle. Nous avons pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^{\alpha}, \\
y\prime(x) &= \alpha x^{\alpha-1}, \\
y''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$x^{\alpha}(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1) = 0.$$

Après simplification par x^{α} puisque $x \neq 0$, on obtient $(\alpha-1)^2 = 0$ soit $\alpha = 1$. Ainsi, $\boxed{x \longmapsto x \text{ est solution de l'homogène de } (\mathrm{E}_2).}$

2.2) Considérons z définie comme $y(x) = x^{\alpha}z(x) = xz(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, *i.e.* $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Alors :

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (\mathrm{E}_2) \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbf{R}^{+\star},\ x^2(2z'(x) + xz''(x)) - x(z(x) + xz'(x)) + xz(x) = 1 - \ln x \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbf{R}^{+\star},\ x^3z''(x) + x^2z'(x) = 1 - \ln x \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbf{R}^{+\star},\ ,\ \boxed{xz''(x) + z'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.}
\end{aligned}$$

Ainsi z' est solution de l'équation $xy' + y = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

2.3) Les solutions de l'équation homogène sont les éléments de

$$\left\{x \in \mathbf{R}^{+\star} \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\ln|x|},\ \mathrm{K} \in \mathbf{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(x \in \mathbf{R}^{+\star} \longmapsto \mathrm{K}/x\right).$$

On cherche alors une solution particulière de la forme $y : x \longmapsto \frac{C(x)}{x}$ avec C une fonction dérivable. En remplaçant dans l'équation différentielle, nous avons comme condition sur K :

$$C'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

En utilisant la primitive de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ calculée dans la question précédente, on pose alors $C(x) = -\frac{1}{x} - \left(1 - \frac{1}{x}(\ln x + 1)\right) = -1 + \frac{\ln x}{x}$. On déduit alors l'ensemble des solutions en z :

$$\boxed{\left\{x \longmapsto \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right),\ C \in \mathbf{R}\right\}}.$$

Il nous reste alors à primitiver l'expression précédente : soit $C \in \mathbf{R}$, alors les primitives sont les fonctions

$$\boxed{x \longmapsto (C-1)\ln x + 1 - \frac{1}{x}(\ln x + 1) + D}.$$

pour tout $D \in \mathbf{R}$. Toutes ces fonctions forment l'ensemble des solutions de (E_2).

3 — ***(Seconde méthode pour la résolution de*** (E_2)***)*** On pose ici $w(t) = y(e^t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} w'(t) &= e^t y'(e^t) \\ w''(t) &= e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) \\ &= w'(t) + (e^t)^2 y''(e^t). \end{aligned}$$

En remplaçant $x \in \mathbf{R}^{+\star}$ par e^t pour tout $t \in \mathbf{R}$ dans (E_2), on obtient :

$$(e^t)^2 y''(e^t) - e^t y'(e^t) + y(e^t) = 1 - t.$$

En utilisant la fonction w, on déduit

$$w''(t) - w'(t) - w'(t) + w(t) = 1 - t,$$

soit

$$(E_4) \quad \boxed{w''(t) - 2w'(t) + w(t) = 1 - t.}$$

L'équation caractéristique de (E_4) est alors $x^2 - 2x + 1 = 0$ avec $x = 1$ comme unique solution. Ainsi l'ensemble des solutions de l'homogène est l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \longmapsto (At + B)e^t, \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Le second membre rentre dans un cadre du cours et une solution particulière est alors à trouver sous la forme $t \longmapsto \alpha t + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Nous déduisons en injectant dans l'équation : $\alpha = -1, \beta - 2\alpha = 1$ soit $\beta = -1$. Donc l'ensemble des solutions en w est

$$\boxed{\{t \longmapsto (At + B)e^t - (t+1),\ A, B \in \mathbf{R}\}}.$$

On en déduit alors celles de (E_2) :

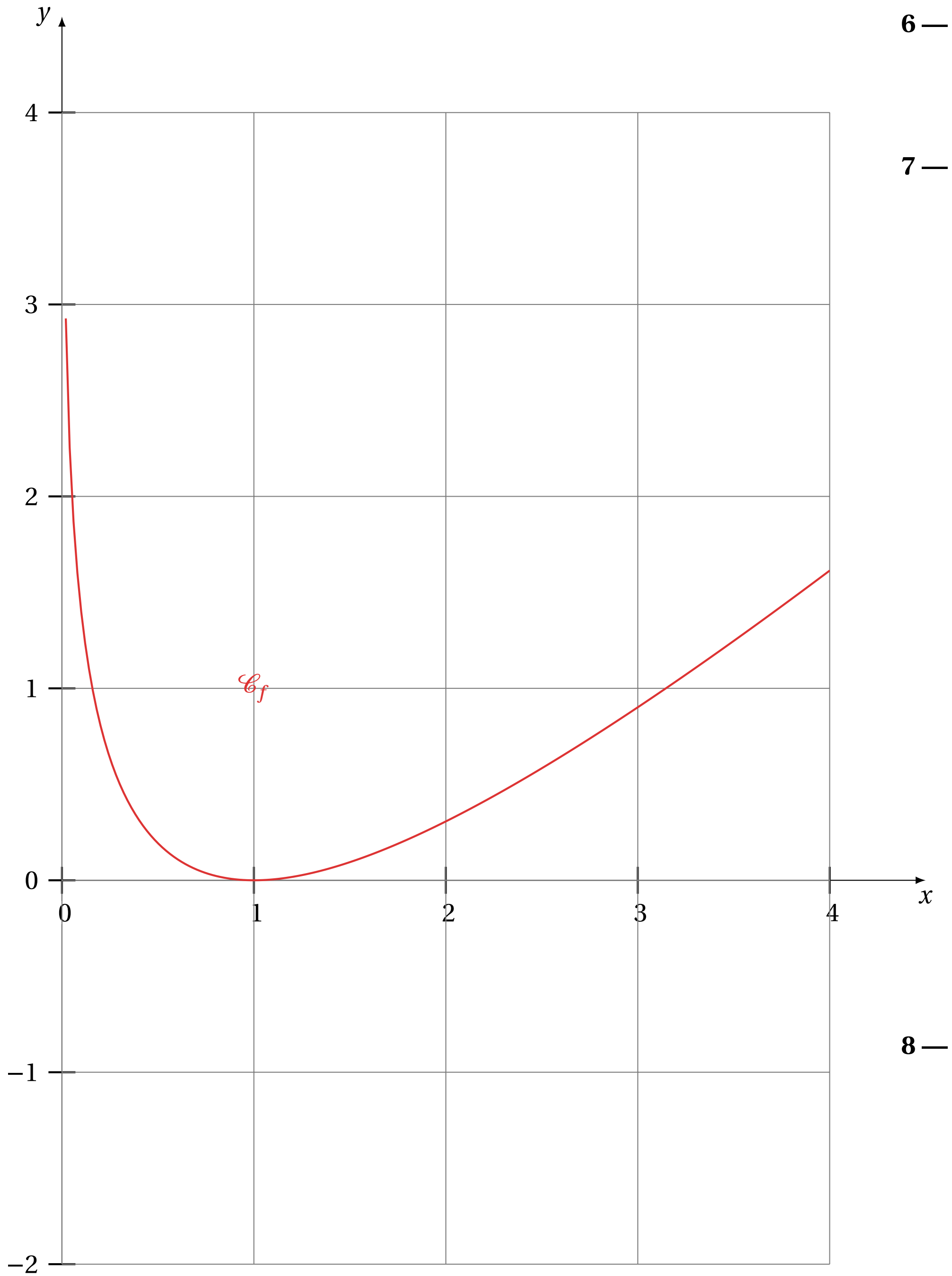
$$\boxed{\{x \in \mathbf{R}^{+\star} \longmapsto (A\ln x + B)x - (\ln x + 1),\ A, B \in \mathbf{R}\}}.$$

4 — En prenant $A = 0$ et $B = 1$ on retrouve bien f, elle est donc solution de (E_3). Or $f(1) = 1 - 0 - 1 = 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \implies f'(1) = 1 - 1 = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est l'unique solution de } (E_3) \text{ vérifiant } f(1) = 0 \text{ et } f'(1) = 0.}$

Partie II — Étude de f

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$.

5 — Elle est définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$, et dérivable sur ce même ensemble en tant que différence de telles fonctions. Et, pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Donc la fonction f est croissante strictement sur $[1, \infty[$ et décroissante strictement sur $]0, 1[$. Et par croissances comparées, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = \infty$. Et $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Voici son graphe.



6 — Soit $x \in \mathbf{R}^{+\star}$. Alors puisque la fonction f est positive (conséquence directe des variations et du fait que $f(1) = 0$), nous obtenons $\boxed{\ln x \leqslant x - 1.}$

Partie III — Comparaison de moyennes

7 — 7.1) Nous avons pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, en utilisant l'inégalité $(\star)$:

$$\ln\left(\frac{a_i}{m_a}\right) \leqslant \frac{a_i}{m_a} - 1.$$

Sommons entre 1 et n. On obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) - n\ln(m_a) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{m_a} - n = \frac{n m_a}{m_a} - n = 0.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) = \ln(a_1 \times \cdots \times a_n) \leqslant n\ln(m_a).$$

En divisant par n et en passant à l'exponentielle, on trouve

$$\boxed{m_g \leqslant m_a}.$$

7.2) Dans quel cas a-t-on $m_a = m_g$? Il y a égalité dans les inégalités précédentes si et seulement si (puisqu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls) : pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$:

$$\ln\left(\frac{a_i}{m_a}\right) = \frac{a_i}{m_a} - 1,$$

donc d'après l'étude de f faite précédemment, si et seulement si $\frac{a_i}{m_a} = 1$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$.

8 — 8.1) Cette question est très similaire à la précédente. En effet, il suffit de ré-appliquer l'inégalité $(\star)$ avec les réels suggérés. Pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$:

$$\ln\left(\frac{m_h}{a_i}\right) \leqslant \frac{m_h}{a_i} - 1.$$

Sommons entre 1 et n. On obtient

$$n\ln(m_h)-\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i)\leqslant m_h\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-n=m_h\frac{n}{m_h}-n=0.$$

Donc $n\ln(m_h)\leqslant\ln(a_1\times\cdots\times a_n)$. En divisant par n et en passant à l'exponentielle, on trouve

$$\boxed{m_h\leqslant m_g.}$$

8.2) Dans quel cas a-t-on $m_h=m_g$? Si et seulement si (puisqu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls) : pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$:

$$\ln\left(\frac{m_h}{a_i}\right)=\frac{m_h}{a_i}-1,$$

soit d'après l'étude de f faite précédemment, si et seulement si $\frac{m_h}{a_i}=1$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$.

9 — On a établi $m_h\leqslant m_g\leqslant m_a$ donc $\boxed{m_h\leqslant m_a}$. Soient alors $a_1,\dots,a_n>0$, on a :

$$\begin{aligned}&(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\\&=(nm_an)\left(\frac{n}{m_h}\right)\\&=n^2\frac{m_a}{m_h}\\&\geqslant\boxed{n^2}.\end{aligned}$$

car $m_h\leqslant m_a$

Partie IV — Applications

10 — Appliquons l'inégalité $m_g\leqslant m_a$ avec $a_i=i$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$. Alors $\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\boxed{\frac{n+1}{2}}$.

11 — Soit $k\in\mathbf{N}^\star$. Montrons que : $\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}$. Puisque la fonction inverse est décroissante, nous avons :

$$\forall t\in[k,k+1],\qquad \frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer entre k et $k+1$ par rapport à t.

$$\boxed{\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}.}$$

12 — 12.1) Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. D'après la question précédente, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t+1\\&=\int_1^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t+1\\&=\boxed{\ln n+1.}\end{aligned}$$

12.2) Appliquons $m_g\geqslant m_h$ pour $a_i=i$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$. On obtient :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\leqslant\sqrt[n]{n!}.$$

D'où, en utilisant la question précédente,

$$\boxed{\frac{n}{1+\ln n}\leqslant}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\leqslant\boxed{\sqrt[n]{n!}}.$$

13 — 13.1) Puisque $\frac{\ln n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ par croissances comparées, il vient

$$\frac{n}{1+\ln n}=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}+\infty.$$

Par théorème de minoration, il vient $\boxed{\sqrt[n]{n!}\xrightarrow{n\to\infty}+\infty.}$

13.2) La suite $\boxed{\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ est bornée}}$ puisque majorée par la suite $\left(\frac{n+1}{2n}\right)_{n\geq 1}$ qui elle-même est une suite majorée par 1.

13.3) Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$n \ln n - n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1).$$

La fonction ln étant croissante, nous avons pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\ln(t-1) \leqslant \ln(k) \leqslant \ln(t),$$

on peut ensuite intégrer entre k et $k+1$:

$$\int_k^{k+1} \ln(t-1)\,\mathrm{d}t = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t,$$

puis on somme :

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t,$$

puisqu'une primitive de ln est $t \longmapsto t\ln t - t$ et que $\ln 1 = 0$, il vient alors :

$$\boxed{n\ln n - n - 0 \leqslant} \sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 \leqslant \boxed{(n+1)\ln(n+1) - (n+1)}.$$

13.4) Montrons que :

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-1).$$

Cette limite est équivalente à la suivante par composition de limites,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n \xrightarrow{n\to\infty} -1.$$

Or, d'après la question précédente :

$$\ln n - 1 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \frac{n+1}{n}\ln(n+1) - \frac{n+1}{n},$$

d'où

$$-1 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n \leqslant \frac{n+1}{n}\ln(n+1) - \ln n - \frac{n+1}{n}.$$

Pour terminer, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\ln(n+1) - \ln n\right) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}\ln(n+1) - \ln n &= \frac{n+1}{n}\big(\ln(1+1/n) + \ln n\big) - \ln n \\
&= \frac{n+1}{n}\ln(1+1/n) + \ln n\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) \\
&= \frac{n+1}{n}\ln(1+1/n) + \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-1)}.$$