

## Exemple de sujet 1

## Question de cours.

Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme ?

Qu'appelle-t-on *ordre de multiplicité* d'une racine d'un polynôme ?

## Exercice.

On considère  $E$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  admettant le vecteur  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour vecteur propre et l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de  $F$  dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

On pourra par exemple utiliser la fonction `numpy.linalg.eig`, comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy.linalg as la
vap, vep=la.eig([[1,2],[3,4]])
```

Après cette suite d'instructions, la variable `vap` contient la liste des valeurs propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et la variable `vep` est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.

- Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
  - Donner une base de  $E \cap F$ .
- Montrer que  $A \in E \cap F$ .
  - Montrer que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale vérifiant  $A = PD {}^tP$  où  ${}^tP$  est la matrice transposée de  $P$ .
- Vérifier que  ${}^tPMP$  est diagonale pour toute matrice  $M$  de  $E \cap F$ .
- Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer le spectre de  $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$ .

## Exemple de sujet 2

## Question de cours.

Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

## Exercice.

On rappelle que dans le package `numpy`, la commande `numpy.transpose(A)` donne la transposée de  $A$ , la commande `numpy.linalg.eigh(A)` donne les valeurs propres et les vecteurs propres éventuels de  $A$  et la commande `numpy.eye(n, n)` crée la matrice  $I_n$  et la commande `numpy.ones((n, n))` crée la matrice de taille  $n \times n$  ne comportant que des 1.

Soit  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 1$  et  $1 \leq k \leq n$ , on considère une matrice  $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = J_n + (k-1) \times I_n$  avec :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Écrire un programme Python permettant de déterminer, suivant la valeur de  $n$ , les valeurs propres de la matrice  $M^2$ , ses vecteurs propres et qui permet de vérifier les résultats obtenus. On étudiera, en particulier, le cas  $n = 3$  et  $k = 2$ .
- (a) Déterminer, dans le cas général, le rang de  $J_n$ .  
(b) Étudier les valeurs propres éventuelles de  $J_n$ , et donner la dimension de ses sous espaces propres.  
(c) Justifier, de deux façons différentes, que  $J_n$  est diagonalisable.
- (a) Justifier que  $M^2$  est également diagonalisable.  
(b) Déterminer les valeurs propres de  $M^2$ , et donner la dimension de ses sous espaces propres.
- Déterminer les valeurs propres possibles de  $M$ .

On considère un réseau social comportant  $n$  personnes, et tel que chaque couple de deux personnes distinctes ont exactement un ami en commun et que chaque personne a exactement  $k$  amis, avec  $1 \leq k \leq n-1$ . Une personne n'est pas amie avec elle-même. On numérote les personnes de 1 à  $n$ .

On désigne par  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice telle que  $A_{i,j} = 1$  si les personnes  $i$  et  $j$  sont amies et  $A_{i,j} = 0$  sinon.

- Déterminer un exemple de réseau vérifiant les hypothèses pour  $n = 3$ .
- Justifier que  $A$  est symétrique.

On admet, que le coefficient  $(A^2)_{i,j}$  avec  $i \neq j$ , donne le nombre de fois où la personne  $i$  a un ami en commun avec la personne  $j$ . On admet également que  $(A^2)_{i,i}$  donne le nombre d'amis de la personne  $i$ .

- Donner une expression de la matrice  $A^2$ .
- (a) Donner le nombre de couples comportant deux personnes distinctes du réseau.  
(b) Pour une personne donnée, déterminer le nombre de couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun.  
(c) En déduire la relation  $k^2 - k + 1 = n$ .
- (a) En déduire les valeurs propres éventuelles de  $A$ .  
(b) On sait que  $\sum_{\lambda_i \text{ valeur propre de } A} n_i \lambda_i = 0$  où  $n_i$  est la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ , montrer alors que  $n = 3$ .

## Exemple de sujet 3

## Question de cours.

Densité d'une loi normale centrée réduite.

## Exercice.

On pourra utiliser pour les programmes Python la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy`, qui permet de connaître le rang d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy as np
A = np.array( [ [1,2,1] , [2,3,2] , [3,5,3] ] )
print( np.linalg.matrix_rank(A) )
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ , c'est à dire : 2.

On pourra aussi utiliser la fonction `randint()` du module `random`.

Pour  $a$  et  $b$  deux entiers `randint(a,b)` retourne un entier équiprobablement entre  $a$  et  $b$  ( $a$  et  $b$  étant inclus).

On considère la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Écrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires. (On pourra représenter les vecteurs par des listes).
- (b) Écrire une fonction Python `vecteurs_propres(u)` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'il est un vecteur propre de  $A$ .
- (a) Vérifier que  $-1, 1, 2$  sont valeurs propres de  $A$  et préciser pour chacune un vecteur propre associé.
- (b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- Soient  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

$$\text{On note : } M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad M_n^* = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

- (a) Donner, pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , l'approximation de la probabilité  $\mathbb{P}([-\alpha < M_n^* < \alpha])$  donnée par le théorème central limite.
- (b) En déduire que  $\left[ M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  est un intervalle de confiance de  $p$  au seuil de 95%.

On pourra admettre que,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  et si  $\Phi$  désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors  $\Phi(1,96) \approx 0,975$ .

- On note  $N_V$  le nombre de vecteurs propres de  $A$  dont les coefficients sont des entiers de  $[-5; 5]$ .
  - Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de  $N_V$  :

```
def simul():
    u = [ randint(-5,5) for k in range(3) ]
    return vecteurs_propres(u)
n = 10000 # Valeur de n a definir.
nb = 0
for k in range(n):
    if simul():
        nb += 1
print(round(nb/n*11**3)) # round(x) = l'entier le plus proche de x.
```

- Comment choisir  $n$  pour que l'on soit sûr à 95% de la valeur affichée ?
- Commenter le résultat obtenu.

## Exemple de sujet 4

## Question de cours.

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## Exercice.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(E_n) : \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n},$$

où  $n$  est un entier strictement positif, et  $x$ , l'inconnue, est un nombre réel strictement positif. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur son ensemble de définition.
- (b) En déduire que l'équation  $(E_1)$  n'admet pas de solution.
- (c) Démontrer que, pour  $n \geq 2$ , l'équation  $(E_n)$  admet deux solutions, que l'on notera  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , telle que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

2. À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de  $f$  ainsi que les droites  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , où  $D_i$  a pour équation  $y = \frac{1}{i}$ , pour  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variations et sur les limites des suites  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  et  $(\beta_n)_{n \geq 2}$ ?
4. On va étudier la suite  $(\beta_n)_{n \geq 2}$  dans cette question.
  - (a) Démontrer que la suite  $(\beta_n)_{n \geq 2}$  est strictement monotone.
  - (b) Montrer que la suite  $(\beta_n)_{n \geq 2}$  admet une limite que l'on précisera.
  - (c) Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par  $u_n = \frac{\beta_n}{n}$ .  
On admet que  $\ln(u_n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n))$ . Prouver alors que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2 n$ .
  - (d) En déduire un équivalent de  $(\beta_n)_{n \geq 2}$ .
5. On s'intéresse dans cette question à la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  admet une limite que l'on précisera.
  - (b) Donner un équivalent de  $\alpha_n - 1$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

## Exemple de sujet 5

## Question de cours.

Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

## Exercice.

Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $[0, 1[$  fixé. On définit les suites  $(f_n(x))_{n \geq 1}$ ,  $(g_n(x))_{n \geq 1}$  et  $(h_n(x))_{n \geq 1}$  par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + x^k), \quad g_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - x^{2k-1}), \quad \text{et} \quad h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ,  $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$  et  $h(x) = f(x)g(x)$ .

- Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées  $(f_n(x), g_n(x))$  lorsque  $x$  prend les valeurs  $\frac{k}{100}$  avec  $k \in \{0, \dots, 80\}$  et  $n = 100$ . Faire une conjecture d'une relation simple entre  $f(x)$  et  $g(x)$  en admettant leurs existences.
- Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ , la suite  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  est croissante et que la suite  $(g_n(x))_{n \geq 1}$  est décroissante.
- (a) Établir que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leq e^t.$$

En déduire que, pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $f(x)$  existe et vérifie

$$1 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

- (b) Montrer que  $f$  est continue en 0.
- (a) Justifier l'existence de  $g(x)$  pour tout  $x \in [0, 1[$ .
  - Montrer que pour tout  $t \in [0, 1[$  et  $x \in [0, 1[$ ,  $1 - (1-x)^t \geq xt$ .  
(on pourra étudier une fonction de  $x$  ou utiliser la formule des accroissements finis.)
  - En déduire l'encadrement suivant, pour tout  $x \in [0, 1[$  :

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leq g(x) \leq \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right).$$

puis la continuité de  $g$  en 0.

- (a) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1[$  :  $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$ .  
En déduire que  $h(x^2) = h(x)$ .
  - Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $h(x^{2^n}) = h(x)$ .  
Conclure alors que pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $h(x) = 1$ .
  - Ce dernier résultat confirme-t-il votre conjecture ?

## Exemple de sujet 6

## Question de cours.

Énoncer la loi faible des grands nombres.

## Exercice.

**Rappel : algorithme de dichotomie.**

On considère une fonction  $g$  continue sur un intervalle  $[a, b]$ . On suppose que  $g$  s'annule exactement une fois sur  $[a, b]$  en un point que l'on note  $\alpha$ .

On définit les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  de la façon suivante :

- $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .
- Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  et :

$$\begin{aligned} &\text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k \\ &\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k. \end{aligned}$$

On sait alors que les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  convergent toutes les deux vers  $\alpha$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution notée  $\alpha$ .
2. En utilisant des valeurs approchées de  $\ln(2)$  et de  $\ln(3)$  à l'aide de Python, justifier que  $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ .
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier  $n$ , deux réels  $a$  et  $b$  et la fonction  $f$ , et qui renvoie  $\alpha$  à  $10^{-n}$  près.
4. Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $\Phi$  est une densité de probabilité.

5. Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)dt$  converge absolument.
6. Montrer que  $\forall t > \alpha, f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$ .
7. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $\Phi$  pour densité. Calculer l'espérance de  $X$  de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

## Exemple de sujet 7

## Question de cours.

Pour  $|q| < 1$ , donner l'expression des sommes suivantes :  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$  et  $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$

## Exercice.

On rappelle que, si  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires indépendantes admettant respectivement les densités  $f$  et  $g$ , alors la variable aléatoire  $U + V$  admet une densité  $f * g$  définie par  $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ .

On considère deux variables aléatoires indépendantes :  $U$  et  $V$  suivant, chacune, la loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

- Justifier son existence, puis déterminer une densité  $f$  de la variable aléatoire  $U^2$ , ainsi qu'une densité de  $V^2$ .
- On considère la variable aléatoire  $Z = U^2 + V^2$ . Justifier que  $Z$  admet une densité de probabilité, notée  $h$ .
- Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire  $Z$  et d'estimer  $P(Z \leq 1)$ .

4. (a) Montrer que, pour  $0 < x \leq 1$ , on a :  $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ .

(b) Montrer que, pour  $0 < x \leq 1$ , on a ;  $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$ .

(c) Montrer que, sur  $]0; 1]$ , on a :  $h(x) = \frac{\pi}{4}$ .

(On pourra utiliser le changement de variable  $y = \sin^2 u$ ).

(d) Interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.

- On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli  $(Y_n)_{n \geq 1}$  mutuellement indépendantes et de même paramètre  $\frac{\pi}{4}$ , et on note  $S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

(a) Soit  $\varepsilon > 0$ , déterminer en fonction de  $n$  et  $\varepsilon$ , une majoration de  $P\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$ .

(b) En déduire, à partir de quelle valeur de  $n$ , il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de  $\frac{\pi}{4}$  et d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$ .

(c) À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de  $\frac{\pi}{4}$  d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$ .

- Existe-t-il d'autres alternatives pour déterminer un intervalle de confiance de  $\frac{\pi}{4}$  au niveau de confiance 0,95 et d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$  ?

## Exemple de sujet 8

## Question de cours.

Énoncer le théorème de Rolle.

## Exercice.

Une urne contient initialement 2 boules blanches et deux boules noires.

Soit  $c$  un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore  $c$  boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche), ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $E_n$  l'événement : « Les  $n$  premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1. Que dire de la loi de  $X$  si  $c = 0$ ? Calculer  $P(X = 3)$  en fonction de  $c$  pour  $c$  quelconque.
2. (a) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument la valeur de  $c$  et un entier naturel  $s$ . Cette fonction doit simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égal à  $s$ . Elle doit renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.  
(b) Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience pour donner une estimation de  $P(X = 0)$  pour  $c = 1$ ,  $c = 2$  et  $c = 5$ .

3. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 
$$P(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2 + kc}{4 + kc}.$$

4. On suppose dans cette question que  $c = 1$ .  
(a) Calculer  $P(E_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . En déduire la valeur de  $P(X = 0)$ .  
(b) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 
$$P(X = n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$
  
(c) En utilisant le théorème du transfert, démontrer que la variable aléatoire  $X + 3$  admet une espérance, et calculer cette espérance. En déduire l'espérance de  $X$ .  
(d) Utiliser la fonction de la question 2(a) pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.
5. On suppose dans cette question que  $c = 2$ .  
(a) Calculer  $P(E_n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul. En déduire la valeur de  $P(X = 0)$ .  
(b) Donner la loi de  $X$ . La variable  $X$  admet-elle une espérance?
6. Dans cette question,  $c$  est un entier naturel non nul quelconque.

(a) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 
$$-\ln(P(E_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2 + kc}\right).$$

- (b) Déterminer alors la valeur de  $P(X = 0)$ .

On pourra pour cela utiliser sans démonstration le résultat suivant :

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites positives et si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  ont même nature.

## Exemple de sujet 9

## Question de cours.

Définition d'une matrice carrée inversible.

## Exercice.

On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :

- soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité  $2/3$  ;
- soit mourir et se désintégrer avec une probabilité  $1/3$ .

On appelle  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la  $n$ -ième étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note  $X_0 = 1$ .

1. Donner la loi et l'espérance de  $X_1$ .
2. (a) Pour  $n \geq 1$ , justifier que  $X_n$  ne prend que des valeurs paires. Expliciter  $X_n(\Omega)$ .  
(b) Écrire un programme informatique prenant en argument la valeur de  $n$ , et retournant les valeurs d'une simulation de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .  
(c) Soit  $i$  tel que  $2i \in X_n(\Omega)$ . Déterminer la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $[X_n = 2i]$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit la fonction  $G_n$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} x^k P(X_n = k) \quad (\text{avec } 0^0 = 1 \text{ par convention})$$

et on admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, G_{n+1} = G_n \circ G_1 = G_1 \circ G_n.$$

- (a) Donner les valeurs de  $G_n(1)$  et  $G'_n(1)$ .
  - (b) En déduire une relation entre  $E(X_{n+1})$  et  $E(X_n)$ .
  - (c) Calculer alors l'espérance de  $X_n$  en fonction de  $n$ .
4. On note  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = P(X_n = 0)$ , et soit  $R$  l'événement « La population de bactéries finit par s'éteindre. ».
    - (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(x))^2$ .
    - (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2.$$

- (c) Montrer que  $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 1/2$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel à déterminer.
5. On note  $\forall n \in \mathbb{N}, D_n$  l'évènement « la population disparaît exactement à l'issue de l'étape  $n$  ».
    - (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(D_n) = u_n - u_{n-1}$ .
    - (b) En remarquant que  $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ , déterminer alors la probabilité que la population de bactéries s'éteigne.

# Rapport des oraux relatifs aux exemples publiés

## Exemple 1

La question de cours a été relativement bien réussie sur ce sujet.

Cet exercice d'algèbre linéaire permettait de vérifier les connaissances fondamentales en algèbre des candidats, sur un exemple en dimension 3 où on attend d'eux une bonne maîtrise des objets manipulés. Il a cependant été globalement peu réussi, mettant en relief des problèmes de raisonnements ou de connaissances du cours.

Dans la question d'informatique, il fallait déjà que les candidats sachent comment écrire une matrice en Python, puis calculer les valeurs propres à l'aide de l'indication fournie, puis déterminer le minimum des valeurs propres possibles. Certains candidats ont fait varier les coefficients 0 et 1 au hasard sur un grand nombre de matrices pour prendre la valeur propre minimale obtenue. D'autres ont fait varier les coefficients avec plusieurs boucles for imbriquées.

Lorsqu'un candidat n'avait pas abouti à la question d'informatique pendant la préparation, l'examinateur pouvait par exemple demander au candidat d'écrire un programme calculant le minimum d'une liste ; cependant il est toujours préférable d'avoir un bout de programme, même inachevé, à proposer à l'examinateur au lieu d'arriver avec une clé USB totalement vide.

Les questions suivantes ont souligné des erreurs de raisonnement en algèbre. L'ensemble  $E$  a souvent été mal compris par les candidats, et il était difficile de leur faire corriger leurs erreurs, même en leur redemandant par exemple d'écrire correctement «  $U$  est vecteur propre de  $M$  ».

## Exemple 2

La question de cours a été très bien réussie sur ce sujet.

La première partie de l'exercice, abordant de l'algèbre en dimension  $n$  a été abordée par la majorité des candidats qui, grâce aux questions multiples et guidées, ont su montrer leurs capacités dans le domaine. La deuxième partie de l'exercice, qui introduisait une application intéressante dans les réseaux sociaux a été moins abordée, sûrement par manque de temps, à part pour quelques rares excellents candidats.

L'exercice a mis en évidence, comme dans de nombreux sujets portant sur l'algèbre linéaire, que les candidats sont peu à l'aise avec les notions qui leur semblent cloisonnées. Ils ne font donc que rarement de lien entre les différentes questions. Très peu pensent à interpréter le rang de la matrice  $J_n$  comme la traduction du fait que 0 est valeur propre de  $J_n$ .

La question d'informatique était ici située au début de l'exercice. Nous encourageons les futurs candidats à avoir manipulé durant leur préparation les fonctions matricielles courantes car, même si leur usage est rappelé dans les sujets (commandes pour obtenir les valeurs propres, les vecteurs propres, ou dans d'autres exercices les produits matriciels,...), certains candidats ne semblent ne jamais les avoir manipulé et semblent perdus lors de l'oral.

La deuxième partie de l'exercice a été moins abordée, les candidats ayant parfois lu l'énoncé trop rapidement pour permettre un véritable travail approfondi durant l'entretien. Il vaut mieux, dans un exercice où un modèle est présent, se concentrer sur les notations, et les premiers exemples, pour déjà s'assurer d'avoir une bonne compréhension du sujet, ceci pour faciliter les questions qui seront posées durant l'entretien.

### Exemple 3

La question de cours a donné lieu à plusieurs contre-sens. Certains candidats donnent une intégrale en guise de réponse, mais dans l'ensemble les réponses étaient correctes.

L'exercice était en deux parties, la première abordant l'algèbre linéaire, la deuxième abordant les intervalles de confiance avec l'approximation en loi par théorème central limite.

Le jury a déploré que sur la première partie, le thème étant similaire à un des sujets publiés dans le rapport 2017, beaucoup de candidats n'avaient pas du tout d'idée pour traiter correctement les questions d'informatique. Même si ce sont des questions qui pourraient être classiques en informatique, on pourrait s'attendre des candidats et des préparateurs qu'ils regardent en particulier les exemples de sujets publiés dans les rapports des années précédentes. Nous choisissons en particulier tous les sujets du rapport pour qu'ils soient efficaces dans la préparation des candidats des années suivantes. Nous les choisissons de manière à porter sur une large partie du programme, avec des thèmes qui nous semblent classiques ou importants, et sont des bons objectifs en termes de révisions pour les futurs candidats.

Là encore, dans la question 2, les étudiants interrogés interprètent clairement mal la question posée. Là où on attendait simplement un calcul rapide des systèmes  $AX = -X$ ,  $AX = X$ ,  $AX = 2X$ , ou encore mieux d'une lecture des résultats des vecteurs propres grâce à l'informatique puis d'une vérification par le calcul, certains candidats se sont lancés dans une étude inutile de  $A - \lambda I_3$  (et souvent fausse). Les candidats associent la phrase «  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  » exclusivement à la phrase «  $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$  », et son étude exclusivement à une étude par pivot de Gauss. Nous attendons des candidats qu'ils fassent preuve de recul face à l'intitulé des questions en algèbre (surtout sur des exercices peu théoriques en dimension 3), afin de percevoir quelle méthode serait la plus adaptée.

La question 3 a été ensuite abordée uniquement par les meilleurs candidats. Dans la question 4, même si les candidats comprenaient l'intérêt du programme, peu ont pensé à expliquer la dernière ligne du programme, et en particulier le facteur  $11^3$  a eu du mal à être interprété par dénombrement.

### Exemple 4

Dans la question de cours, peu de candidats soulignent que le vecteur propre associé à la valeur propre doit être non nul, alors que c'est une des conditions fondamentales à la définition attendue.

Les premières questions de l'exercice ont été bien réalisées par une majorité des candidats. Les candidats ont parfois buté sur les inégalités de la question 1.(c).

En informatique, on attendait dans la question 2 un tracé graphique de fonctions. Certains candidats le font très bien avec Python, mais d'autres plus maladroits n'ont aucune idée de la façon dont on trace une représentation graphique avec Python. Cela nous semble pourtant une compétence élémentaire à acquérir en deux ans d'informatique en classe préparatoire. Certains rares candidats le font avec efficacité et rapidité avec Geogebra, et puisque le sujet ne demandait pas forcément d'étude plus quantitative ensuite (à part la toute dernière question), cela suffisait amplement, et la méthode est alors en effet bien plus adaptée qu'en Python. Outre le gain de temps conféré lors de la préparation, une manipulation active de Geogebra peut être bien plus appropriée pour les suites implicites, via l'utilisation d'un curseur faisant varier la valeur de  $i$ .

Les candidats ont souvent commencé les questions 4 et 5, en bloquant rapidement. Seuls une poignée ont su exploiter à bon escient les indications fournies pour avancer de manière conséquente dans l'exercice.

## Exemple 5

L'exercice proposé étant facile dans les méthodes qu'il mettait en jeu (les candidats avaient les méthodes en tête à la lecture des premières questions), nous l'avons couplé avec une question de cours plus audacieuse. Très peu de candidats ont eu la bonne définition, et se contentaient de dire que  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$  sans plus de détail. Nous considérons alors que la question était partiellement correcte mais n'accordions par la totalité des points puisque répondue de façon incomplète.

Dans l'exercice, les candidats ont, comme dans les autres sujets de ce type, eu du mal à traiter la question d'informatique concernant le tracé des points proposés dans le sujet. Certains candidats ne parvenaient pas à écrire les fonctions calculant  $f_n(x)$  et  $g_n(x)$  pour tout  $x$  et tout  $n$ .

Les questions suivantes étaient plus classiques, et les candidats ont dans l'ensemble pu traiter correctement la question 2, le début de la question 3(a), la question 3(b), et la question 4(b). À l'inverse, ils ont buté sur l'existence de  $f(x)$  et  $g(x)$  par théorème de la limite monotone, et sur les passages à la limite dans les encadrement proposés dans l'exercice.

Les candidats qui n'arrivaient pas à avancer seul dans l'exercice ont été interrogés sur la fin de la question 3(b), et le calcul de la somme  $\sum_{k=1}^n x^k$ .

## Exemple 6

Là encore, l'exercice était jugé plutôt facile et classique dans sa forme, nous l'avons couplé avec une question de cours plus délicate. En effet, nous attendons pour la loi faible des grands nombres un énoncé précis. Quelques candidats savent expliquer correctement le résultat demandé sans le formaliser mathématiquement, seuls quelques rares savent bien l'écrire entièrement.

La question 1 demandait une étude précise de la fonction  $f$ , ce que les candidats ont naturellement fait, mais peu pensent à étudier les valeurs de la fonction  $f$  pour vérifier que 1 appartient bien à l'ensemble image. Les candidats ayant affirmé des valeurs pour les calculs de limites ont dû les justifier en détail (mais les candidats plus dégourdis auraient pu être aidés par la question suivante).

Comme les années précédentes, on peut déplorer que les candidats ne savent pas mettre en place l'algorithme de dichotomie, pourtant rappelé dans l'exercice. Certains candidats appliquent l'algorithme à la mauvaise fonction (il fallait résoudre ici  $f(x) = 1$  et certains résolvent  $f(x) = 0$ ), ou simplement ne parviennent pas à traduire en informatique l'algorithme inscrit sur le sujet, ce qui nous semble alors beaucoup plus inquiétant.

Les candidats ont parfois eu du mal à faire le lien entre la question 4 et la fonction  $f$ , ne reconnaissant pas ici la dérivée de leur fonction  $f$  précédente au signe près.

Enfin, les candidats ont parfois mal lu la question 5, où on attendait pas nécessairement un calcul explicite de l'intégrale. Une simple étude par comparaison suffisait pour répondre à la question demandée. Le calcul était utile pour la question 7, donc n'était pas totalement inapproprié ici, mais les candidats le faisaient spontanément sans réfléchir à l'intitulé de la question.

## Exemple 7

Dans ce genre de question de cours, la compétence attendue est la valeur des sommes des séries. Il est inutile donc pour les candidats de recopier les trois séries au tableau (ce qui prend du temps inutilement) et ils peuvent écrire simplement les valeurs des sommes au tableau. Les résultats sont très bien connus des candidats.

La question 1 pose encore de nombreux problèmes pour un nombre non négligeable de candidats. De manière générale, cette année, tous les questions de type transformation de loi pour une variable à densité ont été rarement bien faits par les candidats, même dans des cas simples comme celui-là. Les candidats manquent de rigueur, n'étudient pas le support des variables concernées. Les candidats trouvaient cependant bien de manière formelle que  $F_U(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  (sans préciser pour quels  $x$ ) et ont donc en général pu continuer un peu dans l'exercice.

Pour les candidats ayant traité la question 1 de façon correcte, la question 4(a) a été très bien faite, signe qu'un travail conséquent a été fait pendant l'année sur les produits de convolution. La question 4(b) a elle cependant été mal comprise, l'indication du changement de variable étant implicite avec le changement de notation de la variable dans l'intégrale. La question 5(a) a pu être déterminée par les candidats, qui ont reconnu ici l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Les questions suivantes cependant ont été peu abordées.

## Exemple 8

Le théorème de Rolle a été moyennement restitué. On attend ici un rappel précis aux hypothèses de son application, dans l'idéal seulement celles qui sont nécessaires.

L'exercice, proposant une modélisation d'expérience par des variables aléatoires discrètes a été plutôt bien réussi. Le sujet était long, mais on peut donc obtenir en conséquence une très bonne note en ne le traitant que partiellement. Certains candidats excellents ont su le traiter presque en intégralité.

Les questions d'informatique ont été dans l'ensemble bien traitées. On peut souligner que les candidats doivent avoir en tête, lorsqu'ils estiment une probabilité ou une espérance empiriquement, quel est le théorème sous-jacent qui justifie l'estimation, à savoir la loi faible des grands nombres. Peu de candidats savent vraiment pourquoi ils agissent ainsi pour faire de l'estimation, lorsqu'on leur demande en détail des explications.

## Exemple 9

La question de cours dans cet exercice a été globalement bien traitée.

L'exercice, proposait une modélisation d'un processus biologique sur l'évolution d'une population de bactéries. Les candidats ont en général bien compris le modèle, et ont pu avec un peu d'aide bien avancer dans l'exercice. Lors de certaines interrogations d'excellente qualité, les candidats ont parfois su le résoudre presque en intégralité.

La question 2(b) d'informatique a été dans l'ensemble bien réalisée. Il est cependant dommage que certains candidats maladroits obtiennent des valeurs impaires pour certains  $X_k$ , alors que la question précédente était sensée leur signaler leur erreur. Il faut faire attention à la question d'informatique lors d'un processus évolutif de la sorte, ici il s'agissait bien de faire apparaître la liste de tous les  $X_k$ , et non uniquement le dernier.

Pour les candidats qui n'avaient pas su traiter la question 2, l'examineur a souvent pu les guider pour traiter les questions 3 et 4 qui ne nécessitaient en réalité que la réponse de la question 1. Avec des indications judicieusement choisies, ils ont en général pu ainsi avancer lors de l'interrogation dans l'exercice.