ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Le sujet était constitué de deux problèmes totalement indépendants. Le premier problème abordait l'algèbre à travers l'évolution de deux populations d'oiseaux. Le second était consacré à l'analyse et aux probabilités : on y étudiait des fonctions de deux variables réelles et des jeux de «pile ou face».

Les questions posées abordaient de vastes thèmes du programme de BCPST de sorte que même les candidats faibles ont pu obtenir quelques points mais le sujet était très long si bien qu'aucun candidat n'est parvenu à le traiter entièrement.

Un système de «malus» a été instauré cette année de façon à pénaliser les candidats qui ne soignent pas suffisamment leur copie. Heureusement, cela ne concerne qu'une minorité de candidats puisque, dans l'ensemble, la présentation des copies est assez satisfaisante, les résultats importants étant en général bien mis en valeur.

PROBLÈME 1

Ce problème, très classique dans les thèmes abordés (essentiellement la réduction des endomorphismes), était consacré à la modélisation de l'évolution de populations d'oiseaux. Dans l'ensemble, il a été assez bien compris.

Partie A

Cette partie introductive, assez facile, était consacrée à une modélisation utilisant une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le calcul du déterminant ne pose pas de problème mais trop de candidats semblent ignorer que cela permet l'obtention immédiate de P^{-1} (lorsqu'on se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Si la plupart des candidats justifient correctement que A est semblable à D, certains utilisent des formulations maladroites voire erronées (par exemple utilisant le rang de A ou la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Signalons qu'ils sont très peu à démontrer que la matrice P permet justement le passage de A à D.
2. La justification de la formule de récurrence $X_{n+1} = AX_n$ ne soulève pas de difficulté (bien qu'il ne faille pas se contenter d'une phrase du type «d'après les données de l'énoncé, on obtient...»). Précisons que le produit matriciel d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ne peut s'écrire (pour $n \geqslant 2$) que sous la forme AX et en aucun cas sous la forme XA ! La récurrence qui découle de ce produit est souvent bien rédigée. Par contre, si de nombreux candidats obtiennent des expressions explicites de j_n et a_n, ils peinent à justifier que des équivalents sont simplement des termes généraux de suites géométriques.

Partie B

La partie B était consacrée à une modélisation utilisant une matrice non diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Des calculs un peu plus techniques concluaient le problème.

1. De nombreux candidats sont capables de vérifier que 2 et -1 sont valeurs propres de la matrice B mais très peu justifient que ce sont les seules. En général, les candidats justifient correctement que B n'est pas diagonalisable. Le passage de B à T est maîtrisé par certains candidats mais il s'agit d'une question très discriminante. Signalons au passage l'erreur extrêmement fréquente qui consiste à croire que deux matrices de même spectre sont semblables. Ajoutons qu'il n'existe pas de symbole mathématique pour signaler la similitude de deux matrices (la notation $\sim$ est, en principe, réservée à la relation d'équivalence matricielle). Le calcul de T^n pose moins de problème : la majorité des candidats sait dans quel cadre utiliser la version matricielle de la formule du binôme de Newton mais ils cherchent trop souvent à faire intervenir la matrice identité. À défaut d'utiliser la formule du binôme de Newton, certains proposent une démonstration par récurrence.

2. La justification de la formule de récurrence faisant intervenir B ne soulève pas de difficulté (mais là encore, on ne peut se contenter d'une phrase creuse) et la majorité des candidats en déduisent une relation faisant intervenir T. L'existence de C_1, C_2 et C_3 est parfois bien présentée (même si certains croient voir une erreur de signe à travers le coefficient $n(-1)^n$).
3. Cette dernière question a été très mal traitée : pratiquement aucun candidat n'est parvenu à justifier correctement les divergences demandées. S'ils sont très nombreux à calculer de manière correcte le rang de la matrice C_1, pratiquement aucun ne fait le lien avec les convergences des suites de termes généraux $\frac{J_n}{S_n}$, $\frac{P_n}{S_n}$ et $\frac{S_{n+1}}{S_n}$.

PROBLÈME 2

Ce problème était consacré à deux fonctions de deux variables réelles puis à trois variables aléatoires réelles et enfin à l'étude de jeux de «pile ou face». Ce problème, plus long que le précédent, exigait de maîtriser des calculs plus délicats dans les parties A et B et de faire preuve d'un esprit de synthèse en partie C. Il a posé plus de difficultés que le premier problème.

Partie A

Cette première partie, dédiée à l'analyse, a été probablement la moins bien comprise du sujet.

1. Cette question, qui peut sembler facile, s'est pourtant révélée très discriminante.
2. Pratiquement tous les candidats ont calculé les dérivées partielles demandées mais bien peu savent en déduire, par composition, la dérivée de $x \mapsto f_k(x, 1-x)$. Certains candidats ont reconnu en $\varphi_k(x)$ un taux d'accroissement mais, le plus souvent, ils peinent à présenter correctement leur démarche pour obtenir la limite demandée. L'expression de $g_k(x, y)$ à l'aide d'une somme a régulièrement été obtenue (mais trop souvent à l'aide de la formule dite «de Bernoulli» qui, rappelons-le, n'est pas au programme de BCPST). Retrouver alors la limite de φ_k n'a guère posé de problème.
3. Le prolongement par continuité de φ_k n'a soulevé que peu de difficultés.
4. De nombreux candidats obtiennent la limite lorsque $k \to +\infty$ de $\varphi_k(x)$ (mais le plus souvent, ils ne traitent que le cas où $x \neq \frac{1}{2}$) mais l'inégalité qui suit a été rarement obtenue. La relation de récurrence demandée ensuite a été mieux traitée ainsi que le sens de variation de la suite de terme général$\varphi_k(x)$ (en tout cas pour $k \geqslant 2$). Trop de candidats confondent suite et série si bien que la dernière question a été très mal comprise.

Partie B

Cette partie était relative à l'étude de trois variables aléatoires réelles : elle a été trop souvent l'occasion de raisonnements flous ou incomplets. Les calculs de la fin de la partie ont été rarement abordés.

1. La présence d'une loi géométrique doit être correctement justifiée (on attend que les notions d'expérience de Bernoulli et d'indépendance soient abordées). Les questions suivantes (probabilité conditionnelle et relation de récurrence) ont souvent été traitées de manière extrêmement confuse. Quant à la justification de l'égalité $P(T_{\text{fp}} = k) = \varphi_k(p)$, la plupart des candidats ont remarqué que la relation de récurrence était bien la même mais sans vérifier l'égalité des termes initiaux.
2. Le caractère presque certain de l'apparition de «face pile» n'a pas posé de difficulté mais le calcul de l'espérance de T_{fp}, plus délicat car nécessitant de réinvestir deux expressions de $\varphi_k(p)$, a été rarement abordé.
3. Là encore, la justification de la relation de récurrence a donné lieu à des raisonnements trop souvent confus. La majorité des candidats sait justifier que le polynôme donné admet deux racines distinctes (le plus souvent en omettant de démontrer qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$) et calculent, de façon plus ou moins efficace, la somme et le produit de ces racines. Enfin, la plupart des candidats reconnaissent une suite récurrente linéaire d'ordre 2 mais peinent à calculer $\lambda + \mu$ et $\lambda r_2 + \mu r_1$.

4. Comme précédemment, le caractère presque certain de l'apparition de «pile pile» n'a pas posé de difficulté mais le calcul de l'espérance de T_{pp} a été très rarement abordé.

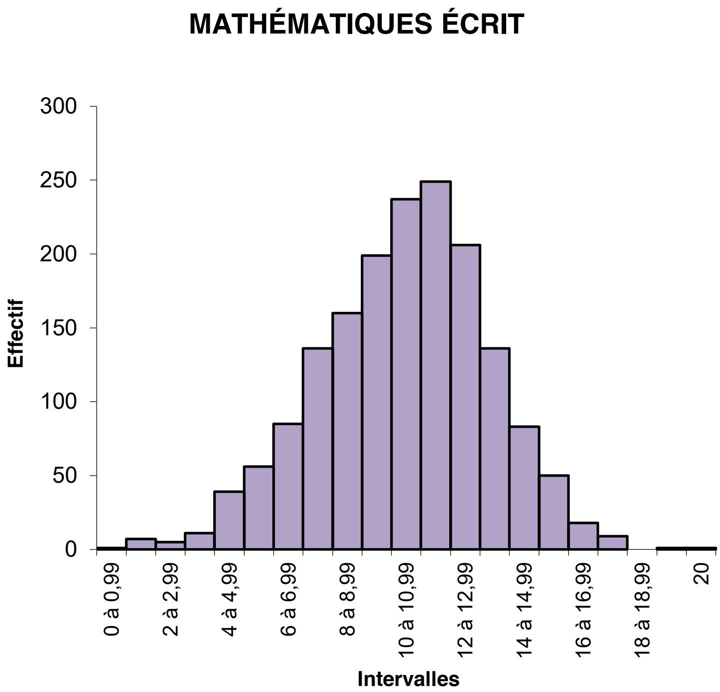
Partie C

Cette dernière partie du problème comportait des questions très abordables et d'autres utilisant des résultats de la partie précédente.

1. Le calcul de $P(A)$ a souvent été abordé de manière satisfaisante mais trop de candidats ont considéré comme évident le fait que $B = \overline{A}$. L'inéquation qui en découle a été, en général, bien traitée.
2. De nombreux candidats ont compris que (B, C) est un système quasi-complet d'événements mais ils justifient avec difficulté que $P(C) = p^2$. L'inéquation qui en découle a souvent provoqué des erreurs de calcul. La dernière question n'a presque jamais été abordée de façon satisfaisante.

Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	1	0,06	1	0,06
1 à 1,99	7	0,41	8	0,47
2 à 2,99	5	0,30	13	0,77
3 à 3,99	11	0,65	24	1,42
4 à 4,99	39	2,31	63	3,73
5 à 5,99	56	3,32	119	7,05
6 à 6,99	85	5,03	204	12,08
7 à 7,99	136	8,05	340	20,13
8 à 8,99	160	9,47	500	29,60
9 à 9,99	199	11,78	699	41,39
10 à 10,99	237	14,03	936	55,42
11 à 11,99	249	14,74	1185	70,16
12 à 12,99	206	12,20	1391	82,36
13 à 13,99	136	8,05	1527	90,41
14 à 14,99	83	4,91	1610	95,32
15 à 15,99	50	2,96	1660	98,28
16 à 16,99	18	1,07	1678	99,35
17 à 17,99	9	0,53	1687	99,88
18 à 18,99		0,00	1687	99,88
19 à 19,99	1	0,06	1688	99,94
20	1	0,06	1689	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1689
Minimum : 0,57
Maximum : 20
Moyenne : 10,42
Ecart type : 2,87



Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99		0,00	0	0,00
1 à 1,99	4	0,24	4	0,24
2 à 2,99	22	1,30	26	1,54
3 à 3,99	34	2,01	60	3,55
4 à 4,99	54	3,20	114	6,75
5 à 5,99	102	6,04	216	12,79
6 à 6,99	156	9,24	372	22,02
7 à 7,99	140	8,29	512	30,31
8 à 8,99	174	10,30	686	40,62
9 à 9,99	152	9,00	838	49,62
10 à 10,99	164	9,71	1002	59,33
11 à 11,99	150	8,88	1152	68,21
12 à 12,99	135	7,99	1287	76,20
13 à 13,99	110	6,51	1397	82,71
14 à 14,99	77	4,56	1474	87,27
15 à 15,99	72	4,26	1546	91,53
16 à 16,99	45	2,66	1591	94,20
17 à 17,99	39	2,31	1630	96,51
18 à 18,99	16	0,95	1646	97,45
19 à 19,99	12	0,71	1658	98,16
20	31	1,84	1689	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1689
Minimum : 1,55
Maximum : 20
Moyenne : 10,30
Ecart type : 3,88