ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Le sujet était constitué de deux problèmes totalement indépendants. Le premier problème, scindé en trois parties, abordait l'analyse (étude de suites et de séries) et les probabilités (variables aléatoires suivant des lois géométriques). Le second problème, scindé en trois parties indépendantes, abordait essentiellement l'algèbre (étude d'une propriété de positivité de matrices carrées de tailles 2 puis 3 puis $n \in \mathbb{N}^*$) et, en fin de problème, les probabilités (variables aléatoires suivant une loi de Poisson).

La variété des thèmes abordés et la progressivité des questions dans les différentes parties ont permis aux candidats faibles d'engranger quelques points et certains candidats particulièrement brillants sont parvenus à aborder la quasi totalité du sujet.

La présentation des copies nous a semblé globalement satisfaisante, les résultats importants étant en général bien mis en valeur.

PROBLÈME 1

Ce problème était consacré, entre autres, à l'étude d'une somme de variables aléatoires suivant des lois géométriques.

Partie A

La partie A était consacrée à quelques propriétés classiques de deux séries de Riemann (recherche d'un équivalent de la première et majoration de la seconde). Elle a été en général assez bien traitée même si de nombreux candidats semblent manquer de technicité concernant les manipulations d'inégalités.

1. La première question a posé très peu de difficultés.
2. Trop de candidats ont fait preuve d'un apprentissage insuffisant du cours puisqu'ils ont été incapables d'énoncer correctement le théorème des accroissements finis. Même parmi les candidats connaissant ce théorème, la capacité à l'appliquer nous a semblé fragile : en effet, ils ont été très nombreux à préférer obtenir la double inégalité demandée à l'aide de deux études de fonctions obtenues par différences ou par intégration sur $[x, x+1]$ de la fonction inverse. Par ailleurs, la manipulation d'inégalités pour en déduire l'encadrement de $\frac{1}{k}$, ou la sommation de ces inégalités a souvent posé problème (en particulier dans le cas où $n = 1$). En général, les candidats sont parvenus à montrer que $A_n \sim \ln n$ même si la preuve du fait que $\ln(n+1) \sim \ln n$ était souvent absente.
3. La plupart des candidats ont obtenu les valeurs demandées mais le plus souvent, ils ont présenté les calculs comme s'il s'agissait de valeurs approchées de u_4 et v_4, sans tenir compte du fait qu'il était attendu dans un cas une minoration et dans l'autre une majoration. Nous avons été surpris du nombre de candidats qui écrivent (par exemple) $u_4 \approx 0,4 \Rightarrow u_4 \leqslant 0,4$ ce qui est évidemment faux ! Il s'agissait ensuite de montrer que les suites u et v sont adjacentes ce que de nombreux candidats n'ont pas compris, certains d'entre eux allant jusqu'à redémontrer le théorème des suites adjacentes. L'encadrement attendu était naturellement $0,4 \leqslant \ell \leqslant 0,8$ même si de nombreux candidats se sont contentés de $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
4. Cette question a posé moins de problème : pratiquement tous les candidats ont obtenu la valeur de (a, b) (mais ils ont été peu nombreux à réfléchir à l'unicité). La majoration de $\frac{1}{k(k-1)}$ par $\frac{2}{k^2}$, qui pose pourtant peu de difficultés, a souvent été obtenue à partir d'inégalités fausses. Ensuite, de nombreux candidats ont prouvé que la série de terme général $\frac{1}{k(k-1)}$ est convergente puis la somme de cette série a souvent été calculée (mais régulièrement par différence de deux séries divergentes). Enfin, la majoration de B_n demandée a rarement été obtenue.

Partie B

Cette partie était consacrée à quelques calculs élémentaires de dénombrement et probabilités (signalons au passage que si ces probabilités s'expriment sous forme d'une fraction, il est alors d'usage de donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible). La première question a été en général bien comprise, mais la suite a été beaucoup plus discriminante.

1. Cette première question n'a pas posé de problème.
2. Dans cette question, très peu de candidats ont pensé à utiliser une loi binomiale mais malgré cela ils ont été assez nombreux à mener un calcul correct (souvent à l'aide d'un arbre pondéré) par contre ils ont été beaucoup plus rares à dénombrer les situations où la bille se trouve sur exactement deux zones distinctes en quatre victoires.
3. Cette dernière question a été peu abordée et les candidats qui ont esquissé un calcul ont rarement fait le lien avec les questions précédentes.

Partie C

Cette dernière partie, plus délicate, était consacrée à des variables aléatoires suivant des lois géométriques. Les trois premières questions ont été très souvent abordées mais les deux dernières, plus techniques et nécessitant de reprendre des résultats de la partie A ont posé énormément de problèmes.

1. De très nombreux candidats ont correctement justifié que T_1 suit une loi certaine et ont obtenu l'ensemble des valeurs prises par T_2 puis $P(T_2 > 1)$.
2. Dans cette question, trop de candidats se sont contentés d'affirmer des résultats, soit sans apporter la moindre justification, soit en oubliant de mentionner l'indépendance des expériences répétées jusqu'au premier succès. En général les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique ont été correctement données.
3. La plupart des candidats ont compris ce que représentait S_n et ils ont réussi à l'exprimer en fonction de A_n. Toutefois, ils ont été très peu nombreux à utiliser une majoration de A_n démontrée en partie A pour en déduire une majoration de l'espérance de S_{16}.
4. La question de l'indépendance des variables aléatoires T_i n'a presque jamais été traitée correctement. Le calcul de la variance de S_n, plus délicat que celui de l'espérance, a été peu traité.
5. De très nombreux candidats ont reconnu une application du théorème de Bienaymé-Tchebychev mais seuls quelques candidats remarquables sont parvenus à l'exploiter pour répondre à la question finale.

PROBLÈME 2

Ce problème était consacré à l'étude de matrices carrées satisfaisant une propriété de positivité.

Partie A

Cette première partie a été sans aucun doute la mieux comprise du problème. La plupart des candidats ont su résoudre une équation differentielle linéaire homogène à coefficients constants et donner la forme explicite de suites récurrentes d'ordre 2.

1. Cette première question a soulevé peu de difficultés. Signalons toutefois que peu de candidats ont remarqué que l'équation caractéristique correspondait à une identité remarquable.
2. Pratiquement tous les candidats ont justifié que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, presque tous ont compris que l'existence des suites a et b se justifiait par récurrence mais ils ont été nombreux a mal rédiger cette démonstration, le plus souvent en se contentant de traiter les cas $n = 0$ et $n = 1$. La relation de récurrence satisfaite par les suites a et b a souvent été obtenue (mais rarement en exploitant l'équation differentielle proposée). Enfin, les expressions de a_n et b_n ont souvent été données (mais parfois en fonction de constantes qui n'apparaissent pas dans l'énoncé).
3. Obtenir une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant la relation demandée a souvent posé problème : une telle matrice (mais ce n'était pas la seule possible) était pourtant suggerée par la question précédente. De nombreux candidats ont abordé la question à travers des calculs très lourds faisant intervenir quatre inconnues et menant le plus souvent à des réponses erronées. La recherche du spectre a ensuite posé moins de difficultés. Enfin, de nombreux candidats ont manifestement mal compris la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Partie B

Cette partie relative à une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ a été beaucoup moins bien comprise que la précédente.

1. La recherche du noyau de f a souvent été traitée de façon correcte. La seconde partie de la question a été très discriminante : certains candidats ont confondu $f(x) - x \in \operatorname{Ker} f$ avec $f(x) - x = 0$, d'autres ont vérifié que $f^2 = f$ (le plus souvent sans faire le lien avec la question posée) et d'autres heureusement ont calculé $f(x) - x$ pour vérifier qu'il est colinéaire à un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} f$. La recherche de l'image de f a également posé problème. Si de nombreux candidats sont parvenus à démontrer qu'il s'agit d'un plan en utilisant le théorème du rang, ils ont été plus rares à en donner une équation cartésienne et un vecteur normal.
2. Le calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ (dans le cas présent, un plan) a été très rarement abordé, pratiquement aucun candidat n'ayant fait le lien avec la première question. Signalons toutefois que quelques candidats ont reconnu une inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité demandée ensuite et la conséquence relative à $f(x) \cdot x$ ont été mieux traitées.

Partie C

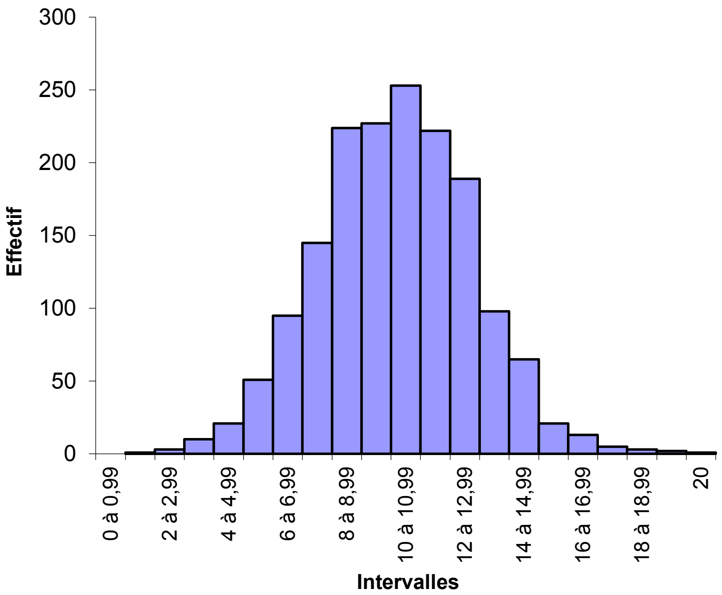
Cette dernière partie du problème, naturellement plus difficile, a été très peu abordée mais elle a aussi donné l'opportunité à certains candidats de faire preuve d'une parfaite connaissance du cours relatif au produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et à la réduction des endomorphismes.

1. Cette première question a été très mal comprise : de nombreux candidats ont pensé que la matrice A était symétrique et ont parfois utilisé la matrice de la partie précédente. L'équivalence entre f vérifie (P) et $f + f^*$ vérifie (P) a souvent été abordée (parfois sans que la méthode utilisée soit bien claire : le candidat a-t-il procédé par double implication ou directement par équivalence ?). Très rares sont les candidats qui ont reconnu ensuite une application du théorème spectral. La dernière équivalence relative au spectre de $f + f^*$ est beaucoup plus technique et a été très rarement abordée de façon satisfaisante.
2. De nombreux candidats ont observé que $B + {}^tB = A$ et ont justifié que g n'est pas diagonalisable, de façon plus ou moins astucieuse (ne peut-on pas donner directement les valeurs propres d'une matrice triangulaire ?). Démontrer que 1 et $n + 1$ sont les seules valeurs propres de A nécessite une bonne maitrise des théorèmes d'algèbre linéaire relatifs à la réduction des endomorphismes et ce fut le cas de certains candidats remarquables. Enfin, les candidats qui ont conclu que f vérifie (P) ont été extrêmement peu nombreux.
3. Le calcul de l'espérance de $X_i X_j$ a souvent été abordé de façon correcte (en tout cas lorsque $i \neq j$). Les deux dernières questions n'ont presque jamais été abordées de façon satisfaisante.

Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99		0,00	0	0,00
1 à 1,99	1	0,06	1	0,06
2 à 2,99	3	0,18	4	0,24
3 à 3,99	10	0,61	14	0,85
4 à 4,99	21	1,27	35	2,12
5 à 5,99	51	3,09	86	5,22
6 à 6,99	95	5,76	181	10,98
7 à 7,99	145	8,79	326	19,77
8 à 8,99	224	13,58	550	33,35
9 à 9,99	227	13,77	777	47,12
10 à 10,99	253	15,34	1030	62,46
11 à 11,99	222	13,46	1252	75,92
12 à 12,99	189	11,46	1441	87,39
13 à 13,99	98	5,94	1539	93,33
14 à 14,99	65	3,94	1604	97,27
15 à 15,99	21	1,27	1625	98,54
16 à 16,99	13	0,79	1638	99,33
17 à 17,99	5	0,30	1643	99,64
18 à 18,99	3	0,18	1646	99,82
19 à 19,99	2	0,12	1648	99,94
20	1	0,06	1649	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1649
Minimum : 1,69
Maximum : 20
Moyenne : 10,16
Ecart type : 2,59

MATHEMATIQUES ECRIT



Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	1	0,06	1	0,06
1 à 1,99	6	0,36	7	0,42
2 à 2,99	21	1,27	28	1,70
3 à 3,99	47	2,85	75	4,55
4 à 4,99	58	3,52	133	8,07
5 à 5,99	72	4,37	205	12,43
6 à 6,99	115	6,97	320	19,41
7 à 7,99	148	8,98	468	28,38
8 à 8,99	182	11,04	650	39,42
9 à 9,99	178	10,79	828	50,21
10 à 10,99	126	7,64	954	57,85
11 à 11,99	158	9,58	1112	67,43
12 à 12,99	128	7,76	1240	75,20
13 à 13,99	105	6,37	1345	81,56
14 à 14,99	95	5,76	1440	87,33
15 à 15,99	60	3,64	1500	90,96
16 à 16,99	49	2,97	1549	93,94
17 à 17,99	34	2,06	1583	96,00
18 à 18,99	23	1,39	1606	97,39
19 à 19,99	12	0,73	1618	98,12
20	31	1,88	1649	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1649
Minimum : 0,31
Maximum : 20
Moyenne : 10,38
Ecart type : 3,92

PHYSIQUE ECRIT