ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Le sujet était constitué de deux problèmes totalement indépendants. Le premier problème, scindé en quatre parties, abordait l'algèbre et les probabilités, le second, scindé en trois parties, abordait l'analyse et les probabilités. À l'intérieur d'une même partie les questions sont, en principe, de difficulté croissante.

Les thèmes abordés et le niveau de difficulté des questions proposées étaient très variés, si bien que même les candidats les plus faibles ont pu glaner quelques points. À l'inverse, certaines questions du sujet étaient d'un niveau élevé et seuls de très rares candidats ont pu traiter la totalité du sujet.

Rappelons quelques consignes concernant les qualités de présentation d'une copie : l'écriture du candidat doit être soignée, les ratures et les surcharges de blanc correcteur doivent être évitées, les questions correctement numérotées et les conclusions mises en valeur. La présentation des copies nous a semblé globalement correcte, mais nous avons également eu à traiter des copies pratiquement illisibles si bien que nous avons décidé de mettre en place, dès l'an prochain, une minoration des points aux copies ne présentant pas suffisamment les qualités susmentionnées.

PROBLÈME 1

Les parties A et B du problème 1 étaient consacrées à la diagonalisation de matrices circulantes. Les parties C et D étaient consacrées à des calculs de probabilité liés au choix aléatoire d'une partie d'un ensemble E fini. Ces calculs amènent à calculer la somme des cardinaux des intersections de deux parties de E.

Partie A

On étudiait dans cette partie une matrice J_n appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, les valeurs propres étant les nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Il apparaît malheureusement que de très nombreux candidats ne maitrisent pas les régles de calcul d'une exponentielle complexe.

1. Les calculs du rang de J_n et de son noyau ont souvent été corrects, mais pas toujours justifiés. La preuve que les colonnes de J_n forment une base orthonormale de J_n était souvent peu convaincante. De nombreux candidats semblaient ensuite calculer explicitement ${}^tJ_n\, J_n$ (il s'agissait de déduire ce produit d'une propriété du cours) afin de découvrir que ce produit est égal à I.
2. De nombreux candidats ont démontré que 1 est valeur propre (parfois après des calculs assez maladroits du rang d'une matrice) et ont cru avoir démontré l'égalité $\mathrm{Vect}\big((1,\dots,1)\big) = E_1$ alors qu'ils n'avaient prouvé que l'inclusion $\mathrm{Vect}\big((1,\dots,1)\big) \subset E_1$.
3. Le calcul de u_n a régulièrement posé problème, d'autant que certains candidats ont pensé qu'il était demandé de prouver que le produit scalaire $u_n \cdot u_n$ était vecteur propre de J_n ! La question relative au vecteur u_k fut très rarement réussie : les candidats ont semblé peu à l'aise avec la manipulation des exponentielles complexes. Enfin, la justification de la diagonalisabilité de J_n était souvent correcte (si on accepte que les valeurs propres proposées par l'énoncé sont distinctes).

Partie B

Cette partie reposait très largement sur la précédente, aussi les nombreux candidats en difficulté avec les nombres complexes, ont eu beaucoup de peine à répondre aux questions posées.

1. Certains candidats ont diagonalisé J_4 sans faire le lien avec les résultats précédents (ce fut parfois correct mais extrêmement laborieux). D'autres ont écrit D et P sans faire le lien avec le nombre complexe i, ce qui les a amené à des calculs qui semblaient insurmontables. Heureusement, les calculs de J_4^2, J_4^3 et J_4^4 étaient en général corrects.

2. L'énoncé de cette question contenait une erreur : dans la matrice générique de l'ensemble $\mathcal{E}$, il faut bien entendu lire a à la place de s. Cette erreur, relevée par une très large majorité des candidats, semble heureusement n'avoir perturbé personne. De nombreux étudiants ont montré que la famille proposée dans l'énoncé était effectivement génératrice de $\mathcal{E}$, mais ils sont beaucoup plus rares à avoir justifié que cette famille était libre. Enfin, la matrice D n'étant souvent pas écrite correctement par les candidats, rares sont ceux qui sont parvenus à écrire la matrice Δ pour en déduire ses valeurs propres en fonction de a, b, c et d.
3. Pratiquement tous les candidats savaient écrire les valeurs propres de A^k en fonction de celles de A et de k, mais les valeurs propres de A n'étant pas connues, ils ne pouvaient pas étudier la convergence vers 0 ou 1 de ces valeurs propres. Notons tout de même que quelques candidats y sont parvenus, et que l'interprétation qu'ils ont alors donné de $P\delta P^{-1}$ était satisfaisante.

Partie C

Cette partie, en lien avec une variable aléatoire suivant une loi binomiale, a en général été bien réussie.

1. De nombreux candidats ont confondu les cardinaux de E et $\mathcal{P}(E)$ mais ils ont tout de même été nombreux à reconnaître une loi binomiale. Il était alors facile d'en déduire l'espérance de X.
2. Cette question a en général été bien traitée même si les candidats se sont souvent précipités sur le logarithme népérien, alors qu'un calcul élémentaire permettait de conclure que $n \geqslant 7$.

Partie D

Cette dernière partie fut la moins abordée du problème. Ceci s'explique sans doute par le fait que cette partie intervenait en fin de problème mais surtout en raison du niveau de difficulté assez élevé des questions posées. Il était demandé de la part des candidats beaucoup de rigueur dans les calculs de dénombrement et une très bonne maîtrise des techniques de calculs de probabilités.

1. La première partie de la question a rarement été traitée correctement, la seconde, dans laquelle il s'agissait d'appliquer (en justifiant) la formule des probabilités totales, l'a été davantage. Signalons toutefois que trop de candidats ont proposé des probabilités manifestement plus grandes que 1 ($2 - \frac{1}{n}$ par exemple).
2. Pour justifier la non indépendance des variables aléatoires X_1 et Y de nombreux candidats ont proposé des explications peu convaincantes, alors qu'il était attendu une démonstration précise, reposant sur un calcul. Quelques rares candidats ont compris ensuite qu'il s'agissait de distinguer les cas $k < i$ et $k \geqslant i$, mais la loi de probabilité de Y a été rarement donnée.
3. Si le début de la question a été abordé par une très large majorité des candidats, la seconde partie (qui était certainement la question la plus délicate du sujet) n'a pratiquement jamais été abordée de façon satisfaisante.

PROBLÈME 2

Ce problème était relatif à l'étude de quelques propriétés élémentaires de la fonction Gamma d'Euler dans les parties A et B. La partie C était consacrée à l'étude d'une densité de probabilité faisant intervenir la fonction Gamma. Il a souvent été moins abordé que le premier problème.

Partie A

On cherchait dans cette partie à utiliser les théorèmes et définition du cours pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction Gamma. Beaucoup de candidats ont semblé ne pas maîtriser la propriété de convergence de l'intégrale par majoration pour les fonctions positives et ou confondre celle-ci avec la croissance de l'intégrale. Signalons enfin que les candidats qui se sont lancés dans des calculs avec des précautions oratoires (par exemple «sous réserve de convergence») mal comprises, ont souvent fini par ne rien démontrer du tout.

1. Les candidats se sont montrés capables de lever l'indétermination de cette limite mais, souvent, n'ont pas utilisé la simple définition d'une limite finie en $+\infty$ pour établir l'existence de T. Ensuite, ils ont été très peu nombreux à établir proprement la convergence de l'intégrale proposée pour $x > 0$ et sa divergence pour $x \leqslant 0$, la plupart des candidats n'ayant pas fait le lien avec la majoration précédente sur $[T, +\infty[$.
2. De nombreux candidats ont calculé correctement la valeur de l'intégrale lorsque $x > 0$ mais peu ont justifié la divergence si $x \leqslant 0$. Par ailleurs, certains l'ont fait en utilisant des propriétés qui ne sont pas au programme de BCPST (par exemple, un critère de Riemann) alors qu'il était attendu une disjonction de cas et l'utilisation de propriétés de convergence au programme de BCPST. Enfin, de nombreux candidats n'ont manifestement pas vu la différence entre $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
3. La dernière question de cette partie a souvent été abordée de façon satisfaisante.

Partie B

On établissait dans cette partie le lien entre la fonction Gamma et la notion de factorielle et on calculait $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Le début de cette question a été abordée par de très nombreux candidats. La formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$) s'obtient par une intégration par parties, mais cette intégration par parties a souvent été mal rédigée. Conformément au programme, il était attendu des candidats qu'ils établissent la convergence de tous les termes apparaissant dans la formule. Les candidats pouvaient aussi se placer sur un segment puis passer à la limite (en le justifiant) ce qui était bien sûr parfaitement correct. Le calcul de $\Gamma(1)$ et la démonstration par récurrence qui suit ont rarement posé problème.
2. Cette question a souvent été mal comprise par les candidats. S'il y a peu de justification à donner concernant la limite en 1, la limite en $+\infty$ méritait une explication (reposant sur l'unicité de la limite ou sur le fait que Γ n'est pas majorée). Les limites en 0 et en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{\Gamma(x)}{x}$ ont régulièrement été données de manière tout à fait correcte.
3. Une large majorité des candidats a su donner les valeurs des deux intégrales proposées mais le calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ nécessitait un changement de variable adapté aux intégrales impropres, rarement rédigé avec soin. Enfin, le calcul de $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ demande plus de technique dans les calculs et a été rarement abordé.

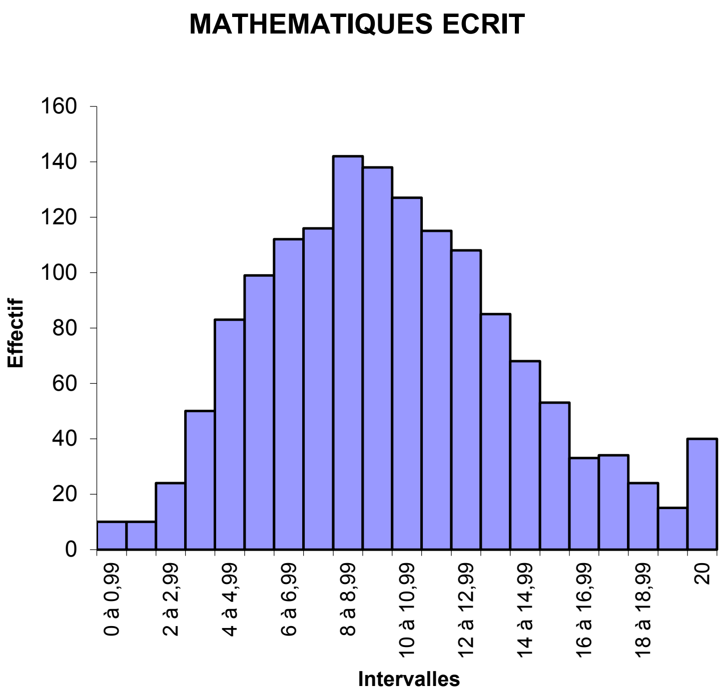
Partie C

Cette dernière partie visait à étudier une densité de probabilité en lien avec la fonction Gamma, la loi exponentielle et la loi de Poisson.

1. Le début de cette question n'a en général pas posé de problème, mais peu de candidats sont parvenus à établir la condition nécessaire et suffisante demandée. Les variations de $f_{a,\lambda}$ ont souvent été abordées mais la majorité des candidats n'a pas tenu compte du fait que $\frac{a-1}{\lambda}$ pouvait être négatif.
2. La plupart des candidats ont reconnu une loi exponentielle et beaucoup ont justifié que $f_{a,\lambda}$ est continue presque partout et positive. Toutefois, ils ont été peu nombreux à mener à bien le calcul de l'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Enfin, le calcul de la densité de la variable aléatoire $\frac{\lambda'}{\lambda}X$ nécessitait de passer par la fonction de répartition (toute autre technique n'étant pas explicitement au programme en BCPST2).
3. Lorsque cette question a été abordée, elle l'a souvent été de façon satisfaisante.
4. La dernière question du sujet a naturellement été très peu abordée. Néanmoins, quelques candidats sont parvenus à dériver $F_{a,\lambda}$ et à reconnaître une somme télescopique, même si, là encore, certains candidats ont écrit des probabilités plus grandes que 1 (par exemple $1 + \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k \mathrm{e}^{-\lambda x}}{k!}$). La suite de cette question n'a pratiquement pas été traitée de façon correcte.

Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	10	0,67	10	0,67
1 à 1,99	10	0,67	20	1,35
2 à 2,99	24	1,62	44	2,96
3 à 3,99	50	3,36	94	6,33
4 à 4,99	83	5,59	177	11,91
5 à 5,99	99	6,66	276	18,57
6 à 6,99	112	7,54	388	26,11
7 à 7,99	116	7,81	504	33,92
8 à 8,99	142	9,56	646	43,47
9 à 9,99	138	9,29	784	52,76
10 à 10,99	127	8,55	911	61,31
11 à 11,99	115	7,74	1026	69,04
12 à 12,99	108	7,27	1134	76,31
13 à 13,99	85	5,72	1219	82,03
14 à 14,99	68	4,58	1287	86,61
15 à 15,99	53	3,57	1340	90,17
16 à 16,99	33	2,22	1373	92,40
17 à 17,99	34	2,29	1407	94,68
18 à 18,99	24	1,62	1431	96,30
19 à 19,99	15	1,01	1446	97,31
20	40	2,69	1486	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1486
Minimum : 0,25
Maximum : 20
Moyenne : 10,04
Ecart type : 4,28



Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	3	0,20	3	0,20
1 à 1,99	9	0,61	12	0,81
2 à 2,99	17	1,14	29	1,95
3 à 3,99	21	1,41	50	3,36
4 à 4,99	54	3,63	104	6,99
5 à 5,99	69	4,64	173	11,63
6 à 6,99	94	6,32	267	17,96
7 à 7,99	136	9,15	403	27,10
8 à 8,99	136	9,15	539	36,25
9 à 9,99	181	12,17	720	48,42
10 à 10,99	136	9,15	856	57,57
11 à 11,99	158	10,63	1014	68,19
12 à 12,99	130	8,74	1144	76,93
13 à 13,99	105	7,06	1249	83,99
14 à 14,99	74	4,98	1323	88,97
15 à 15,99	44	2,96	1367	91,93
16 à 16,99	45	3,03	1412	94,96
17 à 17,99	27	1,82	1439	96,77
18 à 18,99	19	1,28	1458	98,05
19 à 19,99	10	0,67	1468	98,72
20	19	1,28	1487	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1487
Minimum : 0,2
Maximum : 20
Moyenne : 10,37
Ecart type : 3,74