ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Le sujet était constitué de deux problèmes totalement indépendants. Le premier problème, scindé en quatre parties, abordait l'algèbre et les probabilités, le second, scindé en trois parties, abordait l'analyse et les probabilités. À l'intérieur d'une même partie les questions sont en principe de difficulté croissante.

Les thèmes abordés et le niveau de difficulté des questions proposées étaient très variés si bien que même les candidats les plus faibles ont pu glaner quelques points. À l'inverse, le sujet proposé était relativement long et seuls de rares candidats ont pu traiter la totalité du sujet.

Même si la présentation des copies nous a semblé en général satisfaisante, nous avons constaté cette année que le nombre de copies peu soignées était en nette augmentation au point qu'il faille s'interroger sur la possibilité d'introduire l'évaluation du soin dans notre barème. Rappelons quelques consignes élémentaires : l'écriture du candidat doit être soignée, les ratures et les surcharges de blanc correcteur doivent être évitées, les questions correctement numérotées et les conclusions mises en valeur.

PROBLÈME 1

Le problème 1 était consacré à l'étude d'un processus de Markov. On se proposait ainsi de calculer de deux façons des puissances successives de matrices (à l'aide d'une démonstration par récurrence ou de la formule du binôme de Newton). Enfin on utilisait certains de ces résultats pour calculer une espérance mathématique.

Partie A

Cette première partie permettait d'introduire la matrice A utilisée dans tout le problème. Si les candidats ont parfois semblé avoir eu une assez bonne intuition des résultats, les justifications ont souvent été très insuffisantes.

1. Les candidats ont souvent raisonné par disjonction de cas ce qui est ici assez fastidieux à rédiger alors qu'un arbre pondéré de probabilités et des calculs justifiés permettaient de conclure.
2. On attendait des candidats qu'ils introduisent, en le justifiant, un système complet d'événements puis qu'ils appliquent la formule des probabilités totales. L'interprétation des coefficients de A^k devait également être justifiée.

Partie B

Cette partie abordait le calcul des puissances successives de A. Étant donné le niveau de difficulté des questions proposées, elle a été traitée de façon assez décevante.

1. (a) Peu de candidats sont parvenus à rédiger correctement cette question : ils ont été nombreux à écrire que si $(A, B) \in {\mathcal{E}_3}^2$ alors $AB \in \mathcal{E}_3$ sans comprendre qu'il s'agissait précisément ce qu'il fallait démontrer. Ils sont en fait très rares à savoir écrire la formule théorique d'un produit matriciel ou même d'un produit matriciel littéral. Même l'initialisation de la récurrence a posé problème puisqu'elle a souvent été rédigée au rang 1.
   (b) Cette question a été très mal comprise. Premièrement les candidats ont semblé génés par la notation $v = e_1 + e_2 + e_3$. Certains y ont vu la matrice identité, d'autres un vecteur de coordonnées (e_1, e_2, e_3) et ils ont alors été bien incapables de calculer ${}^tMv$. Deuxièmement les candidats qui ont obtenu que 1 est valeur propre de ${}^tM$ ont ensuite mal justifié le fait qu'il l'est aussi de M. Conformément au programme, les candidats devaient utiliser le fait que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.
2. Même si certains candidats n'ont pas reconnu en A une matrice triangulaire, cette question a été mieux abordée : les étudiants sérieux ont pu ici montrer leur bonne connaissance de certains théorèmes du programme (conditions d'inversibilité et de diagonalisabilité). Toutefois on lit régulièrement des affirmations telles que : « A n'a que deux valeurs propres distinctes donc elle n'est pas diagonalisable ».
3. (a) Rares sont les candidats qui ont fait le lien entre la recherche du coefficient a_k et la question 1 (a). Aussi, ils ont été très nombreux à n'avoir obtenu de (a_k) qu'une relation de récurrence. Parmi eux, certains ont judicieusement constaté qu'ils obtenaient explicitement a_k en C 3.(d).

(b) La convergence de (A^k) a souvent été très mal justifiée (on attendait que les limites soit prouvées à l'aide de suites géométriques et par croissance comparée). Les candidats qui n'avaient pour définir a_k qu'une relation de récurrence ont souvent admis la convergence pour en déduire la limite.

Partie C

Cette partie était certainement la mieux traitée : les candidats ont pu appliquer les méthodes vues en cours concernant la réduction des endomorphismes.

1. De nombreux candidats ont donné une base de $\operatorname{Ker} u$ puis ont justifié que les vecteurs de cette base sont orthogonaux à v ce qui ne prouve qu'une inclusion. Mais une large majorité des candidats obtient $\dim \operatorname{Ker} u$ et le théorème du rang est bien connu.
2. Cette question a en général été bien traitée même si les candidats n'ont parfois pas profité du fait qu'ils avaient déjà une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. (a) Cette question a en général été bien traitée (même si ici encore les candidats n'ont parfois pas utilisé la base précédente).
   (b) Cette question a parfois été mal comprise : on ne demandait pas uniquement la démonstration classique de $B^k = PD^kP^{-1}$ mais une expression explicite de B^k utile pour la suite.
   (c) Si le calcul de C^2 n'a posé heureusement aucun problème, les justifications apportées dans l'application de la formule du binôme de Newton furent souvent insuffisantes. Par ailleurs, certains candidats ont rédigé une démonstration par récurrence parfaitement correcte.
   (d) Le lien avec la question B 3.(a) a rarement été établi.

Partie D

Cette dernière partie fut la moins bien comprise du problème.

1. On attendait des candidats qu'ils reconnaissent la somme proposée et qu'ils en donnent la valeur (correcte !) mais aucune démonstration n'était exigée.
2. (a) Cette question a en général été bien traitée.
   (b) Si certains candidats ont justifié de manière plus ou moins intuitive le résultat, ils ont été très rares à faire correctement le lien avec la matrice A et la probabilité w_k.
   (c) Cette question a été très rarement traitée.

PROBLÈME 2

Ce problème était relatif à l'étude de quelques lois de probabilités liées aux lois exponentielles (minimum, maximum, somme). Il a été en général un peu moins bien compris que le précédent.

Partie A

On étudiait dans cette première partie le minimum de p variables aléatoires suivant des lois exponentielles mutuellement indépendantes et de même paramètre. L'ensemble a été traité de façon assez inégale, certaines questions étant beaucoup plus délicates.

1. (a) Cette question très classique a été très mal traitée. Un nombre considérable d'étudiants ont pensé que le calcul d'un tel moment était celui d'une somme infinie. D'autres ont pensé pouvoir utiliser la formule donnant l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes ou ont calculé un moment centré. Enfin parmi ceux qui ont effectué les calculs des intégrales correctes, des difficultés d'autre nature se sont présentées. En effet, l'adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres a été très mal utilisée. Certains candidats ont d'ailleurs préféré travailler sur un segment puis passer à la limite (en le justifiant) ce qui est bien sûr parfaitement correct.
   (b) L'immense majorité des candidats a reconnu une série exponentielle mais il est très surprenant de constater que la somme n'est pas bien connue.

2. (a) Le calcul de $\overline{F}_{X_1}$ a régulièrement été correct sur $\mathbb{R}_+$ mais les candidats ont été nombreux à oublier d'évaluer cette fonction sur $\mathbb{R}_-$.
   (b) Ici encore le calcul de $\overline{F}_{Y_p}$ a régulièrement été traité sur $\mathbb{R}_+$ (souvent en l'absence de justification) mais pas sur $\mathbb{R}_-$.
   (c) L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle ont en général été données sans difficulté.
3. Une immense majorité des candidats n'a pas vu que la donnée de la durée moyenne de l'intervention d'un technicien permettait de calculer le paramètre λ, ils ont donc laissé les probabilités demandées en fonction de λ. Les deux premiers calculs présentent assez peu de difficultés et sont régulièrement traités par contre le dernier est beaucoup plus délicat, il n'a donc été effectué correctement que très rarement.

Partie B

On étudiait dans cette première partie le maximum de 2 variables aléatoires suivant des lois exponentielles mutuellement indépendantes et de même paramètre. Cette partie a été assez mal comprise.

1. (a) Cette question nécessitait de la part des candidats une certaine rigueur. ll était attendu que les candidats déterminent déjà la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_2 puis qu'ils justifient sa continuité puis sa classe $\mathcal{C}^1$ (sur $\mathbb{R}^*$) pour en déduire l'existence d'une densité. Enfin il était préférable de développer l'expression obtenue afin de faciliter les calculs ultérieurs. Peu de candidats sont parvenus à rédiger des réponses complètes.
   (b) Le calcul de $\mathrm{E}(Z_2)$ a été rarement mené par contre ce fut davantage le cas de l'égalité demandée et de son explication.
   (c) Le calcul de $\mathrm{Var}(Z_2)$ a été très rarement mené mais certains candidats qui ont obtenu une variance négative ont judicieusement remarqué qu'ils avaient du faire une erreur de calcul.
2. Le début de cette question a régulièrement été traitée mais les candidats n'ont pas souvent donné un équivalent correct de l'expression obtenue. La suite n'a donc été abordée que très rarement.

Partie C

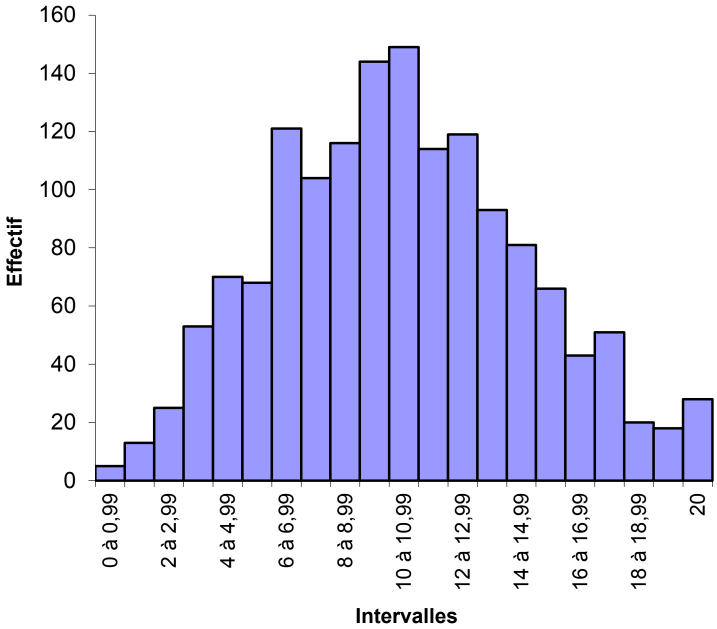
Cette dernière partie consistait à étudier une somme de variables aléatoires obtenues à l'aide de variables aléatoires suivant une loi exponentielle. Si le début a régulièrement été abordé, la fin du sujet, beaucoup plus délicate, ne l'a été que par de très rares candidats.

1. (a) Cette question nécessitait à nouveau une certaine rigueur. Bien souvent les candidats n'ont pas justifié la continuité et la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction de répartition de $aX_2 + b$.
   (b) Cette question qui a visiblement semblé incongrue à certains candidats demandait tout de même une justification rigoureuse (soit en citant un théorème du cours soit en démontrant le résultat).
2. (a) Cette question a été régulièrement bien traitée.
   (b) De nombreux candidats ont obtenu un couple solution sans que l'on comprenne véritablement leur démarche et sans que l'unicité ne soit justifiée.
3. (a) La nature des séries de terme général $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k^2}$ est en général connue des étudiants.
   (b) La dernière question du sujet a naturellement été très rarement abordée. Il s'agissait de justifier correctement l'indépendance de T_p et $\frac{X_{p+1}}{p+1}$ puis de mener à bien un calcul d'intégrale.

Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	5	0,33	5	0,33
1 à 1,99	13	0,87	18	1,20
2 à 2,99	25	1,67	43	2,86
3 à 3,99	53	3,53	96	6,40
4 à 4,99	70	4,66	166	11,06
5 à 5,99	68	4,53	234	15,59
6 à 6,99	121	8,06	355	23,65
7 à 7,99	104	6,93	459	30,58
8 à 8,99	116	7,73	575	38,31
9 à 9,99	144	9,59	719	47,90
10 à 10,99	149	9,93	868	57,83
11 à 11,99	114	7,59	982	65,42
12 à 12,99	119	7,93	1101	73,35
13 à 13,99	93	6,20	1194	79,55
14 à 14,99	81	5,40	1275	84,94
15 à 15,99	66	4,40	1341	89,34
16 à 16,99	43	2,86	1384	92,21
17 à 17,99	51	3,40	1435	95,60
18 à 18,99	20	1,33	1455	96,94
19 à 19,99	18	1,20	1473	98,13
20	28	1,87	1501	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1501
Minimum : 0,35
Maximum : 20
Moyenne : 10,37
Ecart type : 4,24

MATHEMATIQUES ECRIT



Intervalles	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0 à 0,99	10	0,67	10	0,67
1 à 1,99	28	1,86	38	2,53
2 à 2,99	38	2,53	76	5,06
3 à 3,99	45	3,00	121	8,06
4 à 4,99	66	4,39	187	12,45
5 à 5,99	99	6,59	286	19,04
6 à 6,99	104	6,92	390	25,97
7 à 7,99	125	8,32	515	34,29
8 à 8,99	108	7,19	623	41,48
9 à 9,99	134	8,92	757	50,40
10 à 10,99	119	7,92	876	58,32
11 à 11,99	121	8,06	997	66,38
12 à 12,99	122	8,12	1119	74,50
13 à 13,99	102	6,79	1221	81,29
14 à 14,99	69	4,59	1290	85,89
15 à 15,99	51	3,40	1341	89,28
16 à 16,99	45	3,00	1386	92,28
17 à 17,99	34	2,26	1420	94,54
18 à 18,99	13	0,87	1433	95,41
19 à 19,99	22	1,46	1455	96,87
20	47	3,13	1502	100,00

Nombre de candidats dans la matière : 1502
Minimum : 0,28
Maximum : 20
Moyenne : 10,14
Ecart type : 4,47

PHYSIQUE ECRIT