Exemple de sujet 1

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \qquad \text{et} \qquad S_n = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{I_k}{2^{k+1}}.$$

   (a) Donner la valeur de I_0 et démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

   (On pourra utiliser une intégration par parties).

   (b) Ecrire une fonction informatique ayant pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de I_n. Ecrire ensuite une deuxième fonction d'argument n renvoyant la valeur de S_n. Calculer ainsi $S(10)$. Que remarque-t-on ?

2. (a) Soit t un réel positif, et n un entier naturel. Etablir :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}$$

   (b) En déduire que :

$$\pi - S_n = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

   (c) Montrer enfin que :

$$0 \leqslant \pi - S_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3. Ecrire une fonction informatique `approx` ayant comme argument un réel *eps* strictement positif et renvoyant une valeur de π à *eps* près.

Exemple de sujet 2

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 jusqu'à N, sachant que pour chaque i, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

— le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;

— si le jeton obtenu au k-ème tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ème tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;

— les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k-ème tirage.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Écrire une fonction (en Python), prenant en argument un entier N, qui simule l'expérience ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.
3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$:

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j).$$

4. Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(P(X_k = i))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est décroissante.
5. (a) Montrer que la suite $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_{k+1} = 1) \geqslant P(X_k = 1) + \frac{1}{N}(1 - P(X_k = 1)).$$

   (c) En déduire que $\lim_{k \to \infty} P(X_k = 1) = 1$.
   Que peut-on dire de l'événement « Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 » ?

6. On fixe i un entier naturel compris entre 2 et N.
   Déduire de la question précédente que, pour tout $i \in [\![2, N]\!]$, $\lim_{k \to \infty} P(X_k = i) = 0$.
7. On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois. On peut démontrer et nous l'admettons que :

$$E(Y_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

   Réaliser une simulation qui confirme graphiquement cette expression de $E(Y_N)$ en fonction de N.

Exemple de sujet 3

On étudie la descendance d'une fleur dont le nombre de descendants suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$, avec $p \in]0,1[$ fixé. Les descendantes de la première fleur ont des descendantes de façon mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur.
Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la probabilité de l'événement E_n : « Il n'y a plus de descendance à la génération n ».

1. Étude de la suite (u_n).
   (a) Calculer u_1.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_{n+1} = ((1-p) + pu_n)^2$$
   (c) Étudier la suite (u_n). Quelle est sa limite ? Commenter les résultats obtenus.
2. Simulation informatique.
   (a) Rédiger une fonction informatique qui simule la descendance de la fleur sur une génération (c'est-à-dire qu'elle renvoie des nombres entiers 0, 1, 2, dont la répartition suivra la loi $\mathcal{B}(2,p)$), puis sur n générations.
   (b) Rédiger une deuxième fonction qui renvoie la fréquence d'extinction de la descendance après 20 générations sur un grand nombre de simulations.

Exemple de sujet 4

Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :
• chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année ;
• la probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de souris femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.
Notons pour tout entier naturel n, après n années, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :
$$\begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25 j_n \end{cases}$$
On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$. Expliciter alors une matrice L telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait : $S_{n+1} = LS_n$.
2. En déduire une expression de S_n en fonction de L, S_0 et n.
3. (a) Déterminer (U_1, U_2) une base de vecteurs propres de L.
   (b) Soient λ et μ les coordonnées de S_0 dans la base (U_1, U_2). Exprimer S_n en fonction de λ, μ et n.
4. On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.
   (a) Écrire un programme informatique qui permette de retourner les listes $[j_0, j_1, ..., j_{10}]$ et $[a_0, a_1, ..., a_{10}]$.
   (b) Exprimer j_n et a_n en fonction de n.
   (c) On désigne par t_n le nombre total de souris femelles après n années.
   Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$.
   (d) Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
   (e) Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre la population ?

Exemple de sujet 5

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors $X+Y$ est une variable à densité, dont la densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)\ dy.$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $x^2 - y > 0$.

   Indication : on pourra commencer par étudier le nombre de valeurs propres de la matrice A dans le cas où elle est diagonalisable.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

   On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y.

   (a) Ecrire une fonction informatique qui calcule une valeur approchée de $P(X^2 - Y > 0)$.

   On rappelle qu'en Python la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

   (b) Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.

   (c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Rapport des oraux relatifs aux exemples publiés

Exemple 1

Cet exercice d'analyse assez classique permettait d'évaluer les connaissances des candidats sur les techniques d'intégration sur un segment.

Pour la question 1(a), les candidats ont souvent procédé avec succès à une intégration par parties comme le suggérait l'énoncé, mais peu sont finalement parvenus ensuite à établir la relation proposée. L'examinateur a donc souvent guidé le candidat vers la bonne démarche pour finir le calcul.

La question 1(b) a été globalement bien traitée. Les candidats, plutôt à l'aise avec le calcul de suites récurrentes en Python, ont su en général écrire les deux fonctions et conjecturer la limite de la suite (S_n).

La question 2(a) a curieusement été peu abordée, de nombreux candidats étant restés perplexes devant la somme que l'on demandait de calculer. L'examinateur guidait alors les candidats pour reconnaître dans le membre de gauche une somme usuelle. Certains candidats ont démontré la formule par récurrence, ce qui est bien entendu valable mais leur a fait perdre du temps.

La question 2(b) a montré une méconnaissance de la fonction Arctan par les candidats. Autant les candidats reconnaissaient souvent la dérivée de la fonction, autant ils ont eu du mal à calculer la valeur de Arctan(1).

La question 2(c) a souvent été bien traitée, même si les questions précédentes n'avaient pas été abordées. Les élèves ont bien fait le lien avec la question précédente, puis encadré l'intégrale avec succès.

Il est dommage que peu de candidats aient compris ce qu'on attendait d'eux dans la question 3. Peu de candidats ont eu le temps d'attaquer la question pendant la préparation (ou alors ne voyaient pas comment), cela a pu donner lieu à établir une discussion avec l'examinateur à l'oral sur la démarche à procéder.

Exemple 2

Cet exercice de probabilités discrètes permettait d'une part d'évaluer la possibilité pour le candidat interrogé de modéliser et simuler une expérience aléatoire, et d'autre part de tester ses connaissances sur les propriétés des variables aléatoires discrètes.

Les questions 1 et 2 ont été traitées par tous les candidats, souvent avec succès.

Dans la question 3, on attendait des candidats qu'ils utilisent la formule des probabilités totales, en indiquant un système complet d'événements adapté. Les examinateurs ont donc systématiquement interrogé les candidats sur cette formule du cours, notamment lorsque le candidat avait établi la relation sans utiliser d'événements dans son raisonnement.

Dans les questions 4 et 5(a), les candidats ont parfois mal compris quels étaient les indices qui variaient dans les suites en question.

La question 5(c) a toujours été abordée par les examinateurs, même lorsque les candidats n'avaient pas abordé la question 5(b), pour voir si les candidats pouvaient effectuer le passage à la limite dans l'inégalité.

La question 6 a été souvent peu abordée par manque de temps.

La question 7 a été mal comprise par les candidats. On attendait simplement ici un tracé expérimental de la suite $(E(Y_N))$ pour certaines valeurs de N à l'aide de la fonction établie à la question 2. Cela a donc dans la plupart du temps été le prétexte pour demander au candidat comment il pouvait simuler l'espérance d'une variable aléatoire. De nombreux candidats confondent moyenne empirique et espérance, et savent peu établir leur lien avec la loi faible des grands nombres.

Exemple 3

Cet exercice d'analyse et probabilités peut sembler court dans son énoncé, mais la résolution de ses questions pouvait être longue, ce qui a occupé les candidats pendant tout le temps de la la préparation. De manière générale, la longueur des sujets peut être assez variable (certains sujets sont courts comme celui présenté, d'autres sont longs mais ne dépassent pas une page).

La question 1(b) a été souvent abordée par les candidats, mais peu sont parvenus au résultat proposé. Les candidats cherchaient en priorité à établir directement l'égalité proposée ce qui est difficile, alors qu'il aurait été plus sage d'établir une relation développée entre u_{n+1} et u_n (par la formule des probabilités totales par exemple), puis de remarquer que la formule obtenue se factorisait par identité remarquable.

La question 1(c) a été souvent abordée même si la question précédente n'avait pas abouti. Cependant, même si les candidats connaissent globalement bien le schéma d'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1}f(u_n)$, peu sont parvenus seuls à établir l'étude complète, et se lancent souvent dans des calculs compliqués (comme l'étude complète de f ou de $x \mapsto f(x) - x$. Ici, la monotonie pouvait être établir directement en comparant les événements E_n et E_{n+1}. La limite dépendait ici de la valeur de p selon si $p \leqslant 1/2$ ou $p > 1/2$.

La question 2 a permis de vérifier que les candidats savaient simuler des variables de loi binomiale, exercice classique qui devrait être à la portée de tout candidat admissible.

Exemple 4

Cet exercice mêlait algèbre linéaire et probabilités discrètes au moyen d'une chaîne de Markov à deux états.

La question 1 a été bien traitée par les candidats, la modélisation s'effectuant facilement, et l'écriture matricielle du système a bien été comprise.

Dans la question 2, de nombreux candidats ont indiqué que « la suite (S_n) est géométrique, donc $S_n = S_0L^n$ », ce qui est mal dit (uniquement une suite de réels peut être a priori qualifiée de "géométrique") et incorrect (le produit matriciel proposé n'ayant pas de sens).

La question 3(a) a été bien traitée, les candidats semblent à l'aise avec le calcul des valeurs propres et vecteurs propres (dans le cas d'une matrice de taille 2), mais cela leur prend du temps. Lors de l'interrogation, les candidats ayant fait les calculs pendant la préparation ne sont pas tenus de recopier tous leurs calculs au tableau. Ils peuvent synthétiser leurs résultats, expliquer la démarche générale, puis donner leurs résultats. L'examinateur reviendra sur la résolution uniquement s'il le juge nécessaire.

Dans la question 3(b), peu d'étudiants interrogés avaient compris comment définir λ et μ.

La simulation informatique permettait de voir si les candidats savaient manipuler deux suites récurrentes imbriquées, ce qui dans l'ensemble a été globalement satisfaisant.

Par manque de temps, peu de candidats avaient eu le temps de traiter les questions 4(b) et 4(c), l'examinateur s'est alors efforcé dans ce cas de voir si le candidat avait une idée de démarche à mettre en place pour déterminer le terme général des suites (par exemple reconnaître une suite récurrente linéaire double et expliquer brièvement la méthode pour déterminer la forme explicite).

Exemple 5

Cet exercice mêlant algèbre linéaire et probabilités continues était plutôt long, et peu de candidats ont réussi à le traiter dans son intégralité. Cependant, il faut bien noter qu'un candidat ayant traité uniquement partiellement un sujet peut très bien sortir de son oral avec une note excellente. Il vaut mieux se concentrer sur un nombre raisonnable de questions, puis éventuellement l'examinateur encouragera la discussion vis à vis des questions non préparées en amont.

Dans la question 1, la plupart des candidats interrogés a étudié la matrice $A - \lambda I_2$ pour déterminer les valeurs propres de la matrice. Il aurait parfois fallu traiter plusieurs cas selon si y était nul ou non, ce que les candidats ne pensent pas spontanément à faire. Remarquons également que peu de candidats comprennent la subtilité du « si et seulement si » et sans s'en rendre compte, ne démontrent finalement qu'une seule implication dans leur raisonnement.

Dans la question 2(a), les candidats ont bien compris comment approcher une probabilité, en simulant une fréquence d'apparition d'un événement. Quelques candidats maladroits ont cru simulé la variable $X^2 - Y$ en écrivant une expression du type `random*random - random`, ce qui ne fait pas apparaître X^2.

Les candidats ont passé énormément de temps (et l'essentiel de leur préparation pour certains) sur la question 2(b). Cette question classique sur les variables aléatoires à densité doit être mieux préparée. Soulignons qu'il peut être avantageux pour les candidats d'examiner l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire avant de s'attaquer à sa fonction de répartition, cela permet d'éliminer des cas simples. Les candidats ont été parfois surpris par l'étude de $-Y$, et n'ont pas reconnu une loi uniforme sur $[-1, 0]$.

La question 2(c) a été peu traitée en général, car les candidats avaient passé trop de temps sur la question précédente. L'étude correcte d'un produit de convolution est soumise à un raisonnement qui doit être rigoureux, concernant les fonctions mises en jeu et les réductions des intervalles d'intégration.

Même si la question 2(c) n'avait pas été traitée, les examinateurs ont encouragé les candidats à répondre à la dernière question, utilisant la densité de la fonction h. Là encore, les calculs d'intégrales ont été peu réussis, les candidats ayant souvent eu du mal à déterminer une primitive de $z \mapsto \sqrt{z}$, nombreux confondant les notions de dérivée et de primitive.