# Un sujet pour l'épreuve B (modélisation et informatique)

## Présentation

Le texte proposé ci-après est conçu pour l'épreuve B, portant plus particulièrement sur la modélisation et l'informatique ; ce texte représente la moitié d'un sujet (l'épreuve B dure 3 heures 30).
Les compétences mobilisées dans ce problème sont essentiellement les suivantes :

- ▷ Engager une recherche, définir une stratégie : questions 4b, 5b, 5c, 7d.
- ▷ Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique : questions 1, 2, 6a, 6b, 9b.
- ▷ Représenter, changer de registre : question 4c, 4d, 9a.
- ▷ Traduire un algorithme dans un langage de programmation : questions 3b, 4c, 10a.
- ▷ Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes : questions 3a, 4a, 5a, 8, 10b.
- ▷ Identifier un problème sous différents aspects : questions 4d, 9c.
- ▷ Critiquer ou valider un modèle ou un résultat : questions 1, 2, 6a.
- ▷ Communiquer à l'écrit et à l'oral : compétence présente, par nature, dans l'ensemble des questions.

On rappelle que l'emploi d'une calculatrice est autorisé dans cette épreuve.

## Énoncé

### Introduction

Le phénomène appelé mouvement brownien a été observé pour la première fois en 1828 par le botaniste écossais Robert Brown au cours d'une étude portant sur le processus de fertilisation d'une nouvelle espèce de fleur. Brown observa au microscope que les grains de pollen de cette fleur, en suspension dans de l'eau au repos, étaient animés d'un mouvement désordonné rapide (qui fut appelé mouvement brownien, ou diffusion).
Brown attribua ce mouvement aux chocs de la particule de pollen avec les molécules de l'eau au niveau microscopique. En effet, bien que l'eau soit au repos, les molécules d'eau sont agitées de façon très désordonnée à leur échelle. Ses observations suggéraient plusieurs propriétés de ce mouvement :

**(H1)** Il est incessant et très irrégulier.

**(H2)** Le mouvement passé d'une particule n'a aucune influence sur le mouvement présent et futur.

### Modélisation

*Notation :* un vecteur aléatoire $Z$ de $\mathbf{R}^2$ est un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires réelles.

On se propose de modéliser la trajectoire **M** du mouvement brownien de la façon suivante. On suppose qu'à l'instant initial la particule de pollen est à la position $M_0$ dans le plan muni de son repère $\mathbf{R}^2$. Elle subit un choc par une molécule d'eau à chaque temps entier $n \in \mathbf{N}$ (dans une échelle de temps très petite), de sorte que la position $M_{n+1}$ de la particule de pollen au temps $n+1$ est donnée par

$$M_{n+1} = M_n + Z_n, \ \forall n \geqslant 0, \tag{0.0.1}$$

où $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbf{R}^2$ indépendants et identiquement distribués. Entre les instant $n$ et $n+1$, la particule se déplace de $M_n$ à $M_{n+1}$ en ligne droite. Nous regardons la trajectoire globale de la particule de pollen jusqu'à un temps 10 000.

**1)** En quoi le modèle est-il fidèle aux observations de Brown ? On justifiera sa réponse au regard des propriétés (**H1**) et (**H2**).

**2)** Quelles sont les limites du modèle ?

### Tirage de variables aléatoires

*Convention :* on note brièvement $U \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$ pour indiquer que la variable aléatoire $U$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.
Notons $Z$ un vecteur aléatoire qui a la même loi que chacun des vecteurs $Z_n$. L'objectif est de simuler à l'aide d'un outil informatique des trajectoires **M** pour plusieurs lois pour cette variable. On observera comment le comportement qualitatif global de **M** dépend du choix de la loi de $Z$.
On supposera que le seul aléa que notre logiciel nous permet de générer consiste en des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ (notée $\mathscr{U}\big([0,1]\big)$).
Une première étape consiste à construire différentes lois possibles pour $Z$ à l'aide de variables indépendantes de loi $\mathscr{U}\big([0,1]\big)$.

#### Exemple 1

**3) a)** Comment obtenir un vecteur aléatoire $A \in \mathbf{R}^2$ dont la loi serait donnée par

$$\mathbb{P}\big(A=(0,1)\big)=\mathbb{P}\big(A=(0,-1)\big)=\mathbb{P}\big(A=(1,0)\big)=\mathbb{P}\big(A=(-1,0)\big)=\frac{1}{4}$$

à partir d'une variable aléatoire $C \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$ ?
**b)** On souhaite réaliser un algorithme permettant de simuler le vecteur aléatoire $A$ introduit ci-dessus. À cet effet, on propose ci-dessous une ébauche de fonction écrite en langage Python, où la fonction `random()` réalise (ou simule) une variable de loi $\mathscr{U}\big([0,1]\big)$. On considère que des appels successifs de `random()` engendrent des réalisations indépendantes. La fonction `FlipFlop()`, telle quelle, ne répond pas au but fixé ; la modifier pour qu'elle donne le résultat attendu.

```
def FlipFlop():
  if random()<0.5:
    return [-1,0]
  else:
    return [1,0]
```

**c)** Dessiner les différents cas possibles pour le premier et le second pas de la trajectoire de la particule de pollen lorsque les vecteurs $Z_n$ ont même loi que $A$. Les points atteints sont-ils tous équiprobables ?

#### Exemple 2

**4) a)** Soit $U \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$. Quelle est la loi suivie par $S = 2U-1$ ?
**b)** Soient $V, W$ des variables aléatoires indépendantes, telles que $V \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$ et

$$\mathbb{P}(W=1)=\mathbb{P}(W=-1)=\frac{1}{2}.$$

Montrer que $V \times W$ suit la même loi que la variable $S$ de la question précédente.
**c)** On considère un vecteur $Z$ de $\mathbf{R}^2$ donné à l'issu de l'algorithme suivant (transcrit en langage Python).

```
def HasardS():
  return 2.0*random()-1.0

def VecteurZ():
  if random()<0.5:
    return [HasardS(),0.0]
  else:
    return [0.0,HasardS()]
```

Montrer que les valeurs prises par $Z$ (à l'issue de l'exécution de la fonction `VecteurZ()`) suivent la même loi qu'un vecteur aléatoire $B$ ayant la loi de l'**Exemple 1** multiplié par une variable scalaire aléatoire $W$ de loi $\mathscr{U}\big([0,1]\big)$, indépendante de ce vecteur.
**d)** Décrire en termes simples l'évolution de la trajectoire de la particule de pollen lorsque les vecteurs aléatoires $Z_n$ ont tous la même loi que $A$ (premier exemple) ou tous la même loi que $B$ (second exemple). Expliquer ce qui distingue ces deux simulations.

**Exemple 3**

On souhaite construire un vecteur aléatoire $C$ comme dans l'**Exemple 2**, mais où la variable $R$ de l'algorithme est remplacée par une variable admettant la densité sur $\mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{1}{a(1+x^2)},$$

où $a$ est une constante.

**5) a)** Quelle est la valeur de la constante $a$ qui définit $f$ ?
**b)** Soit $V \rightsquigarrow \mathscr{U}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Donner une densité de $V$, puis démontrer que la variable $R = \tan V$ possède $f$ comme densité.
**c)** Décrire une méthode pour construire le vecteur aléatoire $C$ à partir de deux variables $U_1, U_2 \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$ indépendantes. On ne demande pas l'écriture d'un algorithme.

**Modèles isotropes**

On souhaite maintenant générer des vecteurs aléatoires $Z$ construits de la façon suivante. On va d'abord choisir un vecteur de $\mathbf{R}^2$ qui donnera la direction et le sens du mouvement de la particule de pollen à l'issue du choc, puis on va choisir la longueur parcourue dans cette direction avant le prochain choc.
On écrira donc $Z = (R\cos V, R\sin V)$, et on supposera que

- **(P1)** $R$ est une variable aléatoire positive,
- **(P2)** $V$ suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$,
- **(P3)** les variables $R$ et $V$ sont indépendantes.

**6) a)** Pourquoi impose-t-on les propriétés [**(P2)**] et [**(P3)**] dans ce modèle ?
**b)** On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur $Z = (X, Y)$ est définie par

$$\|Z\| = \sqrt{X^2+Y^2}.$$

Après calcul de $\|Z\|$, déterminer par quelles variables et vecteurs aléatoires la longueur du mouvement et le sens du choc peuvent être modélisés.

**Exemple 4**

On souhaite générer un vecteur $R$ ayant pour densité la fonction $f_R$ définie par

$$f_R(\rho) = \rho\exp\Big(-\frac{\rho^2}{2}\Big) \text{ pour tout } \rho \geqslant 0$$

et $f_R(\rho) = 0$ pour $\rho < 0$.

**7) a)** Vérifier que $f_R$ est bien une densité.
**b)** Calculer la fonction de répartition $F_R$ de la variable aléatoire $R$. En déduire la loi de la variable aléatoire $R^2$.
**c)** Étant donné $U_2 \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$, montrer que la variable aléatoire $E = -2\ln U_2$ possède une densité et déterminer sa loi.
**d)** En déduire une méthode pour construire un vecteur aléatoire $D = (R\cos V, R\sin V)$ à partir de deux variables $U_1, U_2 \rightsquigarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$ indépendantes. On ne demande pas l'écriture d'un algorithme.

**Exemple 5**

On prend le même modèle que dans l'**Exemple 4**

$$Z = (R\cos V, R\sin V) \text{ satisfaisant } \textbf{(P1), (P2)} \text{ et } \textbf{(P3)},$$

mais la loi de $R$ est cette fois prise uniforme sur $[0,1]$. On note $E$ le vecteur aléatoire $(R\cos V, R\sin V)$.

**Exemple 6**

On prend toujours le même modèle que dans l'**Exemple 4**

$$Z = (R\cos V, R\sin V) \text{ satisfaisant } \textbf{(P1), (P2)} \text{ et } \textbf{(P3)},$$

et on suppose que $R$ a une loi admettant la densité $g(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbf{R}_+$ et 0 sur $\mathbf{R}_-$. On note $F$ le vecteur aléatoire $(R\cos V, R\sin V)$.

## Distance du mouvement moyenne entre deux chocs

**8)** Pour chacun les vecteurs aléatoires des **Exemples 1 à 6** : la variable aléatoire $\|Z\|$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

## Analyse des trajectoires et conclusions

On a tracé dans les **Figures 1 à 6** à la fin de ce document des trajectoires de la particule de pollen jusqu'au temps 10 000. Pour chacune de ces figures, on a choisi la loi de $Z$ d'après l'un des **Exemples 1 à 6** ; les graduations sont indiquées sur le côté.

**9) a)** À l'aide d'un raisonnement méthodique, déterminer la loi qui correspond à chacune des figures.
**b)** Quels sont les modèles les plus appropriés pour décrire le mouvement de la particule de pollen observé par Brown ?
**c)** Décrire des propriétés des variables $Z$ des différents exemples qui se manifestent fortement sur les trajectoires vues globalement.

## Temps de sortie

On suppose, dans ce paragraphe, qu'on dispose à présent d'une fonction *générateur* qui donne en sortie un vecteur $Z$ de $\mathbf{R}^2$ ayant pour loi la loi commune des $Z_n$ (voir introduction).
On suppose que la particule, à l'instant initial, située est à l'origine, c'est à dire $M_0 = (0,0)$.

**10) a)** Écrire un algorithme qui donne en sortie le premier instant $T$ pour lequel la particule sort pour la première fois du cercle centré en l'origine et de rayon $R$, c'est à dire

$$T = \inf\left\{ n \geqslant 1 \;\middle|\; \|M_n\| \geqslant R \right\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. L'algorithme sera transcrit en un programme en langage Python.
**b)** On suppose que la variable aléatoire $T$ admet une espérance. Énoncer la loi des grands nombres et décrire une méthode pour obtenir une estimation de l'espérance de $T$. Pour cela, on introduira une suite de trajectoires indépendantes.

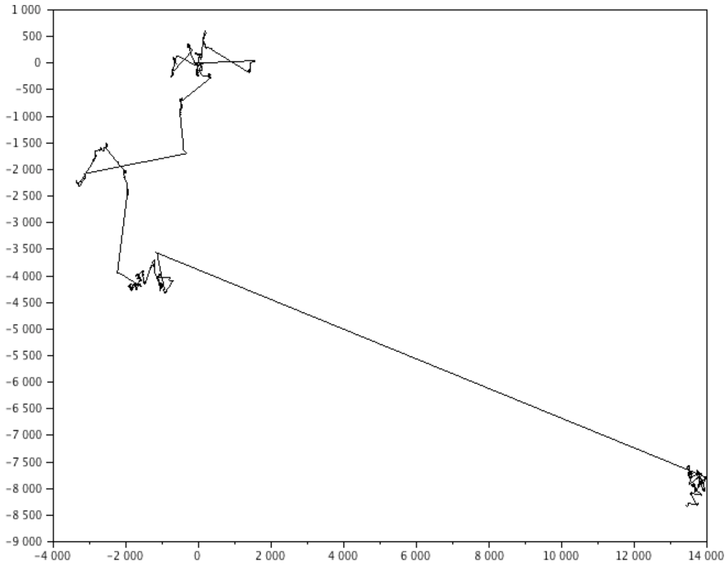

Figure 1

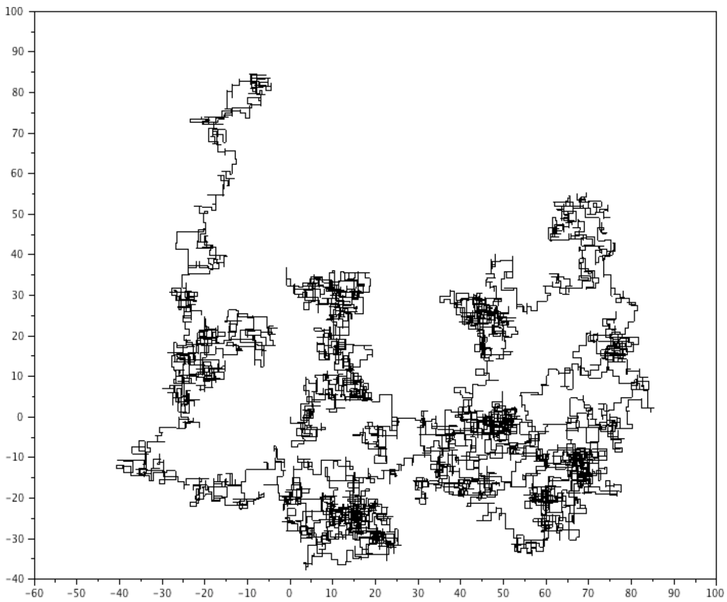

Figure 2

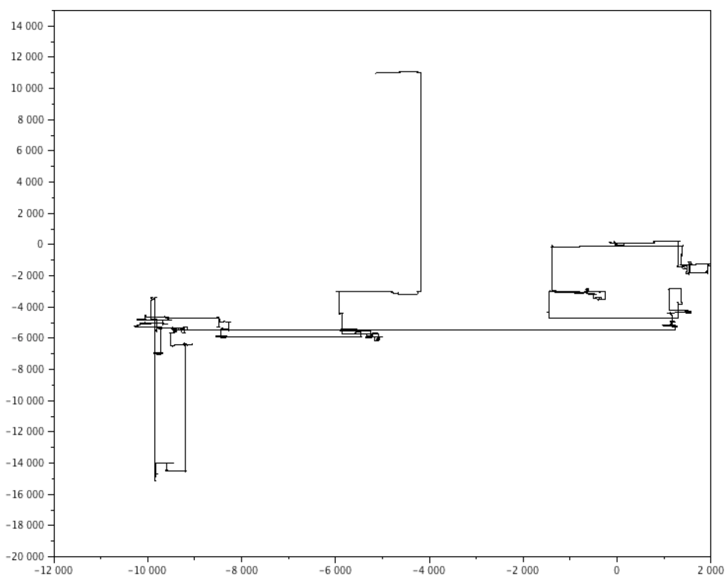

Figure 3

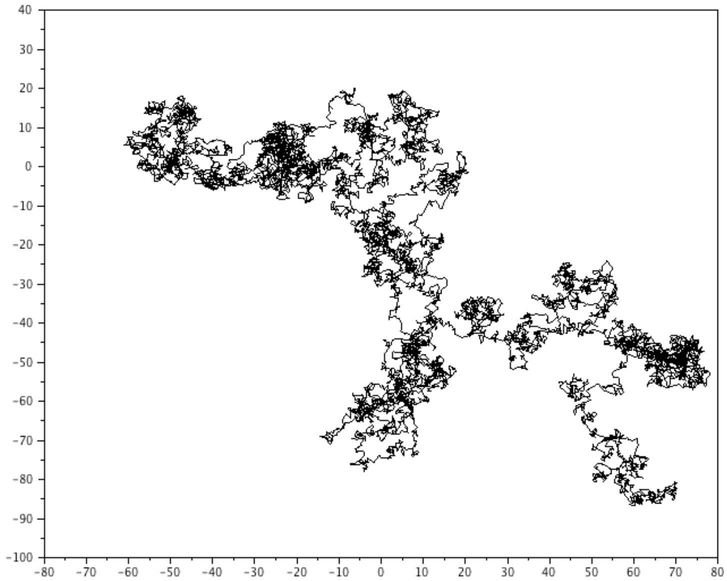


Figure 4

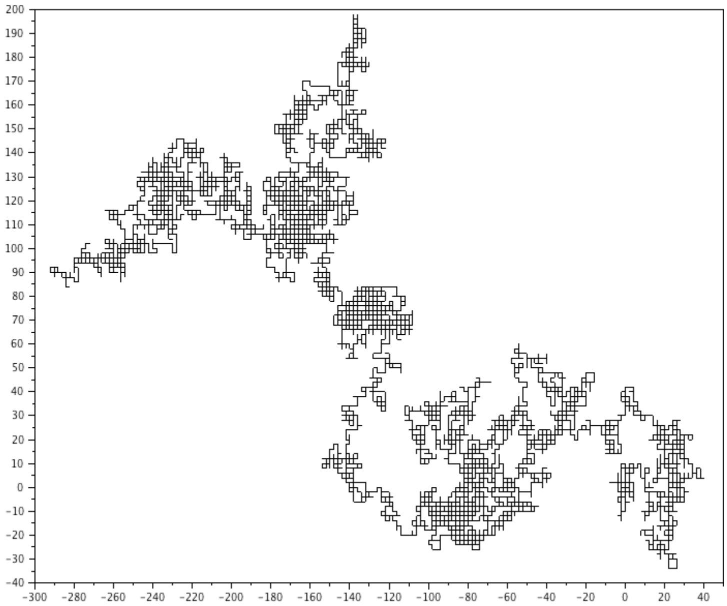


Figure 5

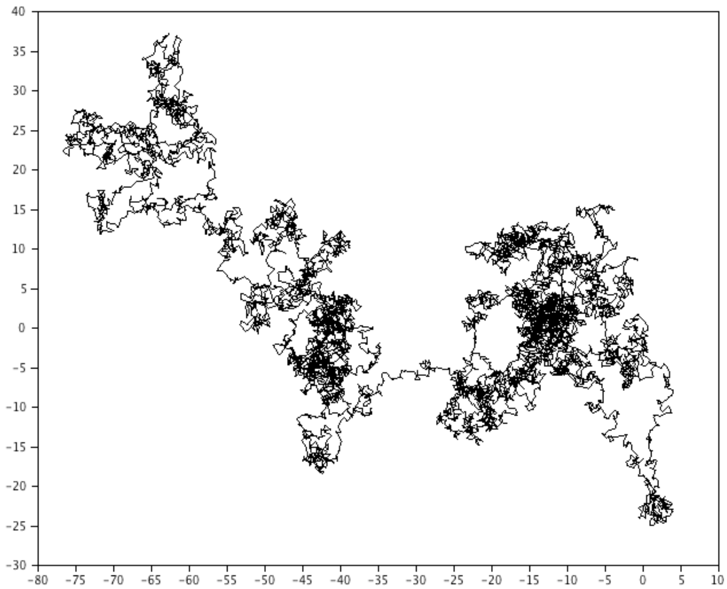


Figure 6