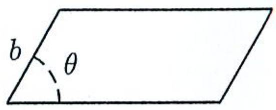
Banque «Agro-Véto»
A - 0415

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet. L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On considère un réseau dont la maille élémentaire est un parallélogramme, structure présente notamment en cristallographie. Cette maille élémentaire a alors pour aire $a.b.\sin\theta$.



On suppose que l'angle θ est la réalisation d'une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0,\pi/2]$. L'étude de la variable aléatoire $\sin\Theta$ nécessite certaines connaissances sur une fonction intermédiaire notée A qui seront établies dans la partie I. La densité obtenue dans la partie II dont nous étudierons quelques propriétés apparait en pratique dans d'autres contextes (que nous n'étudierons pas dans ce sujet) sous une forme proche dans la loi dite de "l'arcsinus". Les deux dernières parties étudient des fonctions polynomiales définies à l'aide de la fonction A.

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ dans $[-1,1]$. On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc}[-\pi/2,\pi/2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x.\end{array}$
2. Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.
3. Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4. Soit x appartenant à $[-1,1]$, montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
5. Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.
6. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$.

   (b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par
$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X = \sin\Theta$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. En déduire que X est une variable aléatoire à densité dont une densité est

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. (a) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.
   (b) Quelle est la signification de ce résultat par rapport au contexte proposé dans le préambule du problème ?
4. Montrer que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur.
   On pourra utiliser, avec justification, le changement de variable $x = \sin t$.
5. On s'intéresse, dans cette question au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X.
   Pour cela, on considère un entier naturel n non nul ainsi qu'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
   On introduit la « moyenne empirique » $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
   (a) Que valent l'espérance et la variance de M_n ?
   (b) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (c) En déduire, en fonction de n, de l'espérance et de la variance de X, un intervalle $[a_n, b_n]$ tel que

$$P(M_n \in [a_n, b_n]) \geq 95\%.$$

6. On s'intéresse, dans cette question, à des événements « rares » associés à la variable aléatoire X.
   (a) À l'aide de la question 6 de la partie I, prouver l'existence de constantes A et B telles que :

$$P\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{A}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{B}{n^3}.$$

   (b) Pour tout entier n non nul, on pose $p_n = P\left(X \geq 1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
      i. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
      ii. Prouver que, pour tout entier n non nul, on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$.
      iii. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre deux de la fonction cos.
      iv. En déduire une constante c telle que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

Partie III : Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsinus

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2n\, A(x))$.

1. Calculer f_0, f_1 et f_2.
   On vérifiera en particulier que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à 2, il existe un polynôme P_k tel que : $\forall x \in [-1, 1], \quad f_k(x) = P_k(x)$.
2. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, on a :
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1 - 2x^2) f_{n+1}(x).$$
3. Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f_n(x) = P_n(x).$$
4. Soit n un entier.
   (a) Calculer f_n' et f_n''.
   (b) En déduire que f_n est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle
   $$(x^2 - 1)y'' + xy' - 4n^2 y = 0.$$

Partie IV : Étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit n un entier non nul.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $(X^2-1)P'' + XP' \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

   On définit alors l'endomorphisme
   $$\phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}_{2n+1}[X], \; P \mapsto (X^2-1)P'' + XP'$$
   dont on va étudier les éléments propres.
   Pour toute valeur propre λ de ϕ, on notera E_λ l'espace propre de ϕ associé à la valeur propre λ.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
   (a) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera M.
   (b) Prouver que M est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres de M.

   On revient au cas général où n est un entier non nul quelconque.

3. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
4. Montrer que ϕ est diagonalisable et donner son spectre.
5. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $E_{(2k)^2}$ en fonction de P_k.

FIN DE L'ÉPREUVE