

# Martingales sur les variétés de valeur terminale donnée

Jonathan Harter

I.M.B. & E.D.M.I. de Bordeaux – Financement : allocation blanche M.E.S.R.

05 Juin 2018 — Soutenance de thèse



# Sommaire

- 1 Introduction
  - Martingales sur les variétés
  - Problème
  - Le cas  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{S}^1$
  - Quelques références
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

# Cadre

**Soit :**

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,

# Cadre

**Soit :**

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,
- une variété différentiable  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $d$ ,

# Cadre

**Soit :**

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,
- une variété différentiable  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $d$ ,
- une connexion linéaire  $\nabla$  sur  $\mathcal{M}$ , symboles  $\Gamma_{j,k}^i$ .

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Martingales sur les variétés
  - Problème
  - Le cas  $\mathbf{R}^d$  et  $S^1$
  - Quelques références
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

# Martingales euclidiennes, $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$

**Martingale**  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  t.q. pour tout  $t$ ,  $X_t \in L^1(\Omega)$ ,  $X$  adapté et pour tous  $t \geq s$ ,

$$\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{p.s.}$$

# Martingales euclidiennes, $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$

**Martingale**  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  t.q. pour tout  $t$ ,  $X_t \in L^1(\Omega)$ ,  $X$  adapté et pour tous  $t \geq s$ ,

$$\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{p.s.}$$

**Martingale locale** : il existe une suite  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de temps d'arrêt telle que  $T_n \nearrow \infty$  et  $X^{\downarrow T_n} = (X_{\inf(t, T_n)})_{t \in [0, T]}$  martingale.



# Martingales euclidiennes, $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$

**Martingale**  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  t.q. pour tout  $t$ ,  $X_t \in L^1(\Omega)$ ,  $X$  adapté et pour tous  $t \geq s$ ,

$$\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{p.s.}$$

**Martingale locale** : il existe une suite  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de temps d'arrêt telle que  $T_n \nearrow \infty$  et  $X^{\downarrow T_n} = (X_{\inf(t, T_n)})_{t \in [0, T]}$  martingale.

**Semimartingale** : = valeur initiale +  $M$  +  $A$  où  $C \in \mathbf{R}^d$ ,  $X$  martingale locale,  $A$  à variations finies.

# Martingales euclidiennes, $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$

**Martingale**  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  t.q. pour tout  $t$ ,  $X_t \in L^1(\Omega)$ ,  $X$  adapté et pour tous  $t \geq s$ ,

$$\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{p.s.}$$

**Martingale locale** : il existe une suite  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de temps d'arrêt telle que  $T_n \nearrow \infty$  et  $X \upharpoonright^{T_n} = (X_{\inf(t, T_n)})_{t \in [0, T]}$  martingale.

**Semimartingale** : = valeur initiale +  $M$  +  $A$  où  $C \in \mathbf{R}^d$ ,  $X$  martingale locale,  $A$  à variations finies.

$M + A \rightsquigarrow$  pas de sens sur une variété

# Formule d'Itô

**Solution :**  $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}),$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess } f(dX, dX).$$

$\Rightarrow$  caractérisation des semimartingales

# Formule d'Itô

**Solution :**  $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}),$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess } f(dX, dX).$$

$\Rightarrow$  caractérisation des semimartingales

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess } f(dX, dX) &= \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s \\ &= \int_0^t df(X_s) \cdot d(M_s + \cancel{A_s}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  caractérisation des martingales

# Formule d'Itô

**Solution :**  $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}),$

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess } f(dX, dX) = \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s$$

$\Rightarrow$  caractérisation des semimartingales

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla df(dX, dX) &= \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s \\ &= \int_0^t df(X_s) \cdot d(M_s + A_s) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  caractérisation des martingales

$$\text{Hess } f \rightsquigarrow \nabla df$$

$$D_{i,j}f \rightsquigarrow D_{i,j}f - \Gamma_{i,j}^k(X_s) D_k f$$

# Formule d'Itô

**Solution :**  $\forall f \in \mathcal{C}^2(\boxed{\mathcal{M}}, \mathbf{R}),$

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess } f(dX, dX) = \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s$$

$\Rightarrow$  caractérisation des semimartingales

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \boxed{\nabla df}(dX, dX) &= \int_0^t df(X_s) \cdot dX_s \\ &= \int_0^t df(X_s) \cdot d(M_s + \cancel{A_s}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  caractérisation des martingales

$$\int_0^t \nabla df(dX, dX) = \int_0^t \left( D_{i,j} f(X_s) - \Gamma_{i,j}^k(X_s) D_k f(X_s) \right) d \langle X^i, X^j \rangle_s.$$

# Définition

$X$  semimartingale sur  $\mathcal{M}$

$\nabla$ -martingale

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla df(dX, dX)$$

martingale locale réelle pour tout  $f$ .

# Définition

$X$  semimartingale sur  $\mathcal{M}$

$\nabla$ -martingale

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla df(dX, dX)$$

martingale locale réelle pour tout  $f$ .

$\nabla$ -martingale dans une carte

sur  $(U, (x^i)_{i=1}^d)$  si

$$X^i - X_0^i + \frac{1}{2} \int_0^\cdot \Gamma_{k,l}^i(X_s) d \langle X^k, X^l \rangle_s$$

martingale locale réelle.



# Convexité

## Image par une fonction convexe

si  $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$  est  $\nabla$ -convexe, alors  $\Psi(X)$  est une sous-martingale locale.

$\Rightarrow$  (si vraie sous-martingale)

$$X_t \leq \mathbf{E}(X_1 | \mathcal{F}_t).$$

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Martingales sur les variétés
  - Problème
  - Le cas  $\mathbf{R}^d$  et  $S^1$
  - Quelques références
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

# Cadre avec valeur terminale

**Soit :**

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,
- une variété différentiable  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $d$ ,
- une connexion linéaire  $\nabla$  sur  $\mathcal{M}$ ,

# Cadre avec valeur terminale

## Soit :

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,
- une variété différentiable  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $d$ ,
- une connexion linéaire  $\nabla$  sur  $\mathcal{M}$ ,
- **une variable aléatoire  $\xi \in L^2(\Omega)$  dans  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ .**

# Le problème

## PROBLÈME 1 : Existence

Peut-on trouver une  $(\mathcal{F}, \nabla)$ -martingale  $X$  dans  $\mathcal{M}$  telle que  $X_T = \xi$  ?

# Le problème

## PROBLÈME 1 : Existence

Peut-on trouver une  $(\mathcal{F}, \nabla)$ -martingale  $X$  dans  $\mathcal{M}$  telle que  $X_T = \xi$  ?

## PROBLÈME 2 : Unicité

Est-elle unique ?

# Quelques applications

- 1 recherche d'applications harmoniques entre variétés, problème de Dirichlet,
- 2 calculs de barycentres de mesures,
- 3 résultats pour les EDSRs.

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Martingales sur les variétés
  - Problème
  - Le cas  $\mathbf{R}^d$  et  $S^1$
  - Quelques références
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives



Cas  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$ ,  $\nabla = \nabla^{plat}$

**Unicité?**

Cas  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d, \nabla = \nabla^{plat}$

**Unicité?**

→ **NON** en toute généralité

Cas  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$ ,  $\nabla = \nabla^{plat}$

### Unicité ?

→ **NON** en toute généralité

→ **OUI** si l'on restreint aux (vraies) martingales :  $X_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

### Existence ?

Cas  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^d$ ,  $\nabla = \nabla^{plat}$

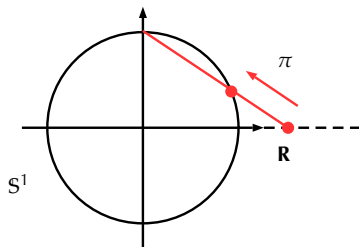
### Unicité?

→ **NON** en toute généralité

→ **OUI** si l'on restreint aux (vraies) martingales :  $X_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

### Existence?

→ **OUI** :  $X_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

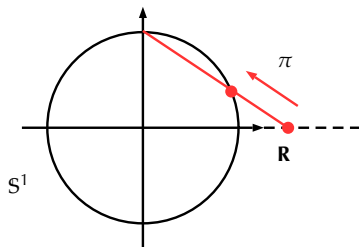
Cas  $\mathcal{M} = \mathbf{S}^1$ ,  $\nabla = \nabla^{Levi-Civ}$ 

**Unicité?**

$$\pi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{S}^1.$$

$\nabla$ -martingale  $M$

$\iff \pi^{-1}(M)$  martingale  
locale réelle.

Cas  $\mathcal{M} = \mathbf{S}^1$ ,  $\nabla = \nabla^{Levi-Civ}$ 

$$\pi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{S}^1.$$

$\nabla$ -martingale  $M$

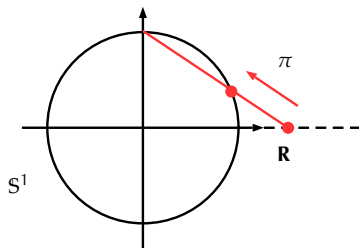
$\iff \pi^{-1}(M)$  martingale  
locale réelle.

### Unicité?

$\longrightarrow$  **NON** en toute généralité.

Il existe une infinité de  $\eta$  tels que  $\pi(\eta) = \xi$ .

$$X_t = \pi [\mathbf{E}(\eta | \mathcal{F}_t)]$$

Cas  $\mathcal{M} = S^1$ ,  $\nabla = \nabla^{Levi-Civ}$ 

$$\pi : \mathbf{R} \longrightarrow S^1.$$

$\nabla$ -martingale  $M$

$\iff \pi^{-1}(M)$  martingale  
locale réelle.

### Unicité?

Classe d'unicité (Picard, 2006) : l'ensemble des martingales telles que

$$\mathbf{E}(\exp(\langle X, X \rangle_1)) < \infty.$$

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Martingales sur les variétés
  - Problème
  - Le cas  $\mathbf{R}^d$  et  $S^1$
  - Quelques références
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives



- 1 Arnaudon (1997) : approximation de  $\mathcal{M}, \nabla$  par des variétés et connexions analytiques + déformation analytique de la variable terminale,

- 1 Arnaudon (1997) : approximation de  $\mathcal{M}, \nabla$  par des variétés et connexions analytiques + déformation analytique de la variable terminale,
- 2 Picard (1991) : avec de l'analyse stochastique,

- 1 Arnaudon (1997) : approximation de  $\mathcal{M}, \nabla$  par des variétés et connexions analytiques + déformation analytique de la variable terminale,
- 2 Picard (1991) : avec de l'analyse stochastique,
- 3 Darling (1995), Blache (2004/2006) : EDSRs.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe**
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

# Unicité, point clef

$X, X'$  deux  $\nabla$ -martingales,  $X_T = X'_T = \xi$ .

# Unicité, point clef

$X, X'$  deux  $\nabla$ -martingales,  $X_T = X'_T = \xi$ .

$\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^+$ , fonction  $\nabla \otimes \nabla$ -convexe.

# Unicité, point clef

$X, X'$  deux  $\nabla$ -martingales,  $X_T = X'_T = \xi$ .

$\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^+$ , fonction  $\nabla \otimes \nabla$ -convexe.

$\Psi(X, X')$  est une sous martingale locale réelle.

Conséquence si de plus bornée

$$0 \leq \Psi(X_t, X'_t) \leq \mathbf{E}(\Psi(X_T, X'_T) | \mathcal{F}_t) = ?0.$$

# Unicité, point clef

$X, X'$  deux  $\nabla$ -martingales,  $X_T = X'_T = \xi$ .

$\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^+$ , fonction  $\nabla \otimes \nabla$ -convexe.

$\Psi(X, X')$  est une sous martingale locale réelle.

Conséquence si de plus bornée

$$0 \leq \Psi(X_t, X'_t) \leq \mathbf{E}(\Psi(X_T, X'_T) | \mathcal{F}_t) = ?0.$$

$\Rightarrow X'$  est une version de  $X$  si



# Fonction séparante

## Séparante

$\Psi$  est  $\nabla \otimes \nabla$ -convexe et

$$\Psi^{-1}(\{0\}) = \{(x, x), x \in \mathcal{M}\}.$$

# Fonction séparante

## Séparante

$\Psi$  est  $\nabla \otimes \nabla$ -convexe et

$$\Psi^{-1}(\{0\}) = \{(x, x), x \in \mathcal{M}\}.$$

## Existence locale (Emery)

En tout point d'une sous-variété totalement géodésique de  $\mathcal{M}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  possédant une séparante.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 + |x + y|^2 \right) |x - y|^2,$$

$\varepsilon$  assez petit.

# Réciproque ?

## Construction d'une séparante (Kendall)

$$\Phi(x, y) = \inf_{\substack{X, X' \text{ martingale dans } \mathcal{M} \\ X_0 = x, X'_0 = y}} \mathbf{P}(X_1 \neq X'_1).$$

# Vocabulaire

$\mathcal{M}$  est à géométrie convexe

il existe une séparante  $\Psi$  sur  $\mathcal{M}$ .

# Vocabulaire

$\mathcal{M}$  est à géométrie convexe

il existe une séparante  $\Psi$  sur  $\mathcal{M}$ .

$p \in \mathbf{N}^*$ .

$\mathcal{M}$  est à géométrie  $p$ -convexe

il existe une séparante  $\Psi$  sur  $\mathcal{M}$  telle que  $\Psi \sim \rho^p$ .

$$c\rho^p(x, y) \leq \Psi(x, y) \leq C\rho^p(x, y), \quad c, C \in \mathbf{R}^+.$$

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
  - Rappels : transports & variations
  - Présentation de l'algorithme simplifié
  - Présentation de l'algorithme complet
  - Équation différentielle sur l'espace des martingales
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

# Structures géométriques

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,
- une variété différentiable  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $d$ ,
- **une métrique riemannienne  $g \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ ,**
- **une connexion linéaire  $\nabla$  sur  $\mathcal{M}$  qui est la connexion de Levi-Civita associée à  $g$ ,**
- une variable aléatoire  $\xi \in L^2(\Omega)$  dans  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ .

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique**
  - Rappels : transports & variations
  - Présentation de l'algorithme simplifié
  - Présentation de l'algorithme complet
  - Équation différentielle sur l'espace des martingales
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives



# Transport parallèle $\parallel_{0,\cdot}(X)$

**Localement**  $X$  à valeurs dans  $(U, (x^1, \dots, x^d))$

$$\begin{aligned} \circ d \parallel_{0,t}(X)^i &= -\Gamma_{j,k}^i(X) \parallel_{0,t}(X)^j \circ dX^k, & \parallel_{0,0}(X) &= \text{Id}_{T_{X_0}\mathcal{M}} \\ \Rightarrow \partial_t \parallel_{0,t}(\gamma)^i &= -\Gamma_{j,k}^i(\gamma(t)) \parallel_{0,t}(\gamma)^j \partial_t \gamma^k, & \parallel_{0,0}(\gamma) &= \text{Id}_{T_{\gamma(0)}\mathcal{M}} \end{aligned}$$

# Transport parallèle $\parallel_{0,\cdot}(X)$

**Localement**  $X$  à valeurs dans  $(U, (x^1, \dots, x^d))$

$$\begin{aligned} \circ d \parallel_{0,t}(X)^i &= -\Gamma_{j,k}^i(X) \parallel_{0,t}(X)^j \circ dX^k, & \parallel_{0,0}(X) &= \text{Id}_{T_{X_0}\mathcal{M}} \\ \Rightarrow \partial_t \parallel_{0,t}(\gamma)^i &= -\Gamma_{j,k}^i(\gamma(t)) \parallel_{0,t}(\gamma)^j \partial_t \gamma^k, & \parallel_{0,0}(\gamma) &= \text{Id}_{T_{\gamma(0)}\mathcal{M}} \end{aligned}$$

## Définition globale

$X$  semimartingale.

$$\parallel_{0,0}(X) = \text{Id}_{T_{X_0}\mathcal{M}}, \quad \circ d(\parallel_{0,\cdot}(X)) = h_{\parallel_{0,\cdot}(X)}(\circ dX).$$

$$\parallel_{0,t}(X) \in \mathcal{L}(T_{X_0}\mathcal{M}, T_{X_t}\mathcal{M}).$$

# Dérivée covariante stochastique

## Propriété importante

Si  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita,  $\|_{0,t}(X)$  est une isométrie.

# Dérivée covariante stochastique

## Propriété importante

Si  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita,  $\parallel_{0,t}(X)$  est une isométrie.

## Opérateur $\mathbf{D}$

$\pi J = X, J$  à valeurs dans  $T\mathcal{M}$ .

$$\mathbf{D}J_t = \parallel_{0,t}(X) d \left( \parallel_{0,t}(X)^{-1} J_t \right).$$

$$\mathbf{D} \parallel_{0,\cdot}(X) = 0.$$

# Transport géodésique $\Theta_{0,\cdot}(X)$

## Définition

$X$  martingale.

$$\mathbf{D}\Theta_{0,\cdot}(X) = -\frac{1}{2}R(\Theta_{0,\cdot}(X), dX) dX, \quad \Theta_{0,0}(X) = Id.$$

# Transport géodésique $\Theta_{0,\cdot}(X)$

## Définition

$X$  martingale.

$$\mathbf{D}\Theta_{0,\cdot}(X) = -\frac{1}{2}R(\Theta_{0,\cdot}(X), dX) dX, \quad \Theta_{0,0}(X) = Id.$$

Itô :

$$\begin{aligned} d|\Theta_{0,\cdot}(X)|^2 &= d\left|\|_{0,t}(X) \|_{0,t}^{-1}(X)\Theta_{0,\cdot}(X)\right|^2 \\ &= 2\langle \Theta_{0,\cdot}(X), \mathbf{D}\Theta_{0,\cdot}(X) \rangle \\ &= - \underbrace{\langle \Theta_{0,\cdot}(X), R(\Theta_{0,\cdot}(X), dX) dX \rangle}_{\text{encadrement avec courbure sectionnelle } \kappa(X,Y)=\langle R(X,Y)Y,X \rangle_g} \end{aligned}$$

# Transport géodésique $\Theta_{0,\cdot}(X)$

## Définition

$X$  martingale.

$$\mathbf{D}\Theta_{0,\cdot}(X) = -\frac{1}{2}R(\Theta_{0,\cdot}(X), dX) dX, \quad \Theta_{0,0}(X) = Id.$$

- $\Theta$  augmente les distances en courbure négative
- $\Theta$  diminue les distances en courbure positive

# Estimation sur le transport géodésique

Arnaudon, Li, Thalmaier

$$(i) \quad \kappa^-(\mathcal{M}) < \infty \Rightarrow \quad |\Theta_{0,t}(X)| \leq \exp \left( \int_0^t \frac{(\kappa^-)_{X_u}}{2} \langle dX, dX \rangle_g \right),$$

$$(ii) \quad \kappa^+(\mathcal{M}) < \infty \Rightarrow \quad |\Theta_{0,t}^{-1}(X)| \leq \exp \left( \int_0^t \frac{(\kappa^+)_{X_u}}{2} \langle dX, dX \rangle_g \right).$$



# Estimation sur le transport géodésique

Arnaudon, Li, Thalmaier

$$(i) \quad \kappa^-(\mathcal{M}) < \infty \implies |\Theta_{0,t}(X)| \leq \exp \left( \int_0^t \frac{(\kappa^-)_{X_u}}{2} \langle dX, dX \rangle_g \right),$$

$$(ii) \quad \kappa^+(\mathcal{M}) < \infty \implies |\Theta_{0,t}^{-1}(X)| \leq \exp \left( \int_0^t \frac{(\kappa^+)_{X_u}}{2} \langle dX, dX \rangle_g \right).$$

Conséquence

$$\int_0^1 \langle dX, dX \rangle_g \in L^\infty \implies \Theta_{0,\cdot}(X) \in \mathcal{S}^\infty$$

$$\|\Theta_{0,\cdot}(X)\|_{\mathcal{S}^\infty} \leq \exp \left( \frac{\kappa^-(\mathcal{M})}{2} \left\| \int_0^1 \langle dX, dX \rangle_g \right\|_{L^\infty} \right).$$

# Opérateur $\mathbf{D}^{\text{def}}$

## Opérateur $\mathbf{D}^{\text{def}}$

$\pi J = X, J$  à valeurs dans  $\mathcal{TM}$ .

$$\mathbf{D}^{\text{def}} J_t = \Theta_{0,t}(X) d \left( \Theta_{0,t}(X)^{-1} J_t \right) = \mathbf{D} J_t - \frac{1}{2} R(\Theta_{0,\cdot}(X), dX) dX.$$

# Variations de géodésiques

Soit  $(\gamma^a)_{a \in (-1,1)}$  famille régulière de  $\nabla$  géodésiques.

Champ de Jacobi  $\mathcal{J} := \partial_a \gamma^a$  le long de  $\gamma^a$  :

- ODE d'ordre deux :  $\nabla^2 \mathcal{J} + R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}^a) \dot{\gamma}^a = 0,$
- $\nabla^c$ -géodésique dans  $T\mathcal{M},$

où  $\nabla^c$  est le relevé complet de  $\nabla$ , connexion sur  $T\mathcal{M}.$

# Variations de martingales

Soit  $(X^a)_{a \in (-1,1)}$  famille régulière  $\mathcal{C}^1$  de  $\nabla$ -martingales.

Champ de Jacobi stochastique  $\mathcal{J}^a = \partial_a X(a)$  le long de  $X(a)$  :

- EDS :  $\mathbf{D}^{\text{def}} \partial_a X(a) = \nabla_a d^\nabla X(a)$ ,
- $\nabla^c$ -martingale dans  $T\mathcal{M}$ ,

où  $\nabla^c$  est le relevé complet de  $\nabla$ , connexion sur  $T\mathcal{M}$ .

Propriété stochastique (P.A. Meyer et Arnaudon)

$\Theta_{0,\cdot} (X(a))^{-1} \partial_a X(a)$  martingale locale dans  $T_{X_0(a)}\mathcal{M}$ .

# Variations de martingales de valeur terminale donnée

## $\tilde{\zeta}(a)$

$\Theta_{0,\cdot}(X(a))^{-1} \partial_a X(a)$  martingale locale dans  $T_{X_0(a)} \mathcal{M}$

**ET**

condition d'intégrabilité

# Variations de martingales de valeur terminale donnée

## $\tilde{\zeta}(a)$

$\Theta_{0,\cdot}(X(a))^{-1} \partial_a X(a)$  martingale locale dans  $T_{X_0(a)} \mathcal{M}$

**ET**

condition d'intégrabilité

devient :

EDO vérifiée par la dérivée

$$\partial_a X_t(a) = \mathbf{E} \left( \Theta_{t,1}^{-1}(X(a)) \partial_a X_1(a) \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

# Variations de martingales de valeur terminale donnée

## $\tilde{\zeta}(a)$

$\Theta_{0,\cdot}(X(a))^{-1} \partial_a X(a)$  martingale locale dans  $T_{X_0(a)} \mathcal{M}$

**ET**

condition d'intégrabilité

devient :

EDO vérifiée par la dérivée

$$\partial_a X_t(a) = \mathbf{E} \left( \Theta_{t,1}^{-1}(X(a)) \overrightarrow{X_1(a) \tilde{\zeta}} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique**
  - Rappels : transports & variations
  - Présentation de l'algorithme simplifié
  - Présentation de l'algorithme complet
  - Équation différentielle sur l'espace des martingales
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives



# L'étape initiale en image



$\mathcal{B}$  boule géod.

# L'étape initiale en image



$\mathcal{B}$  boule géod.

$$X(\overset{\bullet}{0}) = \zeta^0$$

# L'étape initiale en image



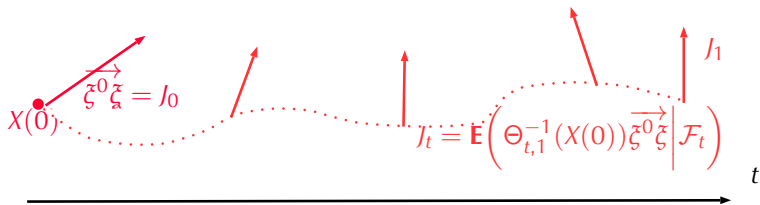
$\mathcal{B}$  boule géod.

$$X(0) = \xi^{\theta} = J_0$$

# L'étape initiale en image

•  $\xi$

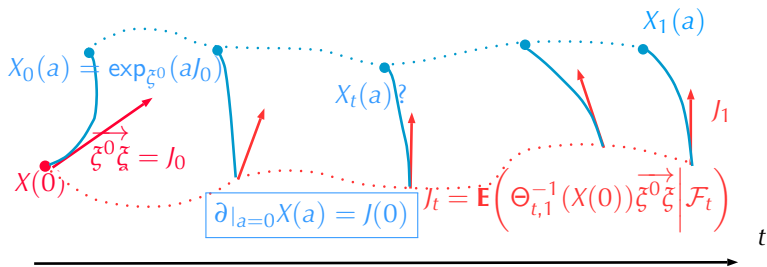
$\mathcal{B}$  boule géod.



# L'étape initiale en image

•  $\xi$

$\mathcal{B}$  boule géod.

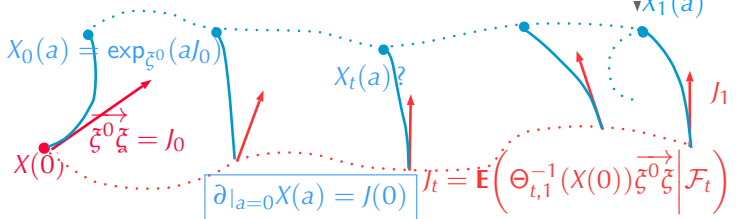
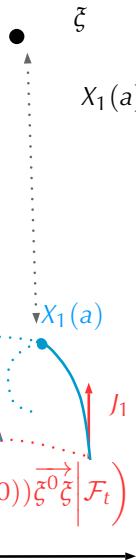


# L'étape initiale en image

$\mathcal{B}$  boule géod.

$\xi$

$X_1(a)$  plus proche





# Traduction mathématique

## Initialisation

$\xi^0 \in \mathcal{B}$  déterministe

$$X(0) = \xi^0$$

$$J_t(0) = \mathbf{E} \left( \overrightarrow{\xi^0 \xi} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

## On veut

- 1 trouver  $(X(a))_a$  famille  $\mathcal{C}^1$  de  $\nabla$ -martingales, telle que :

$$\partial|_{a=0} X(a) = J(0)$$

- 2 pour  $a$  petit :

$$\Delta(a) := \mathbf{E} \left( \rho^2 [X_1(a), \xi] \right) < \mathbf{E} \left( \rho^2 [X_1(0), \xi] \right).$$



# Traduction mathématique

## Premier tir

$$\begin{cases} d^\nabla X(a) = a \parallel_{X(0), X(a)} (dJ(0)), & 0 \leq t \leq \tau(a), \\ X_0(a) = \exp_{X_0(0)} (a/J_0(0)), \\ X_t(a) = X_{\tau(a)}, & \tau(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\parallel_{X(0), X(a)}$  transport parallèle le long de la géod. minimisante

$$\tau(a) = \inf \{t \in [0, 1], \quad X_t(a) \in \partial \mathcal{B}\}.$$

# Traduction mathématique

## Premier tir

$$\begin{cases} d^\nabla X(a) = a \parallel_{X(0), X(a)} (dJ(0)), & 0 \leq t \leq \tau(a), \\ X_0(a) = \exp_{X_0(0)} (a /_0(0)), \\ X_t(a) = X_{\tau(a)}, & \tau(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\parallel_{X(0), X(a)}$  transport parallèle le long de la géod. minimisante

$$\tau(a) = \inf \{t \in [0, 1], \quad X_t(a) \in \partial \mathcal{B}\}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{def}} \partial_a X(a) &= \nabla_a d^\nabla X(a) \\ &= \parallel_{X(0), X(a)} (dJ(0)) + a \left( \nabla_a \parallel_{X(0), X(a)} \right) (dJ(0)) \end{aligned}$$

# Traduction mathématique

## Premier tir

$$\begin{cases} d^\nabla X(a) = a \parallel_{X(0), X(a)} (dJ(0)), & 0 \leq t \leq \tau(a), \\ X_0(a) = \exp_{X_0(0)} (aJ_0(0)), \\ X_t(a) = X_{\tau(a)}, & \tau(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\parallel_{X(0), X(a)}$  transport parallèle le long de la géod. minimisante

$$\tau(a) = \inf \{t \in [0, 1], \quad X_t(a) \in \partial \mathcal{B}\}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{def}} \partial|_{a=0} X(a) &= dJ(0) = \mathbf{D}^{\text{def}} J(0) \\ X_0(0) &= J_0(0) \end{aligned}$$

# Traduction mathématique

## Premier tir

$$\begin{cases} d^\nabla X(a) = a \parallel_{X(0), X(a)} (dJ(0)), & 0 \leq t \leq \tau(a), \\ X_0(a) = \exp_{X_0(0)} (aJ_0(0)), \\ X_t(a) = X_{\tau(a)}, & \tau(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\parallel_{X(0), X(a)}$  transport parallèle le long de la géod. minimisante

$$\tau(a) = \inf \{t \in [0, 1], \quad X_t(a) \in \partial \mathcal{B}\}.$$

## EDO résolu en $a = 0$

$\partial|_{a=0} X(a)$  est une version de  $J(0)$ .

# Pourquoi s'est-on rapproché?

Étude de

$$\Delta(a) = \mathbf{E} \left( \rho^2 [X_1(a), \xi] \right).$$

# Pourquoi s'est-on rapproché ?

Étude de

$$\Delta(a) = \mathbf{E} \left( \rho^2 [X_1(a), \xi] \right).$$

$$\partial_a \Delta(a) = -2 \times \mathbf{E} \left( \left\langle \overrightarrow{X_1(a)\xi}, \partial_a X_1(a) \right\rangle \right).$$

# Pourquoi s'est-on rapproché?

Étude de

$$\Delta(a) = \mathbf{E} \left( \rho^2 [X_1(a), \xi] \right).$$

$$\partial_a \Delta(a) = -2 \times \mathbf{E} \left( \left\langle \overrightarrow{X_1(a)\xi}, \partial_a X_1(a) \right\rangle \right).$$

$$\partial_{|a=0} \Delta(a) = -2 \times \mathbf{E} \left( \langle J_1(0), \partial_a X_1(a) \rangle \right) = -2 \left| \overrightarrow{X_1(0)\xi} \right|^2 = -2\Delta(0).$$

# Pourquoi s'est-on rapproché ?

Étude de

$$\Delta(a) = \mathbf{E} \left( \rho^2 [X_1(a), \xi] \right).$$

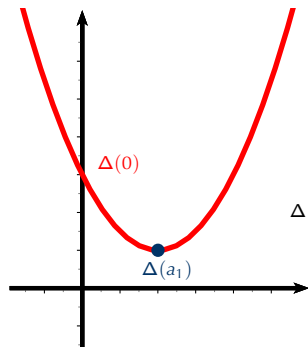
$$\partial_a \Delta(a) = -2 \times \mathbf{E} \left( \left\langle \overrightarrow{X_1(a)}_{\xi}, \partial_a X_1(a) \right\rangle \right).$$

$$\partial_{|a=0} \Delta(a) = -2 \times \mathbf{E} \left( \langle J_1(0), \partial_a X_1(a) \rangle \right) = -2 \left| \overrightarrow{X_1(0)}_{\xi} \right|^2 = -2\Delta(0).$$

$$\Delta(a) \leq (1 - 2a) \Delta(0) + \underbrace{\frac{a^2}{2} \left( \sup_{]0,a[} |\Delta''| \right)}_{\leq \delta \quad ?}.$$



# Pourquoi s'est-on rapproché à la première étape ?



$$\Delta(a) \leq (1 - 2a) \Delta(0) + \frac{a^2}{2} \delta$$

Minimum atteint en

$$a_1^h = \frac{2h \times \mathbf{E}(\rho^2(X_1(0), \xi))}{\delta}$$

# On itère

Si  $(X^h, J^h)$  défini sur  $[0, a_n^h]$ , on pose pour tout  $a \in [a_n^h, a_{n+1}^h)$  :

Tirs suivants

$$\begin{cases} d^\nabla X^h(a) = \mathbb{D}_{X^h(a_n^h), X^h(a)} \left( d^\nabla X^h(a_n^h) + (a - a_n^h) \mathbf{D}^{\text{def}} J^h(a_n^h) \right), & 0 \leq t \leq \tau^h(a), \\ X_0^h(a) = \exp_{X_0^h(a_n^h)} \left( (a - a_n^h) J_0^h(a_n^h) \right), \\ X_t^h(a) = X_{\tau^h(a)}^h, & \tau^h(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

# On itère

Si  $(X^h, J^h)$  défini sur  $[0, a_n^h]$ , on pose pour tout  $a \in [a_n^h, a_{n+1}^h)$  :

Tirs suivants

$$\begin{cases} d^\nabla X^h(a) = \mathbb{E}_{X^h(a_n^h), X^h(a)} \left( d^\nabla X^h(a_n^h) + (a - a_n^h) \mathbf{D}^{\text{def}} J^h(a_n^h) \right), & 0 \leq t \leq \tau^h(a), \\ X_0^h(a) = \exp_{X_0^h(a_n^h)} \left( (a - a_n^h) J_0^h(a_n^h) \right), \\ X_t^h(a) = X_{\tau^h(a)}^h, & \tau^h(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\tau^h(a) = \inf \left\{ t \in [0, 1], \quad X_t^h(a) \in \partial \mathcal{B} \right\}.$$

$$a_0^h = 0, \quad a_{n+1}^h = a_n^h + \frac{2h \times \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^h(a_n^h), \xi \right) \right)}{\delta}.$$

# Intérêt de la phase d'arrêt et définition de $\mathcal{B}$

On suppose que  $\mathcal{B}$  est une *boule géodésique régulière* :

$$R(\mathcal{B}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa^+(\mathcal{B})}q}, \quad q > 1 \quad \text{et} \quad \text{Cut}_O \mathcal{M} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

## Picard

(i)  $\mathcal{B}$  a une  $q^*$ -géométrie convexe

# Intérêt de la phase d'arrêt et définition de $\mathcal{B}$

On suppose que  $\mathcal{B}$  est une *boule géodésique régulière* :

$$R(\mathcal{B}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa^+(\mathcal{B})}q}, \quad q > 1 \quad \text{et} \quad \text{Cut}_O\mathcal{M} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

## Picard

(i)  $\mathcal{B}$  a une  $q^*$ -géométrie convexe ( $\rightsquigarrow$  convergence de l'algo.),

# Intérêt de la phase d'arrêt et définition de $\mathcal{B}$

On suppose que  $\mathcal{B}$  est une *boule géodésique régulière* :

$$R(\mathcal{B}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa^+(\mathcal{B})q}}, \quad q > 1 \quad \text{et} \quad \text{Cut}_O \mathcal{M} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

## Picard

- (i)  $\mathcal{B}$  a une  $q^*$ -géométrie convexe ( $\rightsquigarrow$  convergence de l'algo.),
- (ii)  $\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{\kappa^+(\mathcal{B})q}{2} \right) \int_0^1 \langle dX, dX \rangle_g \right) < \infty$

# Intérêt de la phase d'arrêt et définition de $\mathcal{B}$

On suppose que  $\mathcal{B}$  est une *boule géodésique régulière* :

$$R(\mathcal{B}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa^+(\mathcal{B})q}}, \quad q > 1 \quad \text{et} \quad \text{Cut}_O \mathcal{M} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

## Picard

- (i)  $\mathcal{B}$  a une  $q^*$ -géométrie convexe ( $\rightsquigarrow$  convergence de l'algo.),
- (ii)  $\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{\kappa^+(\mathcal{B})q}{2} \right) \int_0^1 \langle dX, dX \rangle_g \right) < \infty$  ( $\rightsquigarrow$  existence de  $\delta$ ),

# Résultat de convergence 1

## Convergence de l'algorithme simplifié

Si  $\kappa^- \leq \kappa^+$  et  $h$  est assez petit, alors la suite

$$\Delta^h(a_n^h) = \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^h(a_n^h), \xi \right) \right).$$

converge vers zéro.

Conséquence il existe une  $\nabla$ -martingale à valeurs dans  $\mathcal{B}$  de valeur terminale  $\xi$ .



# Résultat de convergence 1

## Convergence de l'algorithme simplifié

Si  $\kappa^- \leq \kappa^+$  et  $h$  est assez petit, alors la suite

$$\Delta^h(a_n^h) = \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^h(a_n^h), \xi \right) \right).$$

converge vers zéro.

Conséquence il existe une  $\nabla$ -martingale à valeurs dans  $\mathcal{B}$  de valeur terminale  $\xi$ .

$$\kappa^- \leq \kappa^+$$

fournit des estimées  $\mathcal{S}^p$  sur  $\Theta_{0,\cdot}(X^h(a))$ .

# Résultat de convergence 1

## Convergence de l'algorithme simplifié

Si  $\kappa^- \leq \kappa^+$  et  $h$  est assez petit, alors la suite

$$\Delta^h(a_n^h) = \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^h(a_n^h), \xi \right) \right).$$

converge vers zéro.

Conséquence il existe une  $\nabla$ -martingale à valeurs dans  $\mathcal{B}$  de valeur terminale  $\xi$ .

### Preuve : étape 2/3

$$\Delta^h(a_{n+1}^h) \leq \left( 1 - 2(a_{n+1}^h - a_n^h) \right) \Delta^h(a_n^h) + \frac{(a_{n+1}^h - a_n^h)^2}{2} \delta.$$

$$a_{n+1}^h - a_n^h = \frac{2h \times \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^h(a_n^h), \xi \right) \right)}{\delta} \quad \text{minimise.}$$

## Étape 3/3 – Convergence des valeurs terminales et convergence globale (stabilité)

Idée :

$\mathcal{B}$  est à  $q^*$ -géométrie convexe, séparante  $\Psi$ .

$X^n = X^h(a_n^h)$  avec  $h$  petit pour que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^h(a_n^h) = 0$ ,

## Étape 3/3 – Convergence des valeurs terminales et convergence globale (stabilité)

Idée :

$\mathcal{B}$  est à  $q^*$ -géométrie convexe, séparante  $\Psi$ .

$X^n = X^h(a_n^h)$  avec  $h$  petit pour que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^h(a_n^h) = 0$ ,

$(X^n, X^{n'})$  est une  $\nabla \otimes \nabla$ -martingale,

# Étape 3/3 – Convergence des valeurs terminales et convergence globale (stabilité)

Idée :

$\mathcal{B}$  est à  $q^*$ -géométrie convexe, séparante  $\Psi$ .

$X^n = X^h(a_n^h)$  avec  $h$  petit pour que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^h(a_n^h) = 0$ ,

$(X^n, X^{n'})$  est une  $\nabla \otimes \nabla$ -martingale,

$\Psi(X_t^n, X_t^{n'})$  sous-martingale positive bornée,

# Étape 3/3 – Convergence des valeurs terminales et convergence globale (stabilité)

Idée :

$\mathcal{B}$  est à  $q^*$ -géométrie convexe, séparante  $\Psi$ .

$X^n = X^h(a_n^h)$  avec  $h$  petit pour que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^h(a_n^h) = 0$ ,

$(X^n, X^{n'})$  est une  $\nabla \otimes \nabla$ -martingale,

$\Psi(X_t^n, X_t^{n'})$  sous-martingale positive bornée,

$$\begin{aligned} \Psi(X_t^n, X_t^{n'}) &\leq \mathbf{E}(\Psi(X_1^n, \xi^\varepsilon) | \mathcal{F}_t) + \mathbf{E}(\Psi(X_1^{n'}, \xi^\varepsilon) | \mathcal{F}_t) \\ &\leq K \left[ \mathbf{E}(\rho^{q^*}(X_1^n, \xi) | \mathcal{F}_t) + \mathbf{E}(\rho^{q^*}(X_1^{n'}, \xi) | \mathcal{F}_t) \right] \\ &\longrightarrow_{n, n' \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

# Étape 1/3 – Comment majorer la dérivée seconde ?

Rappel :

$$\Delta^h(a_{n+1}^h) \leq \left(1 - 2(a_{n+1}^h - a_n^h)\right) \Delta^h(a_n^h) + \frac{(a_{n+1}^h - a_n^h)^2}{2} \delta.$$

# Étape 1/3 – Comment majorer la dérivée seconde ?

Rappel :

$$\Delta^h(a_{n+1}^h) \leq \left(1 - 2(a_{n+1}^h - a_n^h)\right) \Delta^h(a_n^h) + \frac{(a_{n+1}^h - a_n^h)^2}{2} \delta.$$

Condition de convergence

$$\left|(\Delta^h)''(b)\right| \quad \text{uniformément bornée en } b.$$



# Étape 1/3 – Comment majorer la dérivée seconde ?

Rappel :

$$\Delta^h(a_{n+1}^h) \leq \left(1 - 2(a_{n+1}^h - a_n^h)\right) \Delta^h(a_n^h) + \frac{(a_{n+1}^h - a_n^h)^2}{2} \delta.$$

Condition de convergence

$$\left|(\Delta^h)''(b)\right| \quad \text{uniformément bornée en } b.$$

$$\partial_a \Delta^h(a) = -2 \times \mathbf{E} \left( \left\langle \overrightarrow{\chi_1^h(a) \xi}, \partial_a \chi_1^h(a) \right\rangle \right)$$

$$\partial_a^2 \Delta^h(a) = \mathbf{E} \left( \left\langle \nabla_a \overrightarrow{\chi_1^h(a) \xi}, \partial_a \chi_1^h(a) \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\chi_1^h(a) \xi}, \nabla_a \partial_a \chi_1^h(a) \right\rangle \right).$$

# Étape 1/3 – Comment majorer la dérivée seconde ?

$$\partial_a^2 \Delta^h(a) = \mathbf{E} \left( \left\langle \overrightarrow{\nabla_a \chi_1^h(a)} \xi, \partial_a \chi_1^h(a) \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\chi_1^h(a)} \xi, \nabla_a \partial_a \chi_1^h(a) \right\rangle \right).$$

## Reformulation

Majorer uniformément en  $a$  les quantités

$$\left\| \partial_a \chi_1^h(a) \right\|_{S^p}, \quad \left\| \nabla_a \partial_a \chi_1^h(a) \right\|_{S^p}.$$

# Étape 1/3 – EDS vérifiée par $\partial_a X^h(a)$

EDS pour  $\partial_a X^h(a)$

$$\begin{aligned}
 & d\left(\Theta_{0,\cdot}^{-1}(X^h(a))\partial_a X^h(a)\right) \\
 &= \Theta_{0,\cdot}^{-1}(X^h(a)) \left(\nabla_a \parallel_{X^h(a_n^h), X^h(a)}\right) \left(d^\nabla X^h(a_n^h) + (a - a_n^h) \times \mathbf{D}^{\text{def}} J^h(a_n^h)\right) \\
 &+ \Theta_{0,\cdot}^{-1}(X^h(a)) \parallel_{X^h(a_n^h), X^h(a)} \left(\mathbf{D}^{\text{def}} J^h(a_n^h)\right).
 \end{aligned}$$

# Comment estimer $\|\Theta_{0,\cdot}\|_{S^p}$ , $1 < p \leq \infty$

Pour estimer  $\|\Theta_{0,\cdot}\|_{S^p}$

(i) soit  $\kappa^- \leq \kappa^+$  :

$$\|\Theta_{0,\cdot}(X^h(a_n^h))\|_{S^q} < \infty, \quad \|\Theta_{0,\cdot}^{-1}(X^h(a_n^h))\|_{S^q} < \infty.$$

# Comment estimer $\|\Theta_{0,\cdot}\|_{\mathcal{S}^p}$ , $1 < p \leq \infty$

Pour estimer  $\|\Theta_{0,\cdot}\|_{\mathcal{S}^p}$

(i) soit  $\kappa^- \leq \kappa^+$  :

$$\|\Theta_{0,\cdot}(X^h(a_n^h))\|_{\mathcal{S}^q} < \infty, \quad \|\Theta_{0,\cdot}^{-1}(X^h(a_n^h))\|_{\mathcal{S}^q} < \infty.$$

(ii) soit  $\int_0^1 \langle dX, dX \rangle_g \in L^\infty \implies \Theta_{0,\cdot}(X) \in \mathcal{S}^\infty$

$$\|\Theta_{0,\cdot}(X)\|_{\mathcal{S}^\infty} \leq \exp\left(\frac{\kappa^-(\mathcal{M})}{2} \left\| \int_0^1 \langle dX, dX \rangle_g \right\|_{L^\infty}\right).$$

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
  - Rappels : transports & variations
  - Présentation de l'algorithme simplifié
  - Présentation de l'algorithme complet
  - Équation différentielle sur l'espace des martingales
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

# Objectif

## Question

Suppression de

$$\kappa_{\cdot}^{-} \leq \kappa_{\cdot}^{+}$$

# Objectif

## Question

Suppression de

$$\kappa^- \leq \kappa^+$$

## Solution

Approcher  $X^h(a) \sim X^{h,\varepsilon}(a)$  tel que :

$$\left\| \int_0^1 \langle dX^{h,\varepsilon}(a), dX^{h,\varepsilon}(a) \rangle_g \right\|_{L^\infty} < \infty.$$



Soit  $\varepsilon > 0$ . À l'issue de la phase de tir, on considère :

Solution : localisation dans  $\mathcal{H}^\infty$  (étape initiale)

1  $X^{h,\varepsilon}(a_1)$  t.q.

$$\left\| \int_0^1 \left\langle dX^{h,\varepsilon}(a_1^h), dX^{h,\varepsilon}(a_1^h) \right\rangle_g \right\|_{L^\infty} \leq R(\varepsilon),$$

$$\mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^{h,\varepsilon}(a_1^h), X^h(a_1) \right) \right) \leq \varepsilon,$$

2  $J_1^{h,\varepsilon}(a_1) \sim J_1^h(a_1)$ ,

$$\left\| \Theta_{0,\cdot}(X^{h,\varepsilon}(a)) \right\|_{S^\infty} \leq \exp \left( \frac{\kappa^+(\mathcal{M})}{2} R(\varepsilon) \right).$$

# Changements

- 1 Nouvelle quantité à étudier :  $\Delta^{h,\varepsilon}(a_n^h) = \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^{h,\varepsilon}(a_n^h), \xi \right) \right),$
- 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{h,\varepsilon}(a_n^h) = K\varepsilon,$
- 3 faire  $\varepsilon \rightarrow 0.$

# Résultat de convergence 2

## Convergence de l'algorithme général

Si  $h$  est assez petit, alors la suite

$$\Delta^{h,\varepsilon}(a_n^h) = \mathbf{E} \left( \rho^2 \left( X_1^{h,\varepsilon}(a_n^h), \tilde{\xi} \right) \right).$$

converge vers  $K\varepsilon$ .

Par conséquent, il existe une  $\nabla$ -martingale à valeurs dans  $\mathcal{B}$  de valeur terminale  $\tilde{\xi}$ .

# Sommaire

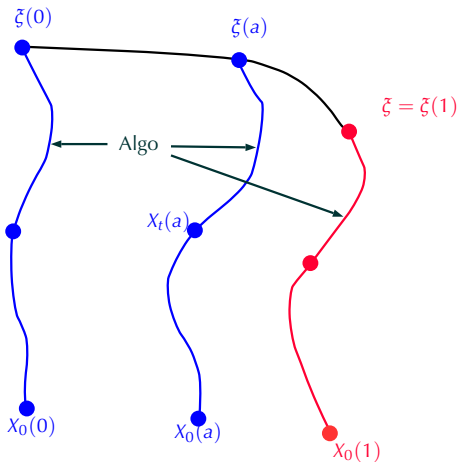
- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
  - Rappels : transports & variations
  - Présentation de l'algorithme simplifié
  - Présentation de l'algorithme complet
  - Équation différentielle sur l'espace des martingales
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives

$$\forall t \in [0, T], \quad \partial_a X_t(a) = \mathbf{E} \left( \Theta_{t,1}^{-1}(X(a)) (\partial_a \zeta(a)) \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

$a \in [0, 1] \mapsto \zeta(a)$  géodésique terminant en  $\zeta$ .

$$\forall t \in [0, T], \quad \partial_a X_t(a) = \mathbf{E} \left( \Theta_{t,1}^{-1}(X(a)) (\partial_a \xi(a)) \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

$a \in [0, 1] \mapsto \xi(a)$  geodésique terminant en  $\xi$ . Répéter l'algo pour  $\xi \leftarrow \xi(a)$  :



$$\forall t \in [0, T], \quad \partial_a X_t(a) = \mathbf{E} \left( \Theta_{t,1}^{-1}(X(a)) (\partial_a \xi(a)) \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

$a \in [0, 1] \mapsto \xi(a)$  géodésique terminant en  $\xi$ . Répéter l'algo pour  $\xi \leftarrow \xi(a)$  :

### Existence d'une solution

Si  $\xi(a) \in \mathcal{B}$  for all  $a \in [0, 1]$  avec :

$$\partial \xi^* := \sup_{a \in [0,1]} \|\partial_a \xi(a)\|_{L^\infty} < \infty.$$

Il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  de  $\nabla$ -martingales solution.

En conséquence, il existe une unique  $\nabla$ -martingale dans  $\mathcal{B}$  de valeur terminale  $\xi$ .

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives

# Un premier exemple

Résolution de

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \quad Y_T = \xi, \quad Y \text{ adapté.}$$

# Un premier exemple

## Résolution de

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \quad Y_T = \xi, \quad Y \text{ adapté.}$$

- $Y_t = \xi$  **NON**,
- candidat le plus proche dans  $L^2$  :  $Y_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

# Un premier exemple

## Résolution de

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \quad Y_T = \xi, \quad Y \text{ adapté.}$$

- $Y_t = \xi$  **NON**,
- candidat le plus proche dans  $L^2$  :  $Y_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

EDSR vérifiée : *via* le théorème de représentation

$$Y_t = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s, \quad Z \text{ adapté de carré intégrable.}$$

# Un premier exemple

## Résolution de

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \quad Y_T = \xi, \quad Y \text{ adapté.}$$

- $Y_t = \xi$  **NON**,
- candidat le plus proche dans  $L^2$  :  $Y_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

EDSR vérifiée : *via* le théorème de représentation

$$Y_t = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s, \quad Z \text{ adapté de carré intégrable.}$$

Version backward :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \quad Z \text{ adapté de carré intégrable.}$$

# Un premier exemple

## Résolution de

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \quad Y_T = \xi, \quad Y \text{ adapté.}$$

- $Y_t = \xi$  **NON**,
- candidat le plus proche dans  $L^2$  :  $Y_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$ .

EDSR vérifiée : *via* le théorème de représentation

$$Y_t = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s, \quad Z \text{ adapté de carré intégrable.}$$

Plus général :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

# Qu'est-ce qu'une EDSR ?

## Forme générale

On appelle EDSR sur  $\mathbf{R}^d$  toute équation différentielle stochastique de la forme

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \times k} \rightarrow \mathbf{R}^d$  fonction aléatoire.

# Qu'est-ce qu'une EDSR ?

## Forme générale

On appelle EDSR sur  $\mathbf{R}^d$  toute équation différentielle stochastique de la forme

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \times k} \rightarrow \mathbf{R}^d$  fonction aléatoire.

## Une solution

$(Y, Z)$ , processus dans  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \times k}$  tel que  $Y$  solution de l'EDSR et

- $Y, Z$  adaptés ( $\Rightarrow$  deux inconnues)

- Intégrabilité —  $\int_0^T (|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2) ds < \infty$



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives

# Résultat historique : cas Lipschitz

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq K (|y - y'| + |z - z'|) \quad (\text{HLip})$$

# Résultat historique : cas Lipschitz

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq K (|y - y'| + |z - z'|) \quad (\text{HLip})$$

Pardoux-Peng (1990)

Sous (HLip), existence et unicité de  $(Y, Z)$  dans  $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$  :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 = \mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s|^2 \right) < \infty \quad \text{et} \quad \|Z \star W\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \mathbf{E} \left( \int_0^T |Z_s|^2 ds \right) < \infty.$$

# Nouveau cadre

- un espace probabilisé filtré à horizon fini  $[0, T]$ ,  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$ , tel que toute martingale admette une version continue,
- $\mathcal{F}$  est la filtration engendrée par un brownien  $W$ ,
- une variété différentiable  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $d$ ,
- une connexion linéaire  $\nabla$  sur  $\mathcal{M}$ ,
- une variable aléatoire  $\xi \in L^2(\Omega)$  dans  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ .

# $\nabla$ -martingales sur une variété de valeur terminale $\xi$

Point de vue développé par Darling (1995).

$Y$  est une  $(\mathcal{F}, \nabla)$ -martingale sur  $\mathcal{M}$  de valeur terminale  $\xi$

$\iff$

pour tout  $i$ , il existe  $Z^i$ , 
$$dY^i + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(Y) d\langle Y^j, Y^k \rangle = Z^i \cdot dW,$$

$$Y_T^i = \xi^i.$$

# $\nabla$ -martingales sur une variété de valeur terminale $\xi$

Point de vue développé par Darling (1995).

$Y$  est une  $(\mathcal{F}, \nabla)$ -martingale sur  $\mathcal{M}$  de valeur terminale  $\xi$

$$\iff$$

pour tout  $i$ , il existe  $Z^i$ , 
$$dY^i + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(Y) d\langle Y^j, Y^k \rangle = Z^i \cdot dW,$$

$$Y_T^i = \xi^i.$$

$$\iff$$

pour tout  $i$ , 
$$dY^i + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(Y) Z^{(j,:)} \cdot Z^{(k,:)} dt = Z^i \cdot dW, \quad Y_T^i = \xi^i.$$

# Réécriture Backward

⇒ Résolution sur  $\mathbf{R}^d$  de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

avec  $f(s, y, z) = \frac{1}{2} \Gamma_{ij}(y) z^{(i,:)} \cdot z^{(j,:)} \in \mathbf{R}^d$ .

# Réécriture Backward

⇒ Résolution sur  $\mathbf{R}^d$  de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

avec  $f(s, y, z) = \frac{1}{2} \Gamma_{ij}(y) z^{(i,:)} \cdot z^{(j,:)} \in \mathbf{R}^d$ .

Problème :

$f$  dépend **quadratiquement** de  $z$

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq K (|y - y'| + |z - z'|) \quad (\text{HLip})$$

NON vérifiée.



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives

# Hypothèses

Une EDSR quadratique sur  $\mathbf{R}^d$  :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

# Hypothèses

Une EDSR quadratique sur  $\mathbf{R}^d$  :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

## Structure quadratique

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z)| \leq (K_y + L_y |z|^2) |y - y'|, \quad (\text{HLip}_y)$$

$$|f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq (K_z + L_z (|z| + |z'|)) |z - z'|. \quad (\text{HQQUAD}_z)$$

# Exemple 1, $d = 1$

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

# Exemple 1, $d = 1$

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Changement  $y = \exp(Y)$ ,  $z = yZ$ ,

$$y_t = \exp(\xi) - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

# Exemple 1, $d = 1$

$$Y_t = \xi + \int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Changement  $y = \exp(Y)$ ,  $z = yZ$ ,

$$y_t = \exp(\xi) - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$y_t = \mathbf{E}(\exp(\xi) | \mathcal{F}_t)$ ,  $z$  donné par le théorème de représentation.

$$Y_t = \ln(y_t), \quad Z_t = \frac{z_t}{y_t},$$

Solution explicite si

$$\exp(\xi) \in L^1.$$

# Exemple 1 : autre écriture

$$Y_t = \zeta + \underbrace{\int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s}_{Girsanov}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

# Exemple 1 : autre écriture

$$Y_t = \xi + \underbrace{\int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s}_{Girsanov}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \mathcal{E} \left( \int_0^T Z_s dW_s \right), \quad Y_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi | \mathcal{F}_t),$$

changement de proba. possible si :



## Exemple 1 : autre écriture

$$Y_t = \xi + \underbrace{\int_t^T \frac{1}{2} |Z_s|^2 ds - \int_t^T Z_s dW_s}_{\text{Girsanov}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \mathcal{E} \left( \int_0^T Z_s dW_s \right), \quad Y_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi | \mathcal{F}_t),$$

changement de proba. possible si :

**Condition BMO (Kazamaki)**

$$\|Z \star W\|_{BMO} < \infty, \quad \text{où} \quad \|Z \star W\|_{BMO}^2 = \text{esssup}_\tau \mathbf{E} \left( \int_\tau^T |Z_s|^2 ds \middle| \mathcal{F}_\tau \right).$$

$$Z \star W = \int_0^\cdot Z_s dW_s.$$

## Exemple 2 : $d = 2$

$$Y_t^1 = \xi^1 - \int_t^T Z_s^1 dW_s,$$

$$Y_t^2 = \xi^2 + \int_t^T \left( |Z_s^1|^2 + \frac{1}{2} |Z_s^2|^2 \right) ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s.$$

Frei & Dos Reis (2011)

Il existe une valeur finale  $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in L^\infty$  telle que l'EDSR n'admette aucune solution.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives

# Cas quadratique scalaire

$d = 1$  avec  $\xi$  bornée.

- 1 Kobylanski (2000),
- 2 Lepeltier et San Martin (2007).

# Cas quadratique scalaire

$d = 1$  avec  $\xi$  bornée.

- 1 Kobylanski (2000),
- 2 Lepeltier et San Martin (2007).

$d > 1$

- 1 Tevzadze (2008) :  $\xi$  bornée avec petite borne,
- 2 Hu Tang (2016) : quadratique sur la diagonale,
- 3 Xing Žitkovic (2016) : cas markovien,
- 4 Briand Elie (2013),
- 5 Darling (1995) : générateurs de  $\nabla$ -martingales.

# Localisation en $z$ , étape 1

$$Y_t = \xi + \int_t^T \underbrace{f}_{\text{Quad } z, \text{Lip } y} (s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

↓ Localisation

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{\text{Lip } z, \text{Lip } y} (s, Y_s^M, Z_s^M) ds - \int_t^T Z_s^M dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$f^M(t, y, z) = f(t, y, \rho^M(z))$  où notamment  $\rho^M$  est l'identité sur  $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d \times k}}(0, M)$ .

# Localisation en $z$ , étape 1

$$Y_t = \xi + \int_t^T \underbrace{f}_{\text{Quad } z, \text{Lip } y} (s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

↓ Localisation

$$Y_t^M = \xi + \int_t^T \underbrace{f^M}_{\text{Lip } z, \text{Lip } y} (s, Y_s^M, Z_s^M) ds - \int_t^T Z_s^M dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$f^M(t, y, z) = f(t, y, \rho^M(z))$  où notamment  $\rho^M$  est l'identité sur  $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d \times k}}(0, M)$ .

Résultat historique (Pardoux & Peng)

Il existe une solution  $(Y^M, Z^M)$  à l'EDSR localisée, avec  $f^M$  au lieu de  $f$ .

# Localisation en $z$ , étape 1

Si

Borne sur  $Z^M$

$$\sup_M \|Z^M\|_{S^\infty} < \infty.$$



# Localisation en $z$ , étape 1

Si

Borne sur  $Z^M$

$$\sup_M \|Z^M\|_{S^\infty} < \infty.$$

on fixe  $M^* > \sup_M \|Z^M\|_{S^\infty}$  et

$$f^{M^*} \left( s, Y^{M^*}, Z_s^{M^*} \right) = f \left( s, Y_s^{M^*}, \boxed{\rho^{M^*} \left( Z_s^{M^*} \right)} \right) = f \left( s, Y_s^{M^*}, \boxed{Z_s^{M^*}} \right).$$

# Localisation en $z$ , étape 1

Si

Borne sur  $Z^M$

$$\sup_M \|Z^M\|_{S^\infty} < \infty.$$

on fixe  $M^* > \sup_M \|Z^M\|_{S^\infty}$  et

$$f^{M^*}(s, Y^{M^*}, Z_s^{M^*}) = f\left(s, Y_s^{M^*}, \boxed{\rho^{M^*}(Z_s^{M^*})}\right) = f\left(s, Y_s^{M^*}, \boxed{Z_s^{M^*}}\right).$$

On stationne sur une vraie solution de l'EDSR non localisée pour  $M$  assez grand.

Obtention de  $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : linéarisation

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s. \text{ Dans ce cas : } \boxed{\mathbf{D}_t Y_t = Z_t}.$$

# Obtention de $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : linéarisation

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s. \text{ Dans ce cas : } \boxed{\mathbf{D}_t Y_t = Z_t}.$$

S'étend à :

El Karoui, Peng et Quenez (1997) / Mastrolia, Possamai, Réveillac (2017)

Sous HLIp,  $(\mathbf{D}_t Y_t^M)_{0 \leq t \leq T}$  est une version de  $Z^M$  et est solution d'une EDSR **linéaire** :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_u Y_t^M &= \mathbf{D}_u \xi + \int_t^T \left( \nabla_y f^M(s, Y_s^M, Z_s^M) \mathbf{D}_u Y_s^M + \nabla_z f^M(s, Y_s^M, Z_s^M) \mathbf{D}_u Z_s^M \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{D}_u f^M)(s, Y_s^M, Z_s^M) \right) ds - \int_t^T \mathbf{D}_u Z_s^M dW_s, \quad 0 \leq u \leq t. \end{aligned}$$

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives

# $d = 1$ , approche de Briand & Elie (2013)

structure quadratique avec  $L_y = 0$

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z)| \leq (K_y + 0 \cdot |z|^2) |y - y'|, \quad (\text{HLip}_y)$$

$$|f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq (K_z + L_z(|z| + |z'|)) |z - z'|. \quad (\text{HQQUAD}_z)$$

# Obtention de $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : estimation sur les EDSRL

$$U_t = \zeta + \int_t^T (A_s U_s + B_s V_s + f_s) ds - \int_t^T V_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

# Obtention de $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : estimation sur les EDSRL

$$U_t = \zeta + \int_t^T (A_s U_s + B_s V_s + f_s) ds - \int_t^T V_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Itô + Girsanov :

$$e^{\int_0^t A_s ds} U_t = e^{\int_0^T A_s ds} \zeta + \int_t^T e^{\int_0^s A_u du} f_s ds - \int_t^T e^{\int_0^s A_u du} V_s d\overline{W}^B_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\overline{W}^B = W + \int_0^\cdot B dt \quad \mathbf{Q}^B \text{ - brownien}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}^b}{d\mathbf{P}} = \mathcal{E} \left( \int_0^T B_s dW_s \right), \quad Y_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\zeta | \mathcal{F}_t),$$

puis montrer que  $Z \star W$  est BMO.



# Obtention de $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : estimation sur les EDSRL

$$U_t = \zeta + \int_t^T (A_s U_s + B_s V_s + f_s) ds - \int_t^T V_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$|A| \leq L_y :$$

$$|U_t| \leq e^{TL_y} \left( |\zeta| + \int_t^T |f_s| ds \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

# Obtention de $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : estimation sur les EDSRL

$$U_t = \zeta + \int_t^T (A_s U_s + B_s V_s + f_s) ds - \int_t^T V_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$|A| \leq L_y :$$

$$|U_t| \leq e^{TL_y} \left( |\zeta| + \int_t^T |f_s| ds \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Problème

technique non utilisable si  $d > 1$  (Girsanov)

# Obtention de $\sup_M \|Z^M\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty$ ? Étape 2 : estimation sur les EDSRL

$$U_t = \zeta + \int_t^T (A_s U_s + B_s V_s + f_s) ds - \int_t^T V_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

## EDSRs linéaires

$$U_t = \zeta + \int_t^T (A_s U_s + B_s V_s + f_s) ds - \int_t^T V_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

## Estimation sous borne BMO

$$|A| \leq K + LA, \quad |B| \leq K' + L'B,$$

où  $\sqrt{A} \star W$ ,  $B \star W$  sont BMO avec

$$2mL \left\| \sqrt{A} \star W \right\|_{BMO}^2 + \sqrt{2}L' \|B \star W\|_{BMO} C'_m < 1.$$

Alors

$$\|U\|_{\mathcal{S}^\infty} \leq K_m (\|\zeta\|_{L^\infty} + T \|f\|_{\mathcal{S}^\infty}).$$

## Seconde utilisation : résultat de stabilité

$$Y_t^1 = \zeta^1 + \int_t^T f_1(s, Y_s^1, Z_s^1) ds - \int_t^T Z_s^1 dW_s,$$

$$Y_t^2 = \zeta^2 + \int_t^T f_2(s, Y_s^2, Z_s^2) ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s.$$

## Seconde utilisation : résultat de stabilité

$$Y_t^1 = \zeta^1 + \int_t^T f_1(s, Y_s^1, Z_s^1) ds - \int_t^T Z_s^1 dW_s,$$

$$Y_t^2 = \zeta^2 + \int_t^T f_2(s, Y_s^2, Z_s^2) ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s.$$

$$\delta Y_t = \delta \zeta + \int_t^T (A_s \delta Y_s + B_s (\delta Z_s) + \delta f_s) ds - \int_t^T \delta Z_s dW_s$$

$$A_s = \frac{f_1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f_1(s, Y_s^2, Z_s^1)}{|\delta Y_s|^2}.$$

# Stabilité (énoncé)

$m > 1, p$  assez grand. Sous :

1  $(Z^1, Z^2) \in \mathcal{Z}_{BMO}^m \times \mathcal{Z}_{BMO}^m,$

2  $(\xi_1, \xi_2) \in (L^{2p})^2,$

3  $\int_0^T |\delta f_s| ds \in L^{2p}.$  Alors :

## Stabilité

$$\|\delta Y\|_{\mathcal{S}^{2p}}^p + \|\delta Z \star W\|_{\mathcal{H}^p}^p \leq K \left( \|\delta \xi\|_{L^{2p}}^p + \left\| \int_0^T |\delta f_s| ds \right\|_{L^{2p}}^p \right).$$

# Stabilité (énoncé)

$m > 1, p$  assez grand. Sous :

1  $(Z^1, Z^2) \in \mathcal{Z}_{BMO}^m \times \mathcal{Z}_{BMO}^m,$

2  $(\xi_1, \xi_2) \in (L^{2p})^2,$

3  $\int_0^T |\delta f_s| ds \in L^{2p}.$  Alors :

## Stabilité

$$\|\delta Y\|_{\mathcal{S}^{2p}}^p + \|\delta Z \star W\|_{\mathcal{H}^p}^p \leq K \left( \|\delta \xi\|_{L^{2p}}^p + \left\| \int_0^T |\delta f_s| ds \right\|_{L^{2p}}^p \right).$$

$\rightsquigarrow$  unicité dans  $\mathcal{S}^{2p} \times \mathcal{H}^p.$



# Stabilité (énoncé)

$m > 1$ ,  $p$  assez grand. Sous :

1  $(Z^1, Z^2) \in \mathcal{Z}_{BMO}^m \times \mathcal{Z}_{BMO}^m$ ,

2  $(\xi_1, \xi_2) \in (L^{2p})^2$ ,

3  $\int_0^T |\delta f_s| ds \in L^{2p}$ .

$$2mL \left\| \sqrt{\mathcal{A}} \star W \right\|_{BMO}^2 + \sqrt{2}L' \left\| \mathcal{B} \star W \right\|_{BMO} C'_m < 1.$$

Alors :

Stabilité

$$\begin{aligned} & \|Y^n - Y^m\|_{\mathcal{S}^{2p}}^p + \| |Z^n - Z^m| \star W \|_{\mathcal{H}^p}^p \\ & \leq K \left( \|\xi^n - \xi^m\|_{L^{2p}}^p + \left\| \int_0^T |f_s^n - f_s^m| ds \right\|_{L^{2p}}^p \right). \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  convergence dans  $\mathcal{S}^{2p} \times \mathcal{H}^p$ .

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs**
  - Structure d'une EDSR
  - Cas lipschitz et insuffisance
  - Exemples d'EDSRr quadratiques
  - Résultats d'existence existants
  - Estimées sur les solutions d'EDSRs linéaires
  - Existence et unicité
- 5 Quelques perspectives

# Hypothèses du résultat principal (existence)

Soit  $m > 1$ . On suppose :

1 HLip $_y$ , HQuad $_z$ ,

# Hypothèses du résultat principal (existence)

Soit  $m > 1$ . On suppose :

- 1 HLip $_y$ , HQuad $_z$ ,
- 2  $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$  assez petite (dépendant de  $m$ ), uniformément bornée en  $M$  et  $\xi$ ,

# Hypothèses du résultat principal (existence)

Soit  $m > 1$ . On suppose :

- 1 HLip $y$ , HQuad $z$ ,
- 2  $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$  assez petite (dépendant de  $m$ ), uniformément bornée en  $M$  et  $\xi$ ,
- 3 hypothèse sur l'aléa du générateur  $f$ ,

# Hypothèses du résultat principal (existence)

Soit  $m > 1$ . On suppose :

- 1 HLip $y$ , HQuad $z$ ,
- 2  $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$  assez petite (dépendant de  $m$ ), uniformément bornée en  $M$  et  $\xi$ ,
- 3 hypothèse sur l'aléa du générateur  $f$ ,
- 4  $\mathbf{D}\xi \in \mathcal{S}^\infty$ ,  $|\mathbf{D}_u f(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2)$  a.s.

$$\mathcal{Z}_{BMO}^m = \{Z, \text{ processus BMO}, \|Z \star W\|_{BMO} \text{ petite}\}.$$

### Résultat principal (existence)

Pour tout  $m > 1$ , existence et unicité de  $(Y, Z)$  tels que

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s|^{2m^*} \right) < \infty, \mathbf{E} \left( \left( \int_0^T |Z_s|^2 ds \right)^{m^*/2} \right) < \infty, Z \in \mathcal{Z}_{BMO}^m.$$

$$\left| \nabla_y f^M (s, Y_s^M, Z_s^M) \right| = \left| \nabla_y f (s, Y_s^M, \rho^M(Z_s^M)) \right| \leq K_y + L_y |Z_s^M|^2,$$

$$\left| \nabla_z f^M (s, Y_s^M, Z_s^M) \right| = \left| \nabla_z f (s, Y_s^M, \rho^M(Z_s^M)) \right| \leq K_z + 2L_z |Z_s^M|.$$



$$\left| \nabla_y f^M(s, Y_s^M, Z_s^M) \right| = \left| \nabla_y f(s, Y_s^M, \rho^M(Z_s^M)) \right| \leq K_y + L_y |Z_s^M|^2,$$

$$\left| \nabla_z f^M(s, Y_s^M, Z_s^M) \right| = \left| \nabla_z f(s, Y_s^M, \rho^M(Z_s^M)) \right| \leq K_z + 2L_z |Z_s^M|.$$

$$2mL \left\| \sqrt{\mathcal{A}} \star W \right\|_{BMO}^2 + \sqrt{2}L' \|\mathcal{B} \star W\|_{BMO} C'_m < 1$$

devient

### Borne BMO

$$2mL_y \left\| |Z^M| \star W \right\|_{BMO}^2 + 2\sqrt{2}L_z C'_m \left\| |Z^M| \star W \right\|_{BMO} < 1.$$

# Hypothèses améliorées

Soit  $m > 1$ . On suppose :

- 1 (HLip $y$ ), (HQUAD $z$ ),
- 2  $\mathbf{D}\xi \in \mathcal{S}^\infty$ ,  $|\mathbf{D}_u f(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2)$  a.s.
- 3  $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$  assez petite (dépendant de  $m$ ), uniformément bornée en  $M$  et  $\xi$ ,
- 4 hypothèse sur l'aléa du générateur  $f$ .

# Hypothèses améliorées

Soit  $m > 1$ . On suppose :

- 1 HLip $y$ , HQuad $z$ ,
- 2  $\mathbf{D}_\xi \in \mathcal{S}^\infty$ ,  $|\mathbf{D}_u f(t, y, z)| \leq C(1 + |z|^2)$  a.s.  $\Leftarrow$  stabilité
- 3  $\left\| Z^M \star W \right\|_{BMO}$  assez petite (dépendant de  $m$ ), uniformément bornée en  $M$  et  $\xi$ ,
- 4 hypothèse sur l'aléa du générateur  $f$ .

## Version $\nabla$ -martingales

Supposons

- (i)  $F^{dc} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ ,  $G = (F^{dc})^{-1} (]-\infty, 0])$  compact contenant  $\xi$ ,
- (ii)  $F^{dc}$  doublement convexe sur  $\mathcal{M}$ ,
- (iii)  $\exists \alpha > 0, m \geq 1$  /  $F^{dc}$  est  $\alpha$ -strictement doublement convexe sur  $G$  et

$$\sup_{(x,y) \in G^2} \left\{ F^{dc}(x) - F^{dc}(y) \right\} \quad \text{assez petite.}$$

Version  $\nabla$ -martingales

Supposons

- (i)  $F^{dc} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ ,  $G = (F^{dc})^{-1} (]-\infty, 0])$  compact contenant  $\xi$ ,
- (ii)  $F^{dc}$  doublement convexe sur  $\mathcal{M}$ ,
- (iii)  $\exists \alpha > 0, m \geq 1$  /  $F^{dc}$  est  $\alpha$ -strictement doublement convexe sur  $G$  et

$$\sup_{(x,y) \in G^2} \left\{ F^{dc}(x) - F^{dc}(y) \right\} \quad \text{assez petite.}$$

Alors existence et unicité d'une  $\nabla$ -martingale  $Y$  dans  $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R}^d)$  de valeur terminale  $\xi$ , t.q.  $\sqrt{|\langle Y, Y \rangle|} \star W \in \mathcal{Z}_{BMO}^m$ . De plus, si  $\xi$  est à dérivée de Malliavin bornée, on a :

$$\text{esssup}_{\Omega \times [0, T]} |\langle Y, Y \rangle| < +\infty.$$

# L'hypothèse BMO

→ Tevzadze, 2008.

→ générateur monotone :

1  $\mu > 0, \alpha, \gamma \geq 0, y.f(s, y, z) \leq \alpha |y| - \mu |y|^2 + \gamma |y| |z|^2,$

2  $\gamma$  assez petit.

# L'hypothèse BMO

→ Tevzadze, 2008.

→ générateur monotone :

1  $\mu > 0, \alpha, \gamma \geq 0, y.f(s, y, z) \leq \alpha |y| - \mu |y|^2 + \gamma |y| |z|^2,$

2  $\gamma$  assez petit.

→ Cas quadratique diagonal avec des constantes bien choisies (Hu, Tang, 2015),

# L'hypothèse BMO

→ Tevzadze, 2008.

→ générateur monotone :

1  $\mu > 0, \alpha, \gamma \geq 0, y.f(s, y, z) \leq \alpha |y| - \mu |y|^2 + \gamma |y| |z|^2,$

2  $\gamma$  assez petit.

→ Cas quadratique diagonal avec des constantes bien choisies (Hu, Tang, 2015),

→ Cas Markovien (Xing, Žitkovic, 2016),



# L'hypothèse BMO

→ Tevzadze, 2008.

→ générateur monotone :

1  $\mu > 0, \alpha, \gamma \geq 0, y.f(s, y, z) \leq \alpha |y| - \mu |y|^2 + \gamma |y| |z|^2,$

2  $\gamma$  assez petit.

→ Cas quadratique diagonal avec des constantes bien choisies (Hu, Tang, 2015),

→ Cas Markovien (Xing, Žitkovic, 2016),

→ Problème de recherche de martingales de valeur terminale donnée en utilisant de bonnes fonctions convexes (Darling 1995).

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Unicité et géométrie convexe
- 3 Méthode d'algorithmique stochastique
- 4 Méthode utilisant les EDSRs
- 5 Quelques perspectives**

## 1 algorithme stochastique à adapter avec une dérive

### Premier tir avec dérive

$$\begin{cases} d^\nabla X(a) = a \parallel_{X(0), X(a)} (dJ(0)) + V(dX(a), dX(a)), & 0 \leq t \leq \tau(a), \\ X_0(a) = \exp_{X_0(0)}(a/J_0(0)), \\ X_t(a) = X_{\tau(a)}, & \tau(a) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

- 2 nouveaux résultats sur les EDSRs quadratiques multidimensionnelles du type :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$$

où  $f(y, z)$  bilinéaire en  $z$ .

- 3 Hölder inverse en dimension supérieure pour l'exponentielle de Dolean-Dade?

Merci pour votre attention.

