

I.U.T. BORDEAUX
GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE
Semestre 4 2017– 2018
Cours / TD de Mathématiques
Courbes Planes : Propriétés & Étude Métrique
Durée prévue : C.M. 6 × 1 heure / T.D. 7 × 1h30

Jonathan HARTER
IUT de Bordeaux, département GMP
15 Rue Naudet
CS 10207
33175 Gradignan Cedex
jona.harter.maths@gmail.com
Merci de bien vouloir me signaler toute erreur par mail.

Résumé

Ce semestre nous allons étudier les *courbes planes*, i.e. les objets géométriques de dimension un, inclus dans un plan. Vous connaissez depuis le lycée une première famille de courbes planes; les courbes représentatives de fonctions f , que l'on peut écrire aussi sous la forme $\{(t, f(t)), t \in I\}$ où I est l'ensemble de définition de la fonction f . Plus généralement on considèrera des ensembles de points $\{(x(t), y(t)), t \in I\}$, où $x, y : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions. On autorisera donc l'abscisse à prendre n'importe quelle valeur ce qui aura notamment comme incidence l'existence potentielle de « boucles » dans la courbe, ce qui n'était pas le cas pour les courbes de fonctions (la fonction $x : t \mapsto t$ est strictement croissante).

Dans le premier chapitre, nous généraliserons donc la notion de courbe en coordonnées cartésiennes via la notion de *courbes paramétrées* et aborderons les outils correspondants servant à en décrire les caractéristiques. Dans le deuxième chapitre, nous verrons une autre façon de définir une courbe plane à l'aide des *coordonnées polaires*, et les outils associés pour décrire ces courbes.

Le dernier chapitre est dévoué à l'introduction de *propriétés métriques* des courbes telles que la longueur et la courbure.

Pour finir, je remercie Mickaël MATUSINSKI pour une grosse partie du contenu de ce polycopié.

Évaluations :

- ♣ Ramassages (un ou deux) d'exercices de TD,
- ♣ DS de mi-parcours,
- ♣ DS terminal.

Table des matières

1	Courbes paramétrées	3
1.1	Définition	3
1.2	Étude d'une courbe paramétrée	4
1.3	Branches infinies	8
1.3.1	Asymptote horizontale; $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$.	9
1.3.2	Asymptote verticale; $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$.	9
1.3.3	Le cas $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$	10
1.4	Étude locale	13
1.4.1	Vecteur tangent et repère de Frenet.	13
1.4.2	Points réguliers et singuliers	14
2	Courbes Polaires	17
2.1	Étude de la courbe	17
2.2	Étude locale et branches infinies	20
2.2.1	Étude locale	20
2.2.2	Branches infinies	21
3	Étude métrique des courbes	24
3.1	Longueur d'un arc paramétré.	24
3.2	Abscisse curviligne.	26
3.3	Courbure.	27

1 Courbes paramétrées

§ 1.1. Définition

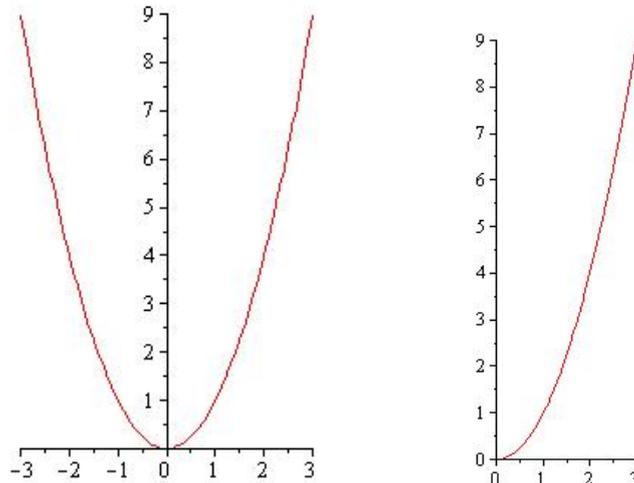
On connaît la notion de courbe représentative d'une fonction. Mais comment décrire mathématiquement des courbes ou dynamiques plus complexes, par exemple un cercle, un carré, une spirale... *i.e.* celles qui sont autorisées à boucler. Voici la première définition.

Définition 1.1 Une courbe paramétrée du plan est un ensemble de points de \mathbf{R}^2 du type $C := \{(f(t), g(t)), t \in I\}$ où I est un sous-ensemble de \mathbf{R} , en général un intervalle ou une union finie d'intervalles.

On note parfois aussi :

$$C \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

Exemple – 1.1 La courbe $C \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$, *i.e.* le sous-ensemble $\{(t, t^2), t \in \mathbf{R}\}$ de \mathbf{R}^2 est la parabole d'équation $y = x^2$. Si on prend $t \in [0, +\infty[$, on a seulement la demi-parabole.

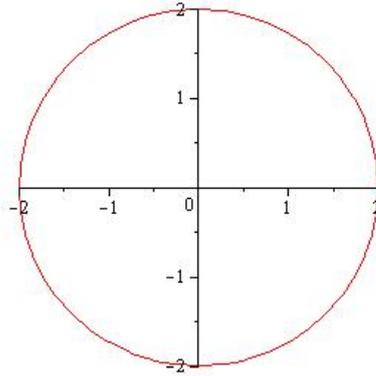


Pour $f(t) = t$ pour tout $t \in I$, on retrouve la notion de courbe représentative de fonction.

Remarque – 1.1 1. Pour toute fonction f , la courbe représentative de f peut s'écrire sous forme paramétrée :

$$C_f \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}, \quad t \in \mathcal{D}_f.$$

2. La courbe $C \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$ est exactement le cercle de centre O et de rayon R. Il en est de même de $C \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi[$. Deux courbes peuvent donc décrire le même ensemble, sans pour autant avoir même ensemble de définition.



⚠ **Attention.** Une courbe paramétrée n'est pas seulement la donnée d'un objet géométrique, mais aussi de la façon dont on parcourt cette courbe. De-même qu'une fonction possède une expression ainsi qu'un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Il est donc *impératif* de bien préciser l'ensemble de définition de la courbe paramétrée. L'objet géométrique qui est le graphe d'une courbe paramétrée est appelé son *support*.

⚠ **Attention.** La donnée du support et du sens de parcourt sur ce support *ne suffit pas* non plus à décrire la courbe paramétrée. En effet, par exemple,

$$C \begin{cases} x(t) = R \cos(t^3) \\ y(t) = R \sin(t^3) \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

est une autre paramétrisation du cercle de centre O et de rayon R parcouru une infinité de fois dans le sens trigonométrique. Mais dans ce cas, le cercle n'est pas parcouru à vitesse angulaire constante !

§ 1.2. Étude d'une courbe paramétrée

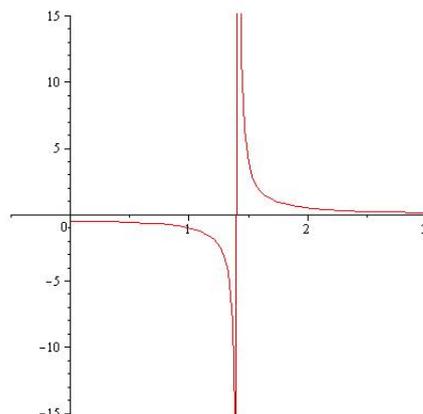
La motivation principale est l'arrivée au tracé entier d'une courbe. Pour ce faire, on commence par calculer et réduire le domaine de définition de la courbe paramétrée; les tableaux de variations seront complexes, et il est indispensable de réduire l'ensemble où vit le paramètre t , et déduire le reste de la courbe par des transformations géométriques (symétries, translations, etc...).

Domaine de définition La courbe paramétrée a un *domaine de définition*, qui est l'ensemble maximum des valeurs du paramètre pour lesquelles on peut calculer x et y . Il s'agit donc de :

$$\mathcal{D}_C = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$$

La *première* chose à faire dans l'étude de C est le calcul de son domaine de définition, en le restreignant éventuellement si un intervalle I est spécifié au départ. Autrement dit, dans le cas où un domaine I est spécifié au départ, il faut alors calculer $\mathcal{D}_C \cap I$.

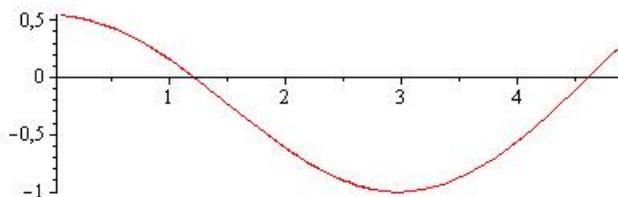
Exemple - 1.2 $C \begin{cases} x(t) = \sqrt{t+2} \\ y(t) = 1/t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ est définie sur $\mathcal{D}_C = [-2, +\infty[\cap \mathbf{R}^* = [-2, 0[\cup]0, +\infty[$



Domaine d'étude : réduction par parité. La deuxième chose à faire dans l'étude d'une courbe C est d'interpréter les propriétés de *parité* des fonctions f et g :

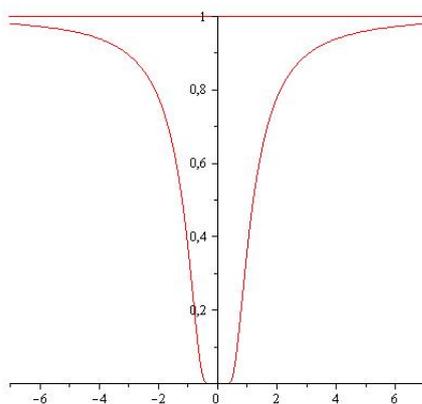
- ◊ x paire, y paire : les points de paramètres t et $-t$ sont confondus pour tout t , car $M_{-t} = (x(-t), y(-t)) = M_t$.
Donc, on peut restreindre l'étude de C à $\mathcal{D}_C \cap [0, +\infty[$.

Par exemple, la courbe $C \begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 - 1} \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$ est définie sur $\mathbf{R} \setminus]-1, 1[$, mais il suffit de la tracer pour $t \in [1, +\infty[$ pour décrire la courbe dans son intégralité :



- ◊ x impaire, y paire : pour tout t , les points de paramètres t et $-t$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, car $M_{-t} = (x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t))$.
Donc, on peut restreindre l'étude de C à $\mathcal{D}_C \cap [0, +\infty[$ et on appliquera la *symétrie par rapport à (Oy)* .

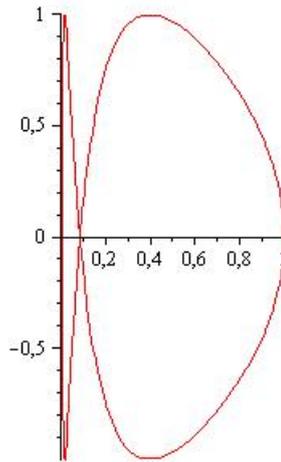
Par exemple, la parabole (cf ci-dessus). Autre exemple : $C \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = e^{-t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}^*$.



- ◊ x paire, y impaire : pour tout t , les points de paramètres t et $-t$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses car $M_{-t} = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$.
Donc, on peut restreindre l'étude de C à $\mathcal{D}_C \cap [0, +\infty[$ et on appliquera la *symétrie par rapport à (Ox)* pour obtenir le restant de la courbe.

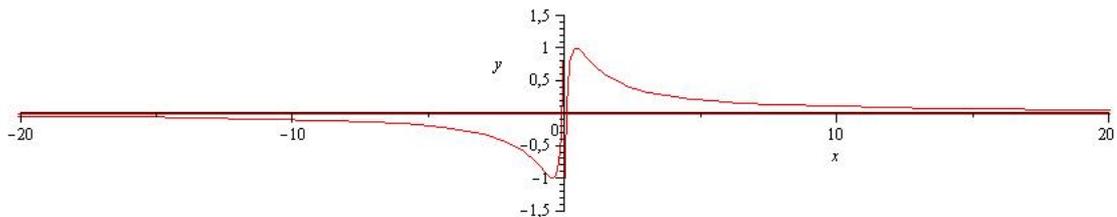
Par exemple, le cercle (cf ci-dessus), la parabole horizontale $C \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$

Autre exemple : $C \begin{cases} x(t) = 1/\operatorname{ch}(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbf{R}$



◊ x impaire, y impaire : pour tout t , les points de paramètres t et $-t$ sont symétriques par rapport au centre O car $M_{-t} = (-x(t), -y(t)) = -M_t$. Donc, on peut restreindre l'étude de C à $\boxed{\mathcal{D}_C \cap [0, +\infty[}$ et on appliquera la symétrie centrale de centre O .

Par exemple, l'hyperbole (fonction inverse), ou encore $C \begin{cases} x(t) = 1/\text{sh}(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} t \in \mathbf{R}^*$.



Remarque – 1.2 Dans tous ces cas, il faut que \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g soient symétriques par rapport à O , donc \mathcal{D}_C aussi. Autrement dit, si \mathcal{D}_f ou \mathcal{D}_g n'est pas symétrique par rapport à O , on n'étudie pas la parité pour C , tout simplement parce que cela n'a aucun sens.

Domaine d'étude : réduction par périodicité. Par définition, une période pour C - si elle existe - est le plus petit réel $T > 0$ tel que $x(t + T) = x(t)$ et $y(t + T) = y(t)$ pour tout t (autrement dit, une période commune aux deux fonctions x et y).
Notons T_x et T_y deux plus petites périodes respectivement de x et y .

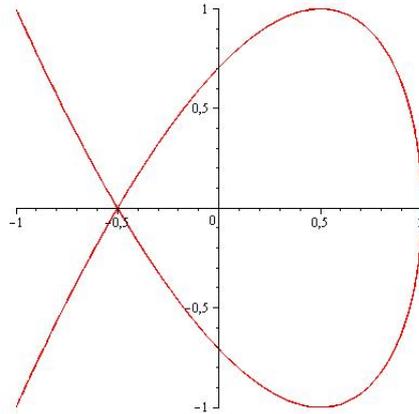
Proposition – 1.1 La période T est le plus petit commun multiple de T_1 et T_2 , s'il existe :

$$T = \text{ppcm}(T_1, T_2) = n_1 T_1 = n_2 T_2 \text{ pour certains } n_1, n_2 \in \mathbf{N} \text{ les plus petits possibles.}$$

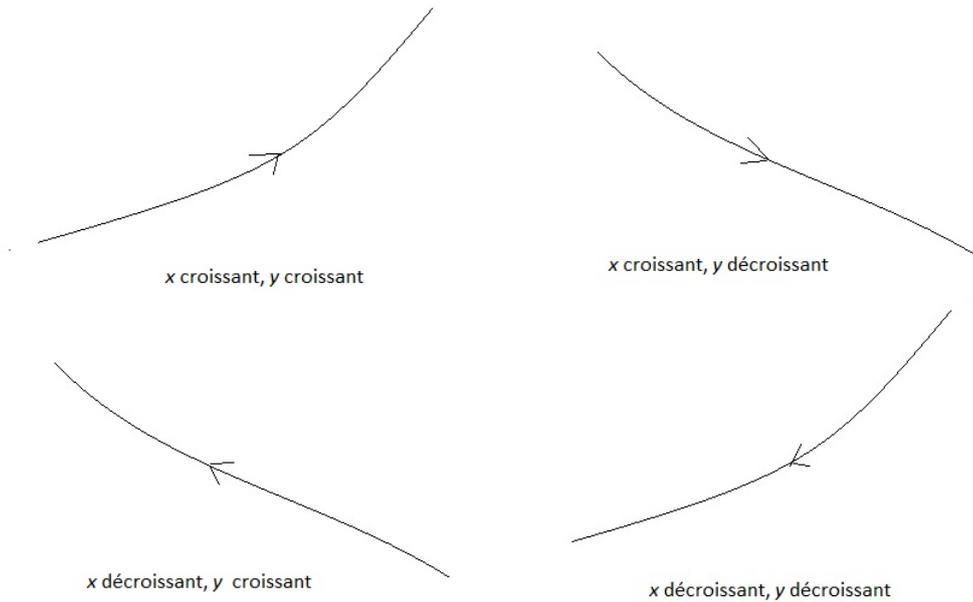
Condition nécessaire et suffisante d'existence : $\text{ppcm}(T_1, T_2)$ existe si et seulement si $T_1/T_2 \in \mathbf{Q}$.

Exemple – 1.3 $C \begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, est bien définie.

Puisque x est π -périodique et y est $2\pi/3$ -périodique, la paramétrisation de C est 2π -périodique ($2\pi = 3 * (2\pi/3) = 2 * \pi$) : on restreint le domaine d'étude à $[0, 2\pi[$ ou $[-\pi, \pi[$ ou...



Variations des coordonnées. Les étapes précédentes nous ont permis de réduire l'étude de C à un *domaine d'étude* \mathcal{D}_e le plus petit possible. Tout comme pour les fonctions, il est important ensuite de déterminer les variations. Ici, nous avons donc les variations de x et de y sur \mathcal{D}_e qui nous indiquent les *variations* de C . Il faut savoir interpréter graphiquement :



On présente les résultats sous forme de *tableau de variation* :

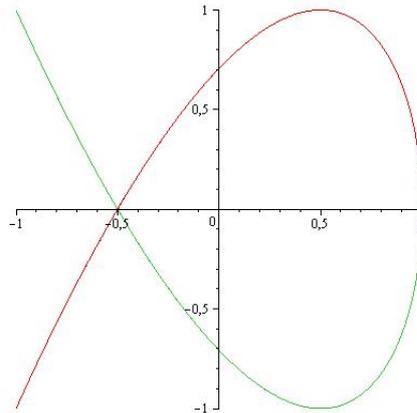
t	\mathcal{D}_e
x'	signe
x	sens de variation
y	sens de variation
y'	signe

Exemple – 1.4 $C \begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$. Par 2π -périodicité, on s'était déjà ramené à un domaine d'étude du type $[-\pi, \pi[$.

Puisque x est paire et y est impaire, on se ramène à $\mathcal{D}_e = [-\pi, \pi[\cap]0, +\infty[=]0, \pi[$.

On détermine ensuite les variations :

t	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π				
$x'(t) = -2\sin(2t)$	0	-	-	0	+	+	0		
$x(t)$	1		\searrow			\nearrow	1		
$y(t)$		1	\searrow			1	\searrow		
$y'(t) = 3\cos(3t)$	3	+	0	-	0	+	0	-	-1



Remarque – 1.3 Le fait que nous repassions deux fois sur la partie rouge de la courbe indique que nous aurions pu encore réduire le domaine d'étude.

En effet, ici, on a : $x(\pi - t) = \cos(2\pi - 2t) = \cos(2t)$ et $y(\pi - t) = \sin(3\pi - 3t) = \sin(3t)$, ce qui permet de réduire le domaine d'étude finalement à $[0, \pi/2]$.

En général, notez bien qu'il existe d'autres possibilités de réduire le domaine d'étude que celles que nous avons citées, mais ces dernières suffisent déjà à largement simplifier l'étude.

À présent que le tableau de variations est établi nous avons besoin d'une dernière chose : le comportement asymptotique. En fonctions des limites aux bornes de x et y on obtient des comportements différents.

§ 1.3. Branches infinies

Définition 1.2 Etant donnée une courbe paramétrée

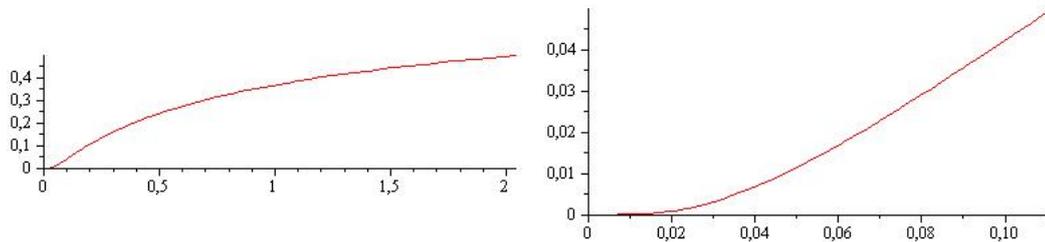
$$C \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

On dit que C admet une branche infinie en $t_0 \in \bar{I}$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$.

Si $I = \mathbf{R}$, un point (a, b) du type $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = b$ ou $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = a$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = b$ sera appelé point d'arrêt de la courbe C .

Exemple – 1.5 Le point $O(0, 0)$ est un point d'arrêt (lorsque $t \rightarrow +\infty$) de :

$$C \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases} t \in \mathbf{R}. \text{ Voir ci-dessous, le graphe de droite étant une version zoomée du premier.}$$



Remarque – 1.4 (Cas des courbes représentatives) Si $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$, pour $t \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction, alors $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = t_0$ pour tout $t_0 \in \bar{I}$. Dans ces cas, une branche infinie a lieu en un point t_0 tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \pm\infty$. On retrouve alors les cas asymptotes étudiés depuis les classes de lycée.

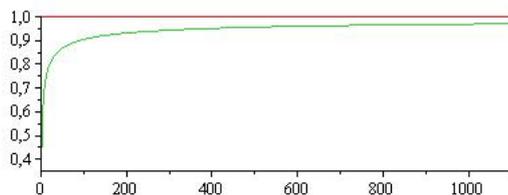
1.3.1 Asymptote horizontale; $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$.

Dans ce cas, C admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = b$.

Exemple – 1.6 Soit à nouveau la courbe

$$C \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2} & t \in I \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1$, C admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = 1$.



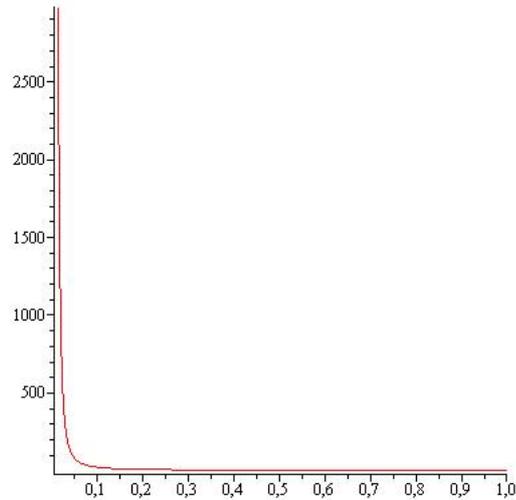
1.3.2 Asymptote verticale; $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$.

Dans ce cas, C admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$.

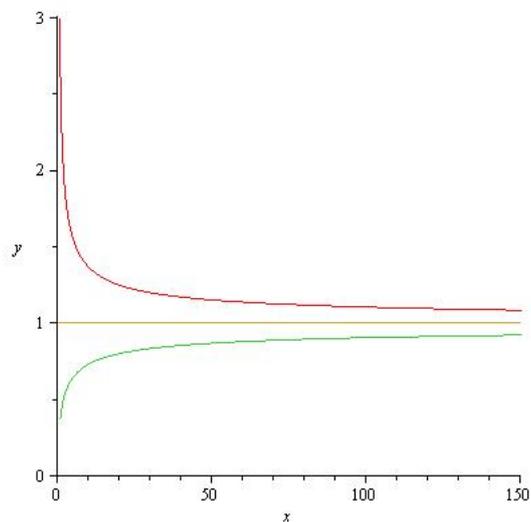
Exemple – 1.7 Soit à nouveau la courbe

$$C \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2} & t \in \mathbf{R} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = +\infty$, C admet une *asymptote verticale* d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.



Globalement, notre courbe a l'allure suivante :



1.3.3 Le cas $\lim x(t) = \infty$ et $\lim y(t) = \infty$

Vous avez déjà rencontré des exemples de fonctions qui admettent une asymptote oblique. Jusqu'à présent on vous donnait l'équation de ladite asymptote, s'en suivait alors une vérification. En fait on est toujours capable de savoir si une courbe admet une asymptote oblique.

En effet, si c'est le cas, alors $y(t) - ax(t) - b \rightarrow_{t \rightarrow t_0} 0$ pour un certain couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, donc comme $x(t) \rightarrow_{t \rightarrow t_0} \pm\infty$ on obtient

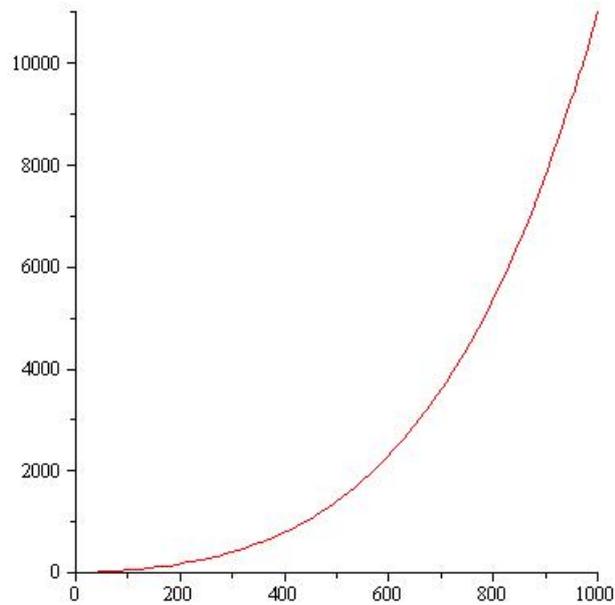
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a.$$

Donc si ce quotient ne converge pas vers une limite finie la courbe n'admettra aucune asymptote oblique. Plus précisément, peuvent se produire les cas ci-dessous.

Étude de l'existence d'asymptotes obliques.

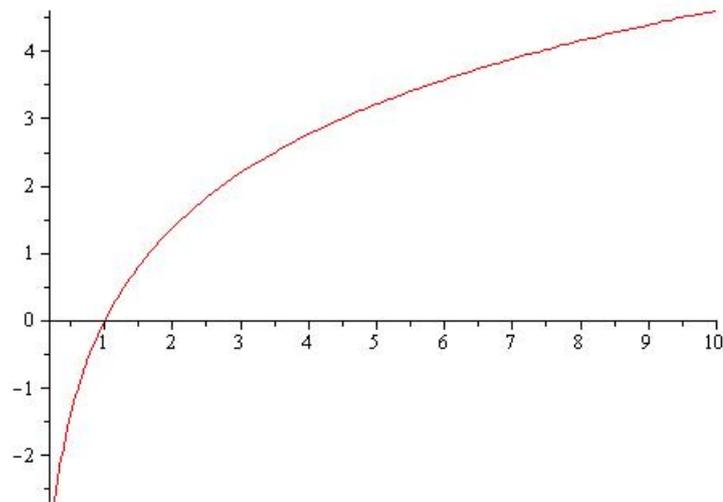
- ▷ Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$, c'est-à-dire y tend vers ∞ plus vite que x , alors on dit que C admet une *branche parabolique de direction asymptotique* (Oy) .

Exemple – 1.8 $C \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = \text{ch}(t) \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) quand $t \rightarrow +\infty$.



▷ Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ c'est-à-dire $x(t)$ tend vers ∞ plus vite que $y(t)$, alors on dit que C admet une *branche parabolique de direction asymptotique* (Ox) .

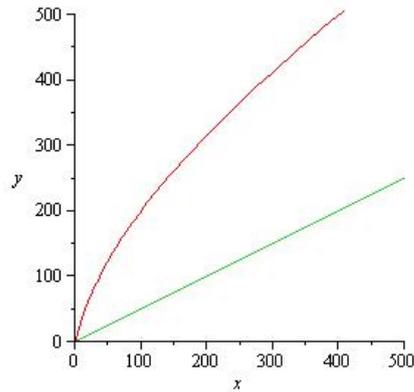
Exemple – 1.9 $C \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = \ln(t) \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}_+^*$ admet une *branche parabolique de direction asymptotique* (Ox) quand $t \rightarrow +\infty$.



▷ Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ (c'est-à-dire $y(t)$ tend vers ∞ aussi vite que $ax(t)$), alors on a deux sous-cas :

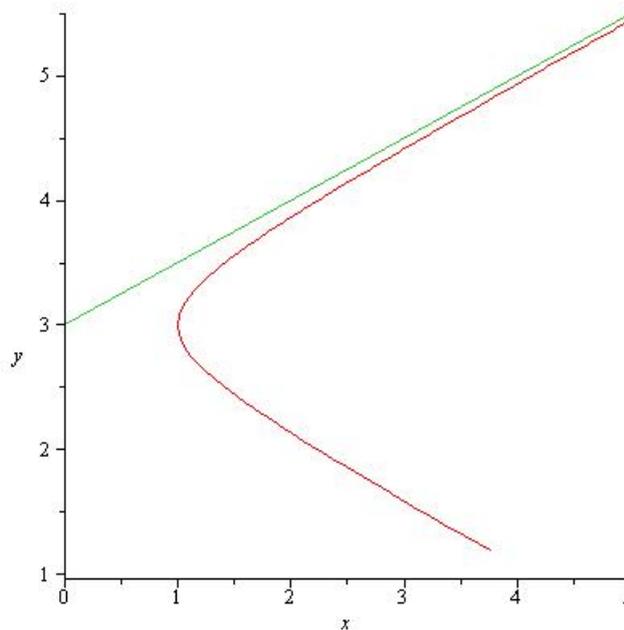
♣ si $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = \infty$, on dit que C admet une *branche parabolique d'axe* $y = ax$.

Exemple – 1.10 $C \begin{cases} x(t) = \text{ch}(t) \\ y(t) = t^3 + \text{sh}(t)/2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$ admet une *branche parabolique de direction asymptotique* $\Delta: y = x/2$ quand $t \rightarrow +\infty$.



♣ si $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b$, on dit que C admet une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$.

Exemple – 1.11 $C \begin{cases} x(t) = \text{ch}(t) \\ y(t) = 3 + \text{sh}(t)/2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$ admet une asymptote oblique $y = x/2 + 3$.



Exemple – 1.12 On considère la courbe

$$C \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t-1} \\ y(t) = \frac{1}{t^2-1} \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

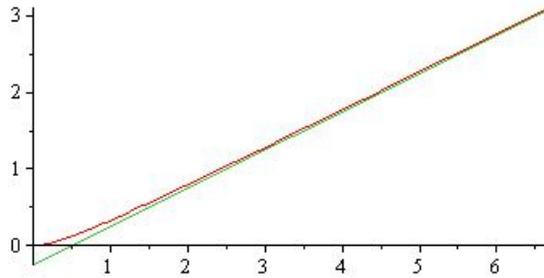
On a : $\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) = +\infty$. De plus :

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \left[y(t) - \frac{1}{2}x(t) \right] = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{2t-2} \right] = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{2-(t+1)}{2t^2-2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1-t}{2t^2-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Donc C admet la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ pour asymptote oblique quand $t \rightarrow 1^+$.



§ 1.4. Etude locale

1.4.1 Vecteur tangent et repère de Frenet.

Définition 1.3 Etant donnée une courbe paramétrée

$$C \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}, t \in I$$

et un point $M(t_0) \in C$ avec $t_0 \in I$ tel que $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$

La droite tangente à C en $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Remarque – 1.5 (Cas des courbes représentatives) Si $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$, pour $t \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soit $t_0 \in I$. Vous savez depuis le lycée que, si f est dérivable en t_0 , l'équation de la tangente à f en $(t_0, f(t_0))$ est définie par :

$$T_{t_0} : y = f'(t_0)(x - x(t_0)) + f(t_0) \iff f'(t_0)x - 1y = -f(t_0) + f'(t_0)x(t_0).$$

C'est l'équation d'une droite passant par $(t_0, f(t_0))$, de vecteur directeur $(1, f'(t_0)) = (x'(t_0), y'(t_0))$. On ne fait donc que généraliser ici cette définition à une courbe paramétrée quelconque.

Définition 1.4 Si $\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0))$ est non nul, le point $M(t_0)$ est dit régulier, on appelle aussi $\vec{T}(t_0)$ le vecteur vitesse en t_0 de la courbe C .

Si $\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0)) = (0, 0)$, on dit que le point est singulier (ou stationnaire).

Remarque – 1.6 Rappelons que $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ signifie que $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$.

Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente en t_0 est verticale.

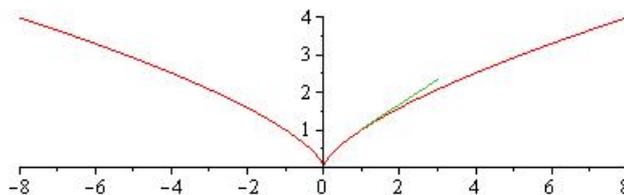
Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la tangente est horizontale.

Exemple – 1.13 On considère la courbe

$$C \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Donc $x'(t) = 3t^2$ et $y'(t) = 2t$. Pour tout point $M_0(t_0^3, t_0^2)$ avec $t_0 \neq 0$, on a $\vec{T}(3t_0^2, 2t_0) \neq (0, 0)$: M_0 est régulier.

Par exemple pour $t_0 = 1$, $\vec{T}(3, 2)$ est le vecteur tangent à C en $M_0(1, 1)$. Par contre, en $M_0 = O(0, 0)$ pour $t = 0$, on a $(x', y') = (0, 0)$: il s'agit d'un point singulier.



Le vecteur \vec{T} étant défini, on peut définir un vecteur normal en chaque point de la courbe.

Définition 1.5 (Repère de Frenet) Si $\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0))$ est non nul, on note $\vec{N} = (-y'(t_0), x'(t_0))$ un vecteur directement orthogonal à \vec{T} .
La famille (\vec{T}, \vec{N}) est une base de \mathbf{R}^2 , et $(M(t_0), \vec{T}, \vec{N})$ est appelé repère de Frenet en t_0 .

Définition 1.6 (Repère de Frenet unitaire) Si $\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0))$ est non nul, on note $\vec{\mathcal{T}} = \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}$ et $\vec{\mathcal{N}} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ un vecteur directement orthonormal.
La famille $(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{N}})$ est une base orthonormée de \mathbf{R}^2 , et $(M(t_0), \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{N}})$ est appelé repère orthonormé de Frenet en t_0 .

1.4.2 Points réguliers et singuliers

Lorsque le vecteur vitesse est non nul, on connaît maintenant l'allure de la courbe ; elle admet une droite tangente en le point en question.

Que pouvons-nous dire au voisinage d'un point singulier ? Nous allons étudier l'allure de la courbe dans un repère particulier (construit ci-dessous) centré en $M(t_0)$, et déterminer dans quel cadran du repère la courbe vivra au moyen de développements limités.

Pour étudier localement un point $M_0(t_0)$ d'une courbe paramétrée C , on va donc utiliser les développements limités de x et y en t_0 , en supposant que x et y admettent bien des D.L. en t_0 .

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t) \\ y = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \dots + b_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t) \end{cases}$$

En particulier, on pourra éventuellement utiliser les développements de Taylor-Young dans le cas où x et y sont dérivables n fois au voisinage de t_0 :

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t) \end{cases}$$

Définition 1.7 Si x et y sont n fois dérivables au voisinage de t_0 , on définit les vecteurs dérivés successifs pour tout $k = 1, \dots, n$, par $\vec{T}_k(t_0) = (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0))$. Donc :

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + (t - t_0)\vec{T}_1(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!}\vec{T}_n(t_0) + (t - t_0)^n \vec{\varepsilon},$$

avec $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ un vecteur de fonctions convergeant vers zéro.

Plus généralement, dans le cas où x et y admettent des DL à l'ordre n en t_0 , on posera $\vec{T}_k = (a_k, b_k)$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

On notera en général $p_{t_0}(x, y)$ le plus petit entier tel que $\vec{T}_{p_{t_0}(x, y)} \neq (0, 0)$, avec éventuellement $p_{t_0}(x, y) = \infty$ si aucun des vecteurs dérivés n'est non nul.

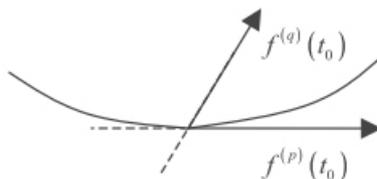
Dans la suite, si le contexte est clair on notera simplement $p = p_{t_0}(x, y)$. On notera ensuite $q = q_{t_0}(x, y)$ le plus petit entier possible (s'il existe) tel que \vec{T}_q ne soit pas colinéaire à \vec{T}_p . En particulier \vec{T}_q est aussi non nul. Autrement dit $(\vec{T}_p(t_0), \vec{T}_q(t_0))$ forme une base de \mathbf{R}^2 .

On peut alors écrire d'après la formule de Taylor à l'ordre q que :

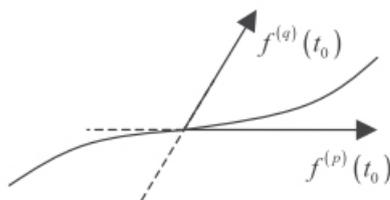
$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \frac{(t-t_0)^\rho}{\rho!} \vec{T}_\rho(t_0) + \frac{(t-t_0)^{\rho+1}}{(\rho+1)!} \vec{T}_{\rho+1}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{T}_q(t_0) + (t-t_0)^q \vec{\epsilon} \\ &= \boxed{\frac{(t-t_0)^\rho}{\rho!} \vec{T}_\rho(t_0)} \underbrace{\left[\frac{1}{\rho!} + \frac{t-t_0}{(\rho+1)!} \lambda_1 + \dots + \frac{(t-t_0)^{q-\rho+1}}{(\rho+1)!} \lambda_{q-\rho-1} \right]}_{\text{converge vers } \frac{1}{\rho!} \text{ donc positif pour } t \text{ assez proche de } t_0} + \boxed{\frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{T}_q(t_0)} + (t-t_0)^q \vec{\epsilon} \end{aligned}$$

On en déduit les quatre cas ci-dessous suivant la parité de ρ et q , en analysant le signe des termes encadrés.

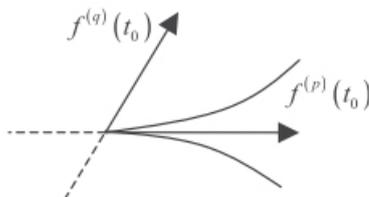
- ▷ ρ impair, q pair : C est d'un seul côté de la tangente, celui indiqué par le sens de \vec{T}_q , et elle traverse \vec{T}_q (pas de changement de signe pour \vec{T}_q mais changement de signe pour \vec{T}_ρ). On a un *point ordinaire*.



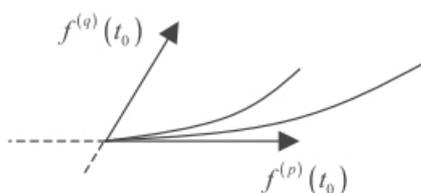
- ▷ ρ impair, q impair : C traverse sa tangente \vec{T}_ρ et le vecteur \vec{T}_q (changement de signe pour les deux). On a un *point d'inflexion*.



- ▷ ρ pair, q impair : C traverse aussi sa tangente \vec{T}_ρ mais pas le vecteur \vec{T}_q (pas de changement de signe pour \vec{T}_ρ mais changement de signe pour \vec{T}_q). On a un *point de rebroussement de 1ère espèce*.



- ▷ ρ pair, q pair : C reste du même côté de sa tangente, celui indiqué par le sens de \vec{T}_q , et aussi du même côté par rapport à \vec{T}_ρ (pas de changement de signe pour les deux). On a un *point de rebroussement de 2ème espèce*.



Remarque – 1.7 Il est inutile d'apprendre cela par coeur. Il suffit de retenir que *localement* (i.e. pour t assez proche de t_0), les signes des composantes de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le repère $(\vec{T}_\rho(t_0), \vec{T}_q(t_0))$ sont exactement ceux de $(t-t_0)^\rho$ et $(t-t_0)^q$. Et normalement vous savez dire si ces deux polynômes changent de signe en t_0 en fonction de la parité de ρ, q .

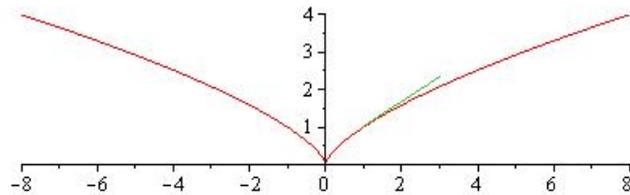
Exemple – 1.14 Dans le cas de la courbe

$$C \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

au point singulier $O(0, 0)$, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = t^2 \overrightarrow{T}_2 + t^3 \overrightarrow{T}_3,$$

avec $T_2(0,1)$ non nul et non colinéaire à $T_3(1,0)$. Ainsi, $p = 2$ pair et $q = 3$ impair : O est un point de rebroussement de 1ère espèce.



2 Courbes Polaires

Jusque maintenant les points de \mathbf{R}^2 étaient repérés par les coordonnées cartésiennes. Mais vous savez également que l'on peut adopter un autre système de coordonnées, déterminé par un angle et un rayon, que l'on appelle *coordonnées polaires*.

§ 2.1. Etude de la courbe

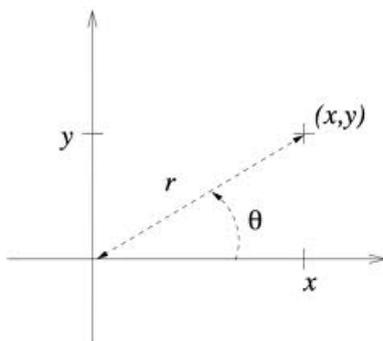
Définition 2.1 On appelle *équation polaire* tout ensemble de points noté $\rho = f(\theta)$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, i.e. l'ensemble

$$\{(f(\theta), \theta), \rho \in \mathbf{R}, \theta \in I\}$$

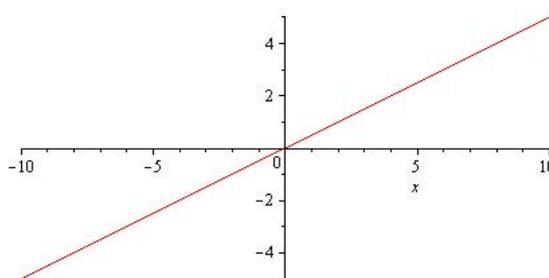
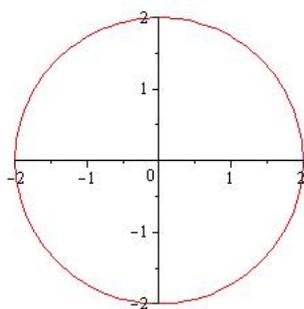
les points étant repérés en coordonnées polaires, ou tout ensemble du type $\theta = c$ i.e. $\{(\rho, c), \rho \in \mathbf{R}\}$.

Remarque – 2.1 Habituellement les coordonnées polaires $M = (\rho, \theta)$ d'un point de \mathbf{R}^2 vivent dans $\mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi[$. Ici

$\rho = \overline{OM}$ désigne la *longueur algébrique* orientée par \vec{i} (c'est-à-dire possiblement négative) de \overline{OM} et $\theta = \widehat{(\vec{i}, \overline{OM})}$ sont interprétées comme les *coordonnées polaires* de M au sens large : ici on ne demande pas que $\rho \geq 0$ ni que $\theta \in [0; 2\pi[$. Si M est situé dans le demi-plan de droite, alors le rayon sera positif. Négatif dans l'autre cas. On pourrait donc considérer comme abusive l'appellation « courbe polaire », mais dans tous les cas la définition précédente reste bien posée.



Exemple – 2.1 L'équation $\rho = c$ pour une constante $c \in \mathbf{R}$ est celle du cercle $C(O, |c|)$. L'équation $\theta = c$ avec $c \in \mathbf{R}$ est celle de la droite passant par O et faisant un angle c avec l'axe des abscisses.



Remarque – 2.2 On a les relations $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ et $\rho^2 = x^2 + y^2$ avec (x, y) les *coordonnées cartésiennes* de \overline{OM} . On peut donc si besoin se ramener à sa version cartésienne (étudiée jusqu'ici) et faire l'étude en coordonnées cartésiennes, mais ce n'est pas le but ici.

Etude d'une courbe polaire :

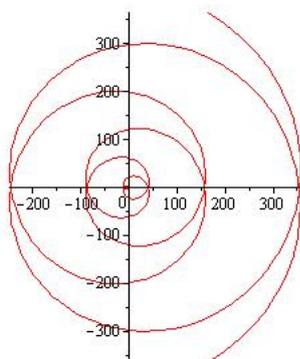
1. *Ensemble de définition* : c'est par définition celui de \mathcal{D}_f .

Exemple – 2.2 Pour $\rho = \frac{\sin(3\theta)}{1 - \cos(3\theta)}$, on calcule :

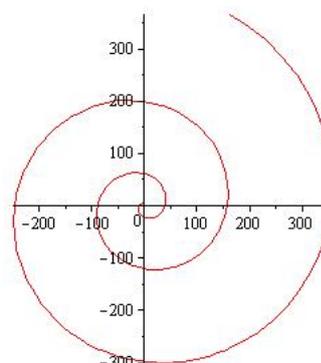
$$1 - \cos(3\theta) \neq 0 \Leftrightarrow 3\theta \neq 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \neq \frac{2k\pi}{3}. \mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

2. *Parité*. Si f est *paire*, on a l'égalité $\overline{OM}(\theta) = \overline{OM}(-\theta)$. On passe de l'un à l'autre par symétrie par rapport à (Ox) .

Exemple – 2.3 pour $C : \rho = \theta^2$, on a :

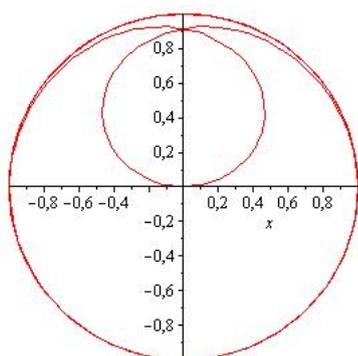


qui se déduit de

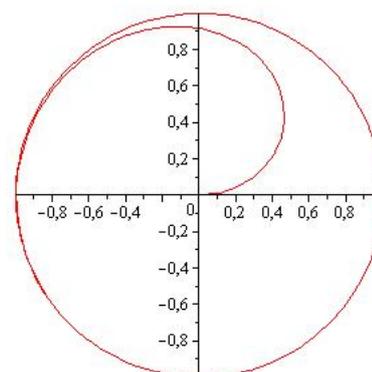


Si f est *impaire*, on a $\overline{OM}(-\theta) = -\overline{OM}(\theta)$. On passe de l'un à l'autre par symétrie par rapport à (Oy) .

Exemple – 2.4 Pour $C : \rho = \text{th}(\theta)$, on a :



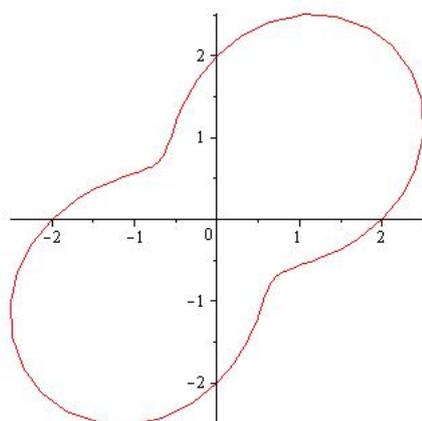
qui se déduit de



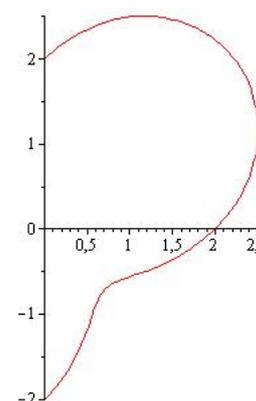
Dans les deux cas, on réduit le *domaine d'étude* à $\mathcal{D}_e = \mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$.

3. *Périodicité*. Si f est T -*périodique*, on restreint l'étude à $\mathcal{D}_f \cap [\alpha, \alpha + T[$ pour un certain α , puis on en déduit le reste de la courbe par des rotations successives d'angle $T, 2T, \text{etc...}$

Exemple – 2.5 Pour $C : \rho = \sin(2\theta) + 2$ qui est π -périodique, on a :



qui se déduit de



Cas particuliers : si $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, on obtient directement toute la courbe sans faire de rotation en travaillant sur un intervalle de longueur T . Si $T = \pi$, la rotation d'angle π est la *symétrie centrale* de centre O .

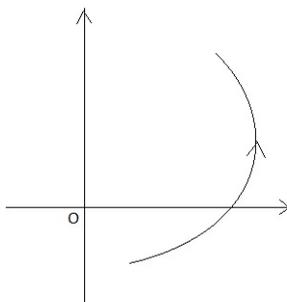
Ainsi on a réduit \mathcal{D}_f à \mathcal{D}_e .

4. *Tableau de variations*. On étudie les variations de f en général en étudiant le signe de f' là où f est dérivable.

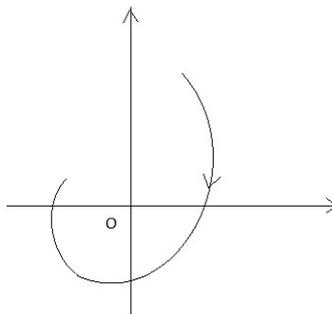
θ	\mathcal{D}_e
$f'(\theta)$	signe
$\rho = f(\theta)$	variations

Interprétation des variations :

— si ρ est croissante et positive ou si ρ est décroissante négative, alors M s'éloigne de O en spiralant dans le sens trigonométrique



— Si ρ est croissante et négative ou si ρ est décroissante et positive, alors on a un spiralement vers O dans le sens trigonométrique



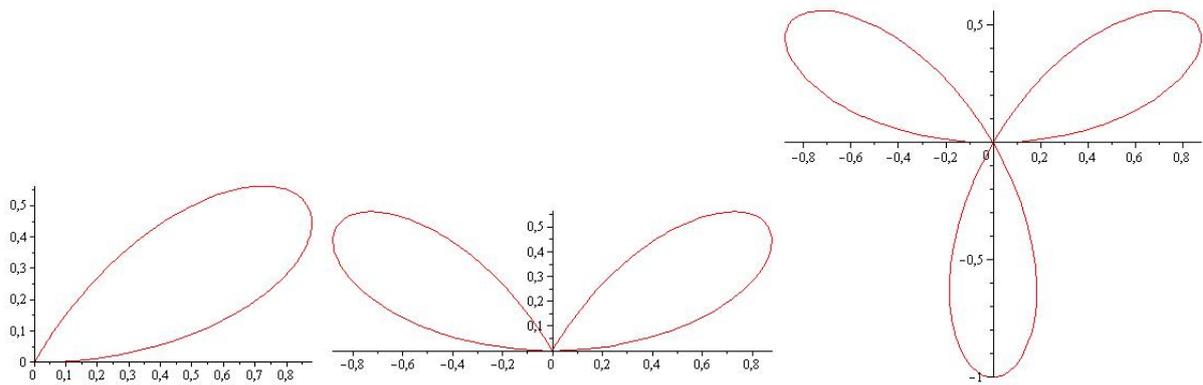
5. *Représentation graphique*.

Exemple – 2.6 On considère la courbe polaire C d'équation $\rho = \sin(3\theta)$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$. De plus, f est $\frac{2\pi}{3}$ -

périodique. On se restreint à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. De plus, f est impaire, donc on restreint l'étude à $\mathcal{D}_e = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Puisque f est dérivable sur \mathbf{R} et donc sur \mathcal{D}_e avec $f'(\theta) = 3 \cos(3\theta)$, on obtient :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$
$3 \cos(3\theta)$	3	+	0
$f(\theta)$	0	\nearrow	1
			\searrow
			0



§ 2.2. Etude locale et branches infinies

Dans toute cette sous-partie nous nous ramènerons la plupart du temps au système de coordonnées cartésiennes, afin de calculer notamment un vecteur tangent, les branches infinies, etc...

2.2.1 Etude locale

Soit $C : \rho = f(\theta)$ une courbe et $M_0(\rho_0 = f(\theta_0), \theta_0)$ un de ses points. Un point $M(\theta)$ de la courbe est repéré par $(f(\theta), \theta)$ en coordonnées polaires, et par $(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$ en coordonnées cartésiennes. Autrement dit, une représentation paramétrée en coordonnées cartésiennes de C est donnée par :

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = f(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Le « paramètre t » est donc ici l'angle θ . Un vecteur tangent \vec{T}_{θ_0} est donc

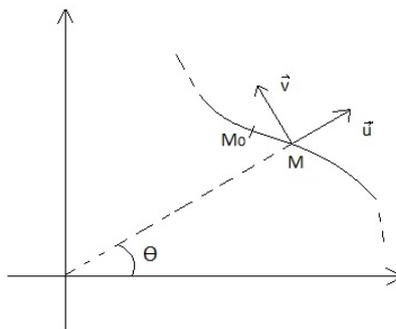
$$(f'(\theta_0) \cos \theta_0 - f(\theta_0) \sin \theta_0, f'(\theta_0) \sin \theta_0 + f(\theta_0) \cos \theta_0) = f'(\theta_0) \vec{u}_{\theta_0} + f(\theta_0) \vec{v}_{\theta_0}.$$

où, pour tout θ , on note

$$\vec{u}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(\vec{u}_{\theta}, \vec{v}_{\theta}) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1$, le repère $(\vec{u}_{\theta}, \vec{v}_{\theta})$ est orthonormé direct. Résumons tout ceci dans une proposition :

Proposition – 2.1 (Base Mobile) La famille $(\vec{u}_{\theta}, \vec{v}_{\theta})$ forme pour tout θ une base orthonormée directe de \mathbf{R}^2 appelée repère mobile en θ .



Dans ce repère,

$$\triangleright \overrightarrow{OM(\theta)} = f(\theta) \vec{u}_{\theta},$$

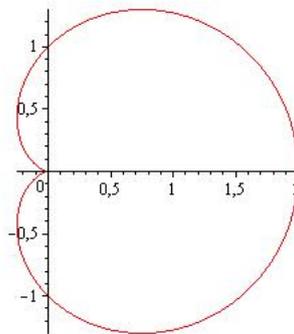
▷ un vecteur tangent \vec{T}_θ (s'il est non nul) a pour coordonnées $(f'(\theta), f(\theta))$, i.e.

$$\vec{T}_\theta = f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta.$$

Proposition – 2.2 (Point singulier) On suppose f dérivable en θ_0 .

- ▷ Si $f'(\theta_0) \neq 0$ et $f(\theta_0) = 0$, on est au point O et le vecteur tangent fait un angle θ_0 avec l'axe des abscisses : $\vec{T} = f'(\theta_0)\vec{u}(\theta_0)$.
- ▷ Si $f'(\theta) = 0$ et $f(\theta) = 0$, on est en O et on dit que l'origine O est un point singulier de C . On a deux sous-cas :
 - si $\rho = f(\theta)$ ne change pas de signe en θ_0 , alors O est un point de rebroussement de 1ère espèce.
 - si ρ change de signe en θ_0 , alors O est un point ordinaire.

Exemple – 2.7 La cardioïde $C : \rho = 1 + \cos \theta$ admet un point de rebroussement de 1ère espèce en O pour l'angle π .



2.2.2 Branches infinies

Rappelons qu'une branche infinie a lieu lorsque l'une des deux coordonnées au moins converge vers une limite infinie en un certain point. Dans le cas polaire, les coordonnées vérifient :

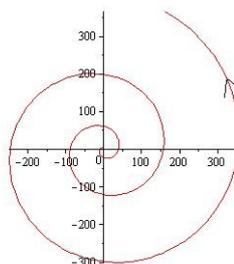
$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = f(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbf{R},$$

avec f une certaine fonction. Comme les fonctions sin et cos sont bornées, les branches infinies ne peuvent avoir lieu que lorsque $\theta \rightarrow \infty$, ou bien $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ pour un certain $\theta_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

Cas où $\theta_0 = \infty$. On a donc trois sous-cas :

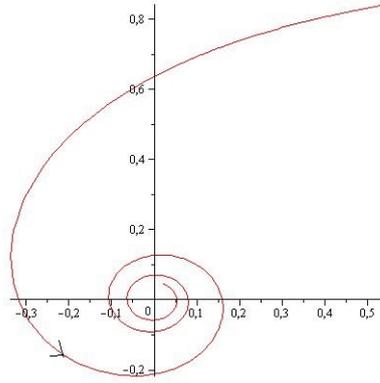
- ▷ Si $\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = \infty$, C décrit une spirale tendant vers l'infini.

Exemple – 2.8 $C : \rho = \theta^2$



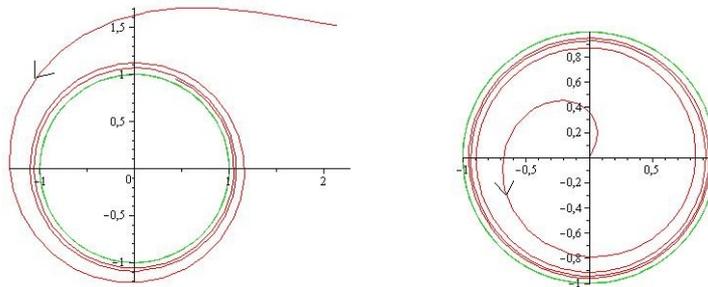
- ▷ Si $\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = 0$, C décrit une spirale tendant vers O .

Exemple – 2.9 $C : \rho = \frac{1}{\theta}$



▷ Si $\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = a \neq 0$, C décrit une spirale tendant vers le cercle de centre O et de rayon $|a|$ depuis l'intérieur ou l'extérieur.

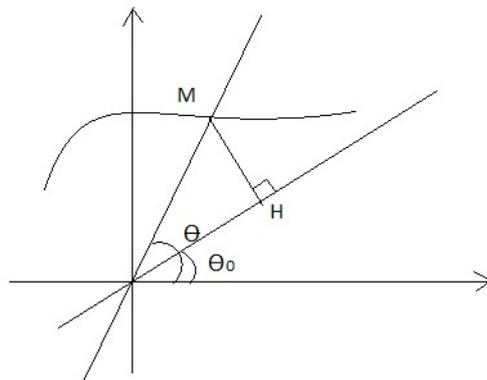
Exemple – 2.10 $C_1 : \rho = 1 + \frac{1}{\theta}$ et $C_2 : \rho = 1 - \frac{1}{\theta}$



Cas où $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = \infty$. On considère $H(\theta)$ projeté orthogonal de $M(\theta)$ sur la droite (O, \vec{u}_{θ_0}) , $\theta = \theta_0$ étant la direction où il y a éventuellement une branche infinie. On étudie ensuite la limite de la longueur séparant M à H lorsque $\theta \rightarrow \theta_0$.

On a

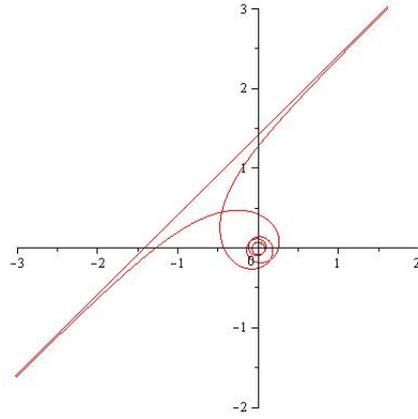
$$\overline{HM}(\theta) = \overline{OM}(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = f(\theta) \sin(\theta - \theta_0).$$



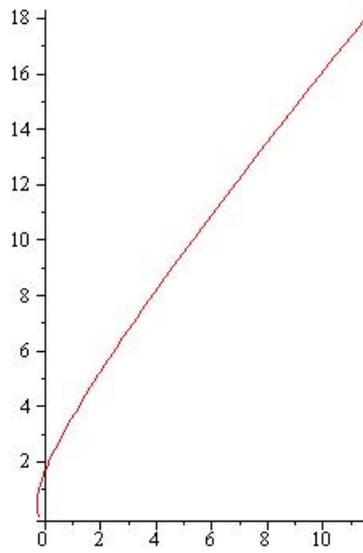
On a alors deux sous-cas :

- ▷ Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \overline{HM} = \infty$, alors on dit que C admet une *branche parabolique* d'axe (O, \vec{u}_0)
- ▷ Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \overline{HM} = l$, alors on dit que C admet une *asymptote* parallèle à la droite (O, \vec{u}_0) et située à une distance $|l|$ de O , en dessous ou au-dessus de O suivant le signe de l .

Exemple – 2.11 Pour $C : \rho = \frac{1}{\theta - \pi/4}$, on calcule $\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(\theta - \pi/4)}{\theta - \pi/4} = 1$



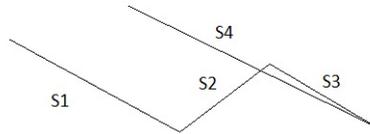
Pour $C : \rho = \frac{1}{(\theta - \pi/4)^2}$, on calcule $\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(\theta - \pi/4)}{(\theta - \pi/4)^2} = \frac{\infty}{-}$



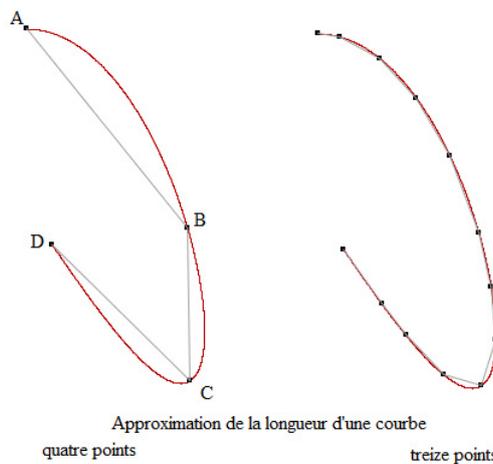
3 Étude métrique des courbes

§ 3.1. Longueur d'un arc paramétré.

Comment mesurer la *longueur* d'une courbe en général ? Nous savons mesurer un segment, plus généralement une ligne polygonale : on mesure sa longueur en faisant la somme des segments qui le composent !



La notion de longueur d'un arc de courbe est basée aussi sur celle de longueur d'un segment. Si la courbe est « arrondie », on approche celle-ci par une courbe polygonale avec des subdivisions de plus en plus fines (même méthode que pour la notion d'intégrale classique).



Pour des subdivisions de plus en plus petites, on a

$$\begin{aligned}
 M_i M_{i+1} &= \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} \\
 &= \sqrt{[x'(u_i)(t_{i+1} - t_i)]^2 + [y'(v_i)(t_{i+1} - t_i)]^2} \quad \text{avec } u_i, v_i \in [t_i; t_{i+1}] \\
 &= \sqrt{x'(u_i)^2 + y'(u_i)^2} (t_{i+1} - t_i)
 \end{aligned}$$

Cela nous conduit à la formule suivante pour la longueur d'un arc de courbe en utilisant la définition de l'intégrale (qui s'approche par des sommes de Riemann) :

Définition 3.1 On considère un arc de courbe paramétrée

$$C \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}, t \in [a, b],$$

avec x et y continûment dérivables (i.e. de classe C^1) sur $[a, b]$. On rappelle que pour tout $t \in [a, b]$, le vecteur tangent est $\vec{T}_t = (x'(t), y'(t))$. La longueur de C est par définition :

$$\begin{aligned}
 \text{Long}(C) &= \int_a^b \|\vec{T}_t\| dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt
 \end{aligned}$$

Remarque – 3.1 — Si $[a, b]$ est un segment, alors la courbe C définie par $x(t) = at + (1-t)b$ et $y(t) = 0$ pour $t \in [0, 1]$ est une courbe paramétrée reliant $(a, 0)$ à $(b, 0)$. Sa longueur est donc par définition :

$$\text{Long}(C) = \int_0^1 |a - b| dt = |a - b|.$$

On retrouve bien la longueur classique d'un segment.

— On rappelle que les courbes paramétrées contiennent toutes les courbes représentatives habituelles : pour $y = f(x)$, on pose $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$. La formule de la longueur devient donc dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{Long}(C) &= \int_a^b \|\vec{T}_t\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \end{aligned}$$

— Dans le cas d'un arc de courbe polaire

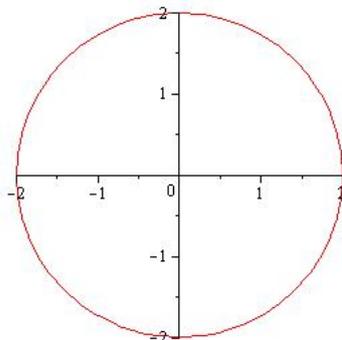
$$\rho = f(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$$

avec f continûment dérivable sur $[\alpha, \beta]$. La longueur de C est :

$$\begin{aligned} \text{Long}(C) &= \int_\alpha^\beta \|\vec{T}_\theta\| d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta \end{aligned}$$

Exemple – 3.1 On considère le cercle de centre O et de rayon R

$$C \begin{cases} x(t) = R \cos(t) \\ y(t) = R \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Sa longueur est :

$$\begin{aligned} \text{Long}(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R dt \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

En coordonnées polaires, on a

$$\rho(\theta) = R \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi]$$

et donc :

$$\begin{aligned} \text{Long}(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R dt \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

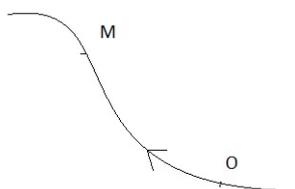
Ouf, les résultats sont cohérents !

⚠ **Attention.** au domaine d'intégration : si on avait fait varier t ou θ sur $[0, 4\pi]$ par exemple, on aurait obtenu pour longueur 4π soit deux fois la longueur du cercle !

§ 3.2. Abscisse curviligne.

Définition 3.2 Etant donnée une courbe C , un point fixé $O(t_0) \in C$. On appelle *abscisse curviligne d'origine O* , la fonction $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in I$ par :

$$s(t) := \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$



Le point O est appelé **l'origine** de l'abscisse curviligne.

L'abscisse curviligne en un point $M \in C$ est donc la longueur de l'arc OM comptée positivement ou négativement suivant la position de M par rapport à O et par rapport à une orientation fixée.

On note parfois $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ l'élément d'abscisse curviligne infinitésimal.

Imaginons que l'on puisse déplier la courbe sans l'étirer de telle sorte que l'on obtienne une droite, $s(t)$ représente alors l'abscisse du point $M(t)$ relativement à l'origine et l'orientation choisie; d'où le terme d'abscisse curviligne, « abscisse sur une courbe ».

Puisque $s' = \|T\|$, vient immédiatement la proposition ci-dessous.

Proposition – 3.1 Si C est une courbe régulière (i.e. ne contient que des points réguliers), alors $s' > 0$. En particulier, la fonction $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection de I dans $s(I)$.

▮ Preuve. La fonction s est dérivable, donc continue, et strictement monotone, donc d'après le théorème de la bijection, le résultat de la proposition s'en suit. ▮

Paramétrisation par l'abscisse curviligne. Considérons une courbe

$$C \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}, t \in I, \quad \text{et} \quad C^s \begin{cases} x(s) = f(s^{-1}(t)) \\ y(s) = g(s^{-1}(t)) \end{cases}, t \in s(I).$$

On dit que C^s est *paramétrée par l'abscisse curviligne*. La propriété de bijection énoncée plus haut prouve que C et C^s décrivent exactement le même ensemble de points de \mathbb{R}^2 , mais a priori pas à la même vitesse comme nous allons de voir.

Proposition – 3.2 Si C est une courbe régulière, tous les vecteurs vitesse de C^s sont de norme un.

▮ Preuve. En effet, si $t \in s(I)$,

$$\begin{aligned} \|(x \circ s^{-1})'(t), (y \circ s^{-1})'(t)\| &= \|(x'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t), y'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t))\| \\ &= \frac{\sqrt{(x'(s^{-1}(t)))^2 + (y'(s^{-1}(t)))^2}}{s' \circ s^{-1}(t)} \\ &= \frac{\sqrt{(x'(s^{-1}(t)))^2 + (y'(s^{-1}(t)))^2}}{\sqrt{(x'(s^{-1}(t)))^2 + (y'(s^{-1}(t)))^2}} = 1, \end{aligned}$$

toutes les quantités ci-dessus sont bien définies puisque la courbe est supposée régulière. ┘

Remarque – 3.2 Il faut bien retenir de cela que, modulo un changement de paramétrage, toute courbe régulière peut être considérée comme étant à vitesse unitaire.

Généralement, par abus de notation, si $t \mapsto (x(t), y(t))$ désigne une courbe paramétrée, la notation $s \mapsto (x(s), y(s))$ est réservée à sa version paramétrisée par l'abscisse curviligne.

§ 3.3. Courbure.

Pour étudier la « courbure d'une courbe », c'est-à-dire sa tendance à ne pas être une droite, on va utiliser la *variation du vecteur tangent unitaire* (on ne tient pas compte de la longueur, ce qui nous intéresse c'est d'évaluer les changements de direction) en fonction d'une abscisse curviligne s fixée.

On a envie que la courbure tienne compte du fait suivant : plus le vecteur change de direction, plus la courbure sera grande.

Qui dit changement de direction pour le vecteur tangent dit étude de sa dérivée. Rappelons également que le repère tournant de Frenet unitaire a été défini dans la définition 1.6.

Notations. Dans la suite, nous noterons :

$\frac{d\vec{T}}{dt}$ pour la dérivée du vecteur tangent, et $\frac{d\vec{T}}{ds} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{s'(t)}$. Les mêmes notations seront utilisées pour le vecteur normal \vec{N} , ainsi que pour leurs versions unitaires $\vec{\mathcal{T}}$ et $\vec{\mathcal{N}}$.

Noter également que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est aussi la dérivée du vecteur tangent à une courbe lorsqu'elle est paramétrée par l'abscisse curviligne, et que dans les fractions ci-dessus la « simplification par dt » au numérateur et au dénominateur n'a aucun sens rigoureux, mais est finalement justifiée au regard de la formule de dérivation d'une composée.

Définition de la courbure. Nous avons vu que $\vec{\mathcal{T}}$ est unitaire, par construction, mais en revanche $\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{ds}$ et $\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{ds}$ n'ont aucune raison de l'être. La variation de sa direction sera appelée courbure.

Définition 3.3 On appelle courbure de C en un point $M_0(s_0)$ régulier, la quantité

$$c_{M_0} := \left\langle \frac{d\vec{\mathcal{T}}(s_0)}{ds}, \vec{\mathcal{N}}(s_0) \right\rangle$$

où

$$\frac{d\vec{\mathcal{T}}(s_0)}{ds} = \frac{\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}(s_0).$$

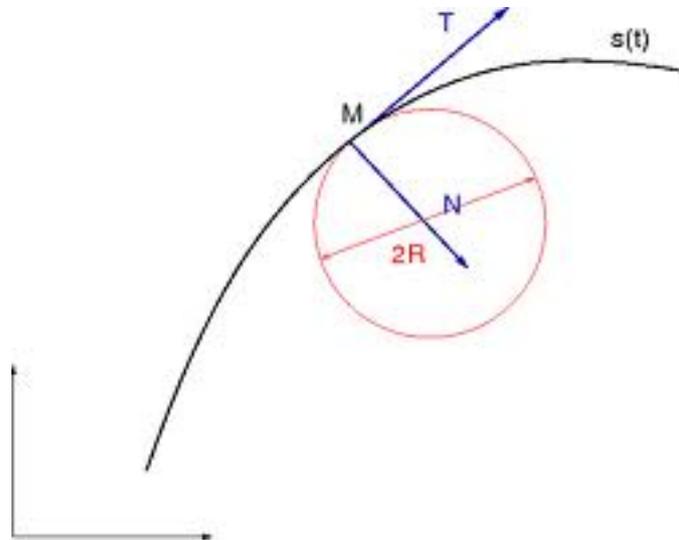
Proposition – 3.3 Le vecteur $\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{ds}$ au point M_0 est un vecteur orthogonal au vecteur tangent, dirigé vers la concavité de la courbe, et de longueur la courbure c_{M_0} .

Ainsi : $\vec{\mathcal{N}}(s) = \frac{1}{c_M} \frac{d\vec{\mathcal{T}}(s)}{ds}$, si M est associé au paramètre s .

▮ Preuve. On sait que $\|\vec{T}(s)\| = 1 = \langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle$ pour tout s . En dérivant cette relation on obtient :
 $\left\langle \frac{d\vec{T}(s)}{ds}, \vec{T}(s) \right\rangle = \frac{d(1)}{ds} = 0$. D'où l'orthogonalité annoncée. Or, \vec{N} est aussi un vecteur orthogonal à \vec{T} , donc les deux sont colinéaires : il existe λ tel que $\vec{N}(s) = \lambda \frac{d\vec{T}(s)}{ds}$. On obtient $\lambda = \frac{1}{c_M}$ en prenant la norme de chaque côté. ▮

Interprétation géométrique de la courbure Si $c \neq 0$, C s'apparente à un arc de cercle.

Soit $M_0 \in C$. La meilleure approximation *locale* de C est obtenue pour un cercle de rayon $R_{M_0} = \frac{1}{c_{M_0}}$ (appelé *rayon de courbure*) et de centre un point Ω situé le long de \vec{N} à une distance $R = R_{M_0}$ (c'est-à-dire sur la normale à C en M_0 , appelé *centre de courbure*). Le cercle $C(\Omega, R)$ est le **cercle osculateur** de C au point M_0 .



Si $c = 0$, M_0 est un **point d'inflexion** pour C : C s'apparente en M_0 à une droite. Il n'y a pas de cercle osculateur en M_0 .

Méthode Pour calculer $\frac{d\vec{T}}{ds}$, on remarque que le vecteur tangent unitaire a pour coordonnées

$$\vec{T} = (a(t); b(t)) = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}; \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$$

et qu'on a :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{ds/dt} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\|\vec{T}\|} (a'(t); b'(t))$$

on en déduit que :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\frac{a'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}; \frac{b'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \text{ avec } (a(t); b(t)) = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}; \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

Après simplification des calculs, on obtient les formules suivantes :

Proposition – 3.4 La courbure et le rayon de courbure sont donnés par :

$$\text{paramétrée } C : (x(t), y(t)) \quad c_M = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} \quad R_M = \frac{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

$$\text{cartésienne } C : y = f(x) \quad c_M = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \quad R_M = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{f''(x)}$$

$$\text{polaire } C : \rho = f(\theta) \quad c_M = \frac{(f(\theta))^2 + 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)}{[(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2]^{3/2}} \quad R_M = \frac{[(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2]^{3/2}}{(f(\theta))^2 + 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)}$$

Exemple – 3.2 Soit la parabole $C \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

On note s l'abscisse curviligne d'origine O et orientée dans le sens des x croissants. Calculons le vecteur normal à C en un point quelconque $M(t, t^2)$.

Pour cela, on commence donc par calculer le vecteur tangent \vec{T} et le vecteur tangent unitaire $\vec{\mathcal{T}}$ pour un paramètre t quelconque :

$$\vec{T}(x'(t), y'(t)) = (1, 2t) \quad \text{de norme } \|\vec{T}\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

donc :

$$\vec{\mathcal{T}} = \frac{1}{\|\vec{T}\|} \vec{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right)$$

Puisque :

$$\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{ds} = \frac{1}{ds/dt} \frac{d\vec{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{1}{\|\vec{T}\|} \frac{d\vec{\mathcal{T}}}{dt}$$

on calcule

$$\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{dt} = \left(\frac{-4t}{(1 + 4t^2)^{3/2}}, \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}} \right)$$

$$\text{et donc } \frac{d\vec{\mathcal{T}}}{ds} = \left(\frac{-4t}{(1 + 4t^2)^2}, \frac{2}{(1 + 4t^2)^2} \right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \left(\frac{-2t}{(1 + 4t^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \right), \\ c_M &= \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}, \quad R_M = \frac{(1 + 4t^2)^{3/2}}{2}, \\ \Omega &= (t, t^2) + R_M \vec{N} \\ &= \left(t - t(1 + 4t^2), t^2 + \frac{1 + 4t^2}{2} \right) \\ &= \left(-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2 \right) \end{aligned}$$

Remarque – 3.3 On ne demande pas de connaître par coeur l'ensemble de ces formules, mais surtout de bien comprendre la signification géométrique de la notion de courbure *i.e.* les variations de direction du vecteur tangent unitaire.