MASTER 1 - Modélisation Statistique et Stochastique - Bordeaux **2016/17**
Probabilités et Statistique

INTERROGATION 4 : Vendredi 07/10/2016

Notations : On suppose fixé un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
On note usuellement v.a.r. pour variable aléatoire.

Exercice 1 : Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. qui sont toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et intégrables.

1) Quel lien a-t-on entre les asssertions **(a)** et **(b)** suivantes ?

- **(a)** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.
- **(b)** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^1 vers X.

2) **Démontrer** le résultat du **1)**.

Exercice 2 : Soit $\alpha > 0$ un réel. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que, pour

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

(a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers 1 *ssi* $\alpha > 1$.

(b) A quelle condition sur $\alpha > 0$, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 1 dans L^2 ? Justifier.

Exercice 3 : Enoncer la Loi Forte des Grands Nombres pour une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Exercice 4 : On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telles que :

$$\text{pour tout entier } n, \qquad X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) \qquad \text{avec } m_n = e^{-n} \text{ et } \sigma_n^2 = \frac{4n}{n+1}.$$

Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X dont on identifiera la loi.