# INTERROGATION # 3 – LE 21/09/2016, 30 MINUTES

## PREMIÈRE PARTIE : PROBABILITÉS

**EXERCICE 1 (COURS)**

**1 )** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On note $L^2(\Omega)$ l'espace des variables aléatoires réelles sur $\Omega$ de carré intégrable.

**a.** Rappeler la définition de **Cov** : $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbf{R}$. Vous justifierez aussi la convergence des espérances.

**b.** Démontrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique sur $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.

**c.** Soient $X_1, \ldots, X_N$, $N$ variables aléatoires dans $L^2(\Omega)$. Rappeler et démontrer une formule pour $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$, préciser le cas où les $X_i$ sont indépendantes deux à deux.

**2 )** Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variable aléatoires et $X$ une autre variable aléatoire.
Écrire proprement la définition de convergence presque-sûre de $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $X$.

**EXERCICE 2 (LOI BETA DE DEUXIÈME ESPÈCE)**

On rappelle qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi gamma notée $\mathscr{G}(a,\lambda)$ de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, si $X$ a pour densité

$$f_{a,\lambda}(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda t} t^{a-1} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(t),$$

où $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ pour tout $a > 0$. Supposons que $X \sim \mathscr{G}(a,\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{G}(b,\lambda)$ avec $b > 0$ et $X$ indépendante de $Y$.

**1 )** Donner la densité $f_{(X,Y)}$ du couple $(X,Y)$.

**2 )** Justifier que $\frac{X}{Y}$ est bien définie presque-sûrement. En déduire la densité du vecteur aléatoire $\left(\frac{X}{Y}, Y\right)$, puis de $\frac{X}{Y}$.

On dit que $\frac{X}{Y}$ suit une *loi beta de deuxième espèce, de paramètres* $a$ *et* $b$.

**3 )** Est-ce que $\frac{X}{Y}$ admet une espérance ? Une variance ?

►CORRECTION.

**1 )** Par indépendance, on a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda(x+y)} x^{a-1} y^{b-1} \mathbb{1}_{]0,\infty[^2}(x,y).$$

**2 )** Le support de $Y$ est $]0,\infty[$, donc $Y > 0$ $\;ps$, et $\frac{X}{Y}$ est bien définie presque-sûrement.

On utilise la méthode des fonctions tests : soit $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mesurable bornée. Notons $(u,v) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$. Alors l'application $\phi : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, y\right)$ réalise une bijection de $(\mathbf{R}^{+*})^2$ dans $(\mathbf{R}^{+*})^2$. la fonction inverse est donnée par $\phi^{-1}(u,v) = (uv, v)$.
Le Jacobien de $\phi^{-1}$ en un point $(u,v)$ est $v$. Donc par la formule de changement de variable on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\Phi\left(\frac{X}{Y}, Y\right)\right) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \iint_{]0,\infty[^2} \Phi\left(\frac{x}{y}, y\right) e^{-\lambda(x+y)} x^{a-1} y^{b-1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \iint_{]0,\infty[^2} \Phi(u,v)\, e^{-\lambda(uv+v)} (uv)^{a-1} v^b\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

La densité de $\left(\frac{X}{Y}, Y\right)$ est donc

$$(u,v) \longmapsto \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda(uv+v)} (uv)^{a-1} v^b \mathbb{1}_{]0,\infty[^2}(u,v).$$

Pour avoir la densité de $\frac{X}{Y}$, on intègre en $v$ :

$$f_{X/Y}(u) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \int_0^\infty v^{a+b-1} e^{-\lambda v(u+1)} \, \mathrm{d}v.$$

Via un changement de variable à $u$ fixé, on se ramène à une fonction Gamma : on pose $v' = \lambda v(u+1)$, on a alors

$$f_{X/Y}(u) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \frac{1}{\lambda^{a+b-1}(u+1)^{a+b-1}} \frac{1}{\lambda(u+1)} \int_0^\infty (v')^{a+b-1} e^{-v'} \, \mathrm{d}v'.$$

Donc

$$f_{X/Y}(u) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{u^{a-1}}{(u+1)^{a+b}} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(u).$$

Le premier terme du produit est égal à $B(a,b)$ comme on l'a vu en TD.

**3 )** Pour l'espérance, on calcule : $\mathbf{E}(X/Y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{u^a}{(u+1)^{a+b}} \, \mathrm{d}u.$

En 0, l'intégrande est continue et vaut 0. Au voisinage de $+\infty$, le terme dans l'intégral est équivalent à $\frac{1}{u^b}$. L'espérance existe donc uniquement si $b > 1$ d'après le critère de Riemann pour les intégrales de fonctions positives.

Pour la variance, même chose mais on trouve un équivalent en $\frac{1}{u^{b-1}}$, le critère de Riemann impose donc $b > 2$ pour avoir une variance.