INTERROGATION # 2 – LE 15/09/2016, 30 MINUTES

PREMIÈRE PARTIE : PROBABILITÉS

EXERCICE 1 (COURS)

Soit X une variable aléatoire sur un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$.

1) Définir la fonction de répartition notée F_X de X.

2) Préciser les limites aux bornes (en $\pm\infty$). Exprimer $\mathbf{P}(X = x)$ en fonction F_X.

3) Soit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On rappelle que la densité de X est $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbf{R}^{+*}}(x)$. Démontrer la propriété d'absence de mémoire : pour tous $s, t > 0$,

$$\mathbf{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbf{P}(X > t).$$

EXERCICE 2

On considère une urne avec b boules blanches et r boules rouges. Une boule étant tirée, on la remet dans l'urne ainsi que c boules de la même couleur. On pose $p = \dfrac{b}{b+r}$, $q = 1 - p$, $\gamma = \dfrac{c}{b+r}$. On note

$$X_n = \mathbb{1}_{\{n\text{–ième boule tirée est blanche}\}}, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

1) Trouver les lois de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2) Énoncer le théorème du transfert pour un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, Y_2)$ discret, et une fonction $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.
En déduire $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$. Si on utilise le théorème ci-dessus on précisera notamment Y_1, Y_2 et la fonction h choisies.

3) Trouver la loi conditionnelle de X_n sachant l'évènement $\{S_{n-1} = k\}$ si $0 \leqslant k \leqslant n-1$. *I.e.* calculer les $\mathbf{P}(X_n \in A \mid S_{n-1} = k)$ avec des ensembles A bien choisis.

4) Exprimer la loi de X_n en fonction de p, q, γ et $\mathbf{E}(S_{n-1})$. En déduire la loi de X_n.

▶CORRECTION.

1) La loi de X_1 est une $\mathscr{B}(p)$, p étant la proportion de boules blanches. Pour X_2, on conditionne suivant ce qui s'est passé au temps 1. Soit $k \in \{0, 1\}$,

$$\mathbf{P}(X_2 = k) = \mathbf{P}(X_2 = k \mid X_1 = 0)\mathbf{P}(X_1 = 0) + \mathbf{P}(X_2 = k \mid X_1 = 1)\mathbf{P}(X_1 = 1).$$

Si $k = 1$, en tenant compte de l'ajout de c boules de la couleur tirée on obtient :

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{b}{c+b+r} q + \frac{c+b}{c+b+r} p = \frac{b+cp}{c+b+r} = p,$$

et pour $k = 0$,

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = \frac{c+r}{c+b+r} q + \frac{r}{c+b+r} p = \frac{b+cp}{c+b+r} = 1 - p,$$

après simplifications. X_2 suit donc encore une $\mathscr{B}(p)$.

2)

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}(X_1 X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2) = \mathbf{E}(X_1 X_2) - p^2.$$

Or,

$$\mathbf{E}(X_1 X_2) = \sum_{k_1, k_2} k_1 k_2 \mathbf{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = p\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = p\frac{c+b}{c+b+r} = p\frac{\gamma + p}{\gamma + 1}.$$

3) X_n est à valeurs dans $\{0, 1\}$ également. On demande de calculer pour $l \in \{0, 1\}$

$$\mathbf{P}(X_n = l \mid S_{n-1} = k) = \frac{\mathbf{P}(X_n = l, S_{n-1} = k)}{\mathbf{P}(S_{n-1} = k)}.$$

$\{S_{n-1} = k\}$ signifie simplement que l'on a tiré k boules blanches avant le temps $n-1$. On a donc dans l'urne : $b + ck$ boules blanches et $r + (n-1-k)c$ boules rouges et $b + r + (n-1)c$ boules au total. On en déduit alors

$$\mathbf{P}(X_n = 1 \mid S_{n-1} = k) = \frac{b+ck}{b+r+(n-1)c}, \quad \mathbf{P}(X_n = 1 \mid S_{n-1} = k) = \frac{r+(n-1-k)c}{b+r+(n-1)c}.$$

On a déterminé la loi conditionnelle.

4) Alors

$$\mathbf{P}(X_n=1)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(X_n=1\mid S_{n-1}=k)\mathbf{P}(S_{n-1}=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b+ck}{b+r+(n-1)c}\mathbf{P}(S_{n-1}=k)=\frac{b}{b+r+(n-1)c}+\frac{c}{b+r+(n-1)c}\mathbf{E}\left(S_{n-1}\right).$$

Et d'autre part

$$\mathbf{P}(X_n=0)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(X_n=0\mid S_{n-1}=k)\mathbf{P}(S_{n-1}=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b+(n-1-k)c}{b+r+(n-1)c}\mathbf{P}(S_{n-1}=k)=\frac{b+(n-1)c}{b+r+(n-1)c}-\frac{c}{b+r+(n-1)c}\mathbf{E}\left(S_{n-1}\right).$$

Montrons par récurrence que $\ll X_n$ suit une Bernouilli de paramètre $p \gg$.
Pour $n=1$ et $n=2$ c'est déjà démontré. Au passage on a $\mathbf{E}\left(S_1\right)=p$ et $\mathbf{E}\left(S_2\right)=2p$.
Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Alors

$$\mathbf{P}(X_n=1)=\frac{b}{b+r+(n-1)c}+\frac{c}{b+r+(n-1)c}\mathbf{E}\left(S_{n-1}\right)=\frac{b}{b+r+(n-1)c}+\frac{c(n-1)p}{b+r+(n-1)c}=\frac{p+\gamma p(n-1)}{1+(n-1)\gamma}=p,$$

en divisant par $b+r$. Par conséquent la proposition est démontrée par récurrence.