INTERROGATION # 1 – LE 08/09/2016, 30 MINUTES

PREMIÈRE PARTIE : PROBABILITÉS

EXERCICE 1 (COURS)

1) Définir la notion d'espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Comment sont appelés les éléments de Ω ? Ceux de $\mathscr{A}$?

2) Modéliser l'expérience aléatoire, avec un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, du jeu du pile ou face avec deux lancers successifs d'une pièce truquée. On supposera que la probabilité de faire pile est p avec $p \in [0,1] \setminus \{1/2\}$.

►CORRECTION.
Les issues possibles sont les suivantes : $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$. On munit Ω de la tribu des parties $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ correspondant à l'expérience aléatoire est définie par :

$$\mathbf{P}(FF) = (1-p)^2, \quad \mathbf{P}(PP) = p^2, \quad \mathbf{P}(FP) = p(1-p), \quad \mathbf{P}(PF) = (1-p)p.$$

On vérifie que la somme vaut bien 1.

EXERCICE 2

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A, B deux évènements. On veut établir que

$$|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

On définit $x = \mathbf{P}(A \cap B), y = \mathbf{P}(A \cap B^c), z = \mathbf{P}(A^c \cap B), t = \mathbf{P}(A^c \cap B^c)$.

1) Justifier que x, y, z, t sont bien définis. Calculer ensuite $x + y + z + t$.

2) Vérifier l'égalité

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = yz - xt.$$

3) Conclure. ♣ INDICATION – on pourra constater que $\frac{1}{4} = \max_{x \in [0,1]} x(1-x)$.

►CORRECTION.

1) D'après les axiomes sur les tribus (stabilité par passage au complémentaire et intersection dénombrable) les quantités x, y, z, t sont bien définies. En écrivant

$$\Omega = (\Omega \cap A) \uplus (\Omega \cap A^c) = (B \cap A) \uplus (B^c \cap A) \uplus (B \cap A^c) \uplus (B^c \cap A^c),$$

et en passant aux probabilités, on trouve $x + y + z + t = 1$ d'après la formule des probabilités totales.

2) On écrit à nouveau avec la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = (\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B^c))(\mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap A^c)).$$

En développant le terme $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, on trouve

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = x(x + y + z - 1) + yz = -xt + yz,$$

en utilisant la relation de la première question.

3) $|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leqslant yz$. Mais comme $x + y + z + t = 1$, on a $z = 1 - y - t - x \leqslant 1 - y$. Donc

$$|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leqslant y(1-y) \leqslant \frac{1}{4}.$$