DEVOIR SURVEILLÉ – LE 07/11/2016, DURÉE : 2H

PROBABILITÉS & STATISTIQUE

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Tous les objets aléatoires seront définis sur cet espace.

EXERCICE 1

On considère ici une variable aléatoire réelle X qui prend les valeurs 1, 2 et 3. La loi de X est inconnue et dépend d'un paramètre réel $\theta \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$. On la note $\mathbf{P}_\theta$ et on suppose que :

$$\mathbf{P}_\theta[X=1] = 2\theta \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}_\theta[X=3] = \theta.$$

1) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}_\theta[X=2]$.

2) Calculer l'espérance $\mathbf{E}_\theta(X)$ de X.

Dans la suite de l'exercice, on **admet** que la variance de X vaut : $\mathbf{V}_\theta(X) = 3\theta - \theta^2$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On désire estimer le paramètre θ à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. de X.

3) On définit la variable T_n par : $T_n = 2 - \overline{X}_n$.

a. Démontrer que T_n est l'estimateur des moments de θ.

b. Montrer que T_n converge fortement et en moyenne quadratique vers θ.

4) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on définit la variable Y_k par : $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_k \neq 2\}}$ et on pose $T'_n = \dfrac{\overline{Y_n}}{3}$.

a. Donner, sans faire de calcul, les valeurs de l'espérance et de la variance de T'_n.

b. T'_n est-il un estimateur sans biais de θ ? Justifiez.

c. Entre les estimateurs T_n et T'_n, lequel choisissez-vous pour l'estimation de θ ? Justifiez.

►CORRECTION.

1) Comme X prend ses les valeurs 1, 2 et 3 i.e. que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$ on a :

$$\mathbf{P}_\theta[X=1] + \mathbf{P}_\theta[X=2] + \mathbf{P}_\theta[X=3] = 1.$$

Donc : $\mathbf{P}_\theta[X=2] = 1 - \mathbf{P}_\theta[X=1] - \mathbf{P}_\theta[X=3] = 1 - 3\theta$.

2) Notez que, comme X ne prend qu'un nombre fini de valeurs (3 exactement ici), elle admet une espérance (et même des moments de tous ordres) et on a :

$$\mathbf{E}_\theta(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}_\theta[X=x] = 1 \times 2\theta + 2 \times (1-3\theta) + 3 \times \theta$$

d'où : $\mathbf{E}(X) = 2 - \theta$.

3) On définit la variable T_n par : $T_n = 2 - \overline{X}_n$.

a. Montrons que T_n est l'estimateur des moments de θ.
On considère $(x_1, \ldots, x_n) \in \{1,2,3\}^n$ une réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
On cherche à résoudre l'équation (d'inconnue θ) : $\mathbf{E}_\theta(X) = \overline{x}_n$. Or

$$\mathbf{E}_\theta(X) = \overline{x}_n \Longleftrightarrow 2 - \theta = \overline{x}_n \Longleftrightarrow \theta = 2 - \overline{x}_n.$$

Comme l'équation admet une unique solution qui est $\theta = 2 - \overline{x}_n := t_n$ l'estimation de T_n, on en déduit que $T_n = 2 - \overline{X}_n$ est l'estimateur des moments de θ.

b. • Par définition, T_n converge fortement vers θ si on a :

$$\forall \theta \in \Theta = \left]0, \frac{1}{3}\right[, \qquad T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbf{P}_\theta\text{-p.s.}} \theta.$$

Fixons $\theta \in \Theta = \left]0, \frac{1}{3}\right[$. Comme $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon i.i.d. de X et que sous la loi $\mathbf{P}_\theta$, X est intégrable avec $\mathbf{E}_\theta(X) = 2 - \theta$, on en déduit que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d. de même loi $\mathbf{P}_\theta$ qui est intégrable et d'espérance $\mathbf{E}_\theta(X) = 2 - \theta$. Par la Loi Forte des Grands Nombres, on déduit que la suite $(\overline{X}_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement (ici $\mathbf{P}_\theta$-p.s.) vers $2 - \theta$.
On peut d'autre part noter que $T_n = g(\overline{X}_n)$ où l'application g est définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(y) = 2 - y$. Cette application étant continue, on en déduit que la suite $\left(g(\overline{X}_n)\right)_{n \geq 1}$ converge $\mathbf{P}_\theta$-presque sûrement vers $g(2 - \theta) = \theta$.

• On définit pour tout $\theta \in \Theta = \left]0, \frac{1}{3}\right[$, le risque quadratique de T_n pour θ par : $R_\theta(T_n) = \mathbf{E}\left[(T_n - \theta)^2\right]$.
Fixons $\theta \in \Theta$. On peut noter, par linéarité de l'espérance et en utilisant le fait que les X_k ont la même loi que X donc même espérance que :

$$\mathbf{E}_\theta(T_n) = 2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_\theta(X_k) = 2 - \mathbf{E}_\theta(X) = 2 - (2 - \theta) = \theta.$$

Ainsi : $R_\theta(T_n) = \mathbf{V}_\theta(T_n)$.
Mais d'après les propriétés de la variance et le fait que les X_k sont indépendantes, on a :

$$\mathbf{V}_\theta(T_n) = \mathbf{V}_\theta(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_\theta(X_k).$$

Enfin, comme les X_k suivent la même loi que X, elles ont même variance et donc : $\mathbf{V}_\theta(T_n) = \dfrac{\mathbf{V}_\theta(X)}{n}$.
Par suite, on a : $R_\theta(T_n) = \dfrac{\mathbf{V}_\theta(X)}{n} = \dfrac{3\theta - \theta^2}{n}$ avec évidemment $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3\theta - \theta^2}{n} = 0$.

4) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on définit la variable Y_k par : $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_k \neq 2\}}$ et on pose $T'_n = \dfrac{\overline{Y_n}}{3}$.

a. Déterminons les valeurs de l'espérance et de la variance de T'_n. Il y a plusieurs façons de les trouver.

• Par définition, on a : $3n \times T'_n = S_n$ en posant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Mais on voit facilement que les Y_k sont des v.a. de Bernoulli de même paramètre p égal à :

$$p := \mathbf{P}_\theta(Y_k = 1) = \mathbf{P}_\theta(X_k \neq 2) = 1 - \mathbf{P}_\theta(X_k = 2) = 3\theta.$$

De plus, les X_k étant indépendantes, les Y_k le sont aussi donc on en conclut que $S_n \sim \mathscr{B}(n, 3\theta)$ et on a (cf. Cours) :

$$\mathbf{E}_\theta(S_n) = np = n \times 3\theta \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}_\theta(S_n) = np(1-p) = 3n\theta(1 - 3\theta).$$

Comme $T'_n = \dfrac{S_n}{3n}$ en utilisant la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance :

$$\mathbf{E}_\theta(T'_n) = \frac{\mathbf{E}_\theta(S_n)}{3n} = \theta \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}_\theta(T'_n) = \frac{\mathbf{V}_\theta(S_n)}{(3n)^2} = \frac{\theta(1 - 3\theta)}{3n}.$$

• Une autre méthode assez proche pour effectuer ces calculs consiste à ne pas passer par S_n mais à remarquer que les Y_k sont i.i.d. de même loi de Bernoulli de même paramètre $p = \mathbf{P}_\theta(X_k \neq 2) = 3\theta$. Or on sait (cf. Cours) que :

$$\mathbf{E}(Y_k) = p = 3\theta \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}_\theta(Y_k) = p(1-p) = 3\theta(1 - 3\theta).$$

Alors par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}_\theta(T'_n) = \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_\theta(Y_k) = \frac{\mathbf{E}_\theta(Y_1)}{3} = \theta$$

et via l'indépendance des Y_k, on a :

$$\mathbf{V}_\theta(T'_n) = \frac{1}{(3n)^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_\theta(Y_k) = \frac{V_\theta(Y_1)}{9n} = \frac{\theta(1 - 3\theta)}{3n}.$$

b. On vient en particulier de montrer que : pour tout $\theta \in \Theta = \left]0, \frac{1}{3}\right[$, $\mathbf{E}_\theta(T'_n) = \theta$. Ceci signifie que T'_n est un estimateur sans biais de θ.

c. Comparons les estimateurs T_n et T'_n pour l'estimation de θ. Il faut comparer leurs risques quadratiques : ceci équivaut à comparer leurs variances puisque, d'après tout ce qui précède, ce sont deux estimateurs sans biais de θ. Donc si on fixe $\theta \in \Theta = \left]0, \frac{1}{3}\right[$, on a :

$$R_\theta(T_n) - R_\theta(T'_n) = \mathbf{V}_\theta(T_n) - \mathbf{V}_\theta(T'_n) = \frac{3\theta - \theta^2}{n} - \frac{\theta(1 - 3\theta)}{3n} = \frac{8\theta}{3n}.$$

Donc on a : $\forall \theta \in \Theta = \left]0, \frac{1}{3}\right[, \quad R_\theta(T_n) > R_\theta(T'_n)$.
Ceci prouve que l'estimateur T'_n est préférable à T_n pour l'estimation de θ.

Exercice 2 (Autour de la loi de Laplace)

On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}$ suit une *loi de Laplace de paramètres* $\mu \in \mathbf{R}$ *et* $b > 0$, et on note $X \sim \mathscr{L}(\mu, b)$, si X admet la densité suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right).$$

1) Justifier que f_X est une densité, et que $\mathbf{E}(|X|) < \infty$.

2) Dans cette question, on suppose que $\mu = 0$ autrement dit que $X \sim \mathscr{L}(0,b)$ avec $b > 0$.

a. Calculer la fonction de répartition F_X de X. Quelle est la parité de f_X ?

b. Déterminer la loi de la variable $Y = |X|$.

3) On pose $Z = X\mathbb{1}_{X>0}$ avec $X \sim \mathscr{L}(0,b)$ et $b > 0$.

a. Calculer la valeur de $\mathbf{P}(Z = 0)$. La variable aléatoire Z est-elle continue ?

b. Déterminer la fonction caractéristique Φ_Z de Z.

c. Rappeler le lien entre Φ_Z et $\mathbf{E}(Z)$, en précisant notamment l'hypothèse pour avoir la formule.

d. En déduire $\mathbf{E}(Z)$.

►CORRECTION.

1) On vérifie facilement l'intégrabilité de f_X par croissance comparée :

$$x^2 f_X(x) \longrightarrow_{x\to\infty} 0, \quad x^2 f_X(x) \longrightarrow_{x\to-\infty} 0.$$

Par ailleurs, f_X est une fonction continue donc mesurable, et bien sûr positive.

On calcule ensuite l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$: $2b\int_{\mathbf{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\mu} e^{-\frac{\mu-x}{b}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mu}^{+\infty} e^{-\frac{x-\mu}{b}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\mu} e^{\frac{x-\mu}{b}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mu}^{+\infty} e^{\frac{\mu-x}{b}}\,\mathrm{d}x = b+b.$

Donc $\int_{\mathbf{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

La fonction $x \longmapsto |x|\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ toujours par croissance comparée, donc $\mathbf{E}(|X|) < \infty$.

2) **a.** Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$\mathbf{P}(X \leqslant t) = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{|x|}{b}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{t/b} & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-t/b} & \text{si } t > 0. \end{cases}$ La fonction f_X devient paire.

b. La loi de X devient donc symétrique. On a alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$,
$\mathbf{P}(|X| \leqslant t) = \mathbf{P}(0 \leqslant X \leqslant t) + \mathbf{P}(-t \leqslant X \leqslant 0) = \mathbf{P}(0 \leqslant X \leqslant t) + \mathbf{P}(0 \leqslant -X \leqslant t) = 2\mathbf{P}(0 \leqslant X \leqslant t)$. Si $t \in \mathbf{R}^-$, $\mathbf{P}(|X| \leqslant t) = 0$. On en déduit que $|X|$ est une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_{|X|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-t/b} & \text{si } t > 0. \end{cases}.$$

On reconnait une $\mathscr{E}(1/b)$.

3) **a.** $\mathbf{P}(Z = 0) = \mathbf{P}(\{X = 0\} \cup \{X > 0\}) = \mathbf{P}(X \geqslant 0) = \frac{1}{2b}\int_0^{\infty} e^{-x/b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0$, Z a donc un atome en 0 et elle ne peut être continue.

b. Soit $t \in \mathbf{R}$. La loi de Z admet un atome en 0, et ailleurs elle est continue. Autrement dit

$$\mathrm{d}\mathbf{P}_Z = \frac{1}{2}\mathrm{d}\delta_0 + f_X \mathbb{1}_{\mathbf{R}^{+*}}\,\mathrm{d}x.$$

Alors d'après le théorème de transfert

$\Phi_Z(t) = \mathbf{E}\left(e^{itZ}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Z = 0) + \frac{1}{2b}\int_0^{\infty} e^{itx - \frac{x}{b}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}\frac{1}{it - 1/b}\left[e^{itx-\frac{x}{b}}\right]_0^{\infty}$. Or, $\left|e^{itx-\frac{x}{b}}\right| = e^{-x/b}$, donc on obtient

$\Phi_Z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}\frac{1}{1/b - it}$.

c. Comme $\mathbf{E}(|Z|) < \infty$ puisque $|Z| \leqslant |X|$ et $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ d'après **1)**, on a la formule suivante :
$\mathbf{E}(Z) = -i\Phi_Z'(0)$.

d. Et $\mathbf{E}(Z) = \frac{b}{2}$ après calculs.

Rappel : Soit $\lambda > 0$. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Poisson de paramètre* λ notée $\mathscr{P}(\lambda)$ si elle est discrète de support $\mathbf{N}$, et de fonction de masse définie pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On rappelle que $\mathbf{E}(X) = \lambda = \mathbf{V}(X)$.

EXERCICE 3

Soit $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi $\mathscr{P}(\lambda = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1) Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

2) En utilisant un théorème limite, justifier et énoncer la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$.

3) En déduire la valeur de : $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n \leqslant n)$.

►CORRECTION.

1) Par linéarité et indépendance on a $\mathbf{E}(S_n) = n$ et $\mathbf{V}(S_n) = n$.

2) Voir cours : comme les Y_i sont i.i.d et admettent un moment d'ordre 2, on peut appliquer le TCL :

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(S_n)}} = T_n \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1).$$

3) On a d'après le TCL que $\dfrac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(S_n)}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n \leqslant n) = \lim\limits_{n\to\infty} F_{T_n}(0)$ où F_{T_n} désigne la fonction de répartition de T_n. Or, en tout point de continuité on a convergence des fonctions de répartition vers celle de $F_{\mathcal{N}(0,1)}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n \leqslant n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 4 (VECTEURS GAUSSIENS)

Soient $n \geqslant 1$ un entier et $X = (X_1, \dots, X_n)^{\mathbf{T}}$ un vecteur Gaussien à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ de matrice de covariance K_X et d'espérance un vecteur $\mu_X \in \mathbf{R}^n$.

On suppose que la matrice K_X est diagonalisable dans une base orthonormée *i.e.* qu'il existe deux matrices réelles A et D de format $n \times n$ telles que :

$$K_X = A^{\mathbf{T}} D A \qquad \text{et} \qquad AA^{\mathbf{T}} = A^{\mathbf{T}} A = I_n$$

où $A^{\mathbf{T}}$ désigne la matrice transposée de A et D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de K_X que l'on note $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, +\infty[^n$.

1) Rappeler la définition de « X vecteur Gaussien dans $\mathbf{R}^n$ ».

2) Montrer que $Y = A(X - \mu_X)$ est un vecteur aléatoire Gaussien.

3) Déterminer l'espérance μ_Y de Y.

4) On note K_Y la matrice de covariance de Y.

- **a.** Montrer que $K_Y = D$.
- **b.** En déduire que les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

5) On suppose dans cette question que D est inversible autrement dit que : $\lambda_k > 0$ pour tout entier $1 \leq k \leq n$.

- **a.** Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Quelle est la loi de Y_k ?
- **b.** En déduire que Y admet une densité que vous expliciterez.
- **c.** Identifier, en justifiant votre réponse, la loi de la variable aléatoire Z définie par :

$$Z = Y^T D^{-1} Y = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k^2}{\lambda_k}.$$

►CORRECTION.

1) Voir cours.

2) La coordonnée $i \in \{1, \dots, n\}$ de Y est $Y^i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}\left(X^k - \mu^k\right)$. Comme $X - \mu$ est Gaussien si X l'est, toute combinaison linéaire des coordonnées de Y apparait comme une combinaison linéaire de celles de $X - \mu$.
Donc Y est Gaussien.

3) Par linéarité de l'espérance

$$\mu_Y = \mathbf{E}(Y) = A(\mathbf{E}(X) - \mu_X) = A(\mu_X - \mu_X) = 0_{\mathbf{R}^n}.$$

4) **a.** La matrice K_Y est définie par

$$K_Y = \mathbf{E}\left((Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^{\mathbf{T}}\right) = \mathbf{E}\left(YY^{\mathbf{T}}\right) = \mathbf{E}\left(A(X-\mu)(X-\mu)^{\mathbf{T}} A^{\mathbf{T}}\right) = A\mathbf{E}\left((X-\mu)(X-\mu)^{\mathbf{T}}\right)A^{\mathbf{T}} = AK_XA^{\mathbf{T}} = D.$$

b. Ainsi Y est un vecteur Gaussien de matrice de covariance diagonale, les Y^i sont donc indépendantes par une propriété du cours.

5) **a.** Chaque Y^k est une Gaussienne de paramètres 0 et λ_k comme $\mathbf{E}(Y_k) = 0$ et $\mathbf{V}(Y^k) = D_{k,k} = \lambda_k > 0$ si D est inversible.

b. Par indépendance des marginales, la densité du vecteur aléatoire $Y = (Y^1, \dots, Y^k)$ est le produit des densités : pour tout $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{(y^k)^2}{2\lambda_k}\right).$$

c. Comme pour tout $k \in \{1,...,n\}$, $\dfrac{Y_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, et que ces variables aléatoires sont indépendantes, Z est donc une somme de Gaussiennes standards indépendantes.
Autrement dit $Z \sim \chi_2(n)$.

Remarque — Comme $X = A^T Y + \mu_X$ on en déduit facilement que X possède aussi une densité par théorème des fonctions tests :
si $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \mathbf{E}\left(\varphi(A^T Y + \mu_X)\right) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(A^T(y_1,....,y_n) + \mu_X) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

On réalise ensuite le changement de variable affine (il réalise donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$) définie par

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \mu_X \quad \Longleftrightarrow \quad A^T\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} - \mu_X\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Notant $\varphi(y) = A^T y + \mu_X$, on a

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(z) f_Y(\varphi^{-1}(z)) \frac{\mathrm{d}z}{|Jac(\varphi(z)|} = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(z) f_Y(\varphi^{-1}(z))\,\mathrm{d}z.$$

Or A est orthogonale, donc $|\det A| = 1$ et X est donc un vecteur aléatoire à densité donnée par

$$z \in \mathbf{R}^n \longmapsto f_Y\left(A^T(z-\mu)\right).$$