Feuilles de TD

Courbes Paramétrées – Polaires – Étude Métrique

Table des matières

⚠ **Attention.** Certains exercices seront ramassés pendant les séances de TD. Lesdits exercices seront précisés à la fin de chaque TD.

---

1 Courbes Paramétrées

Exercice 1 (Rappels de Géométrie)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 2)$. En déduire une représentation paramétrique d'une droite passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

2) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels non nuls. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

3) Donner une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$.

4) À l'aide du changement de paramètre $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, donner une autre représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon un.

5) Donner une représentation paramétrique du premier quart de cercle de centre $A(4, -3)$ passant par l'origine du repère.

6) Donner une représentation paramétrique du graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}^+$.

7) Donner une représentation paramétrique du graphe d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

8) Soit $(x, y) : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée. On suppose que $I = [0, a]$ avec $a > 0$, et que pour tout $t \in I$: $(x(a-t), y(a-t)) = (-y(t), -x(t))$. On note $M(t) = (x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$.
Donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le point $M(a-t)$ à partir de $M(t)$.

§ 1.1. Réductions de domaine

Exercice 2
Soit la courbe donnée par : (C_1) $\begin{cases} x(t) &= t^4 + t^2 \\ y(t) &= t^6 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

1) Étudier la parité de x et y.

2) En déduire le domaine d'étude et les transformations géométriques à appliquer ensuite pour obtenir tout le graphe de la courbe.

Exercice 3
Soit la courbe donnée par : (C_2) $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{t^2 - 4} \\ y(t) &= \sqrt{t^2 - 4} \end{cases}$.

1) Déterminer D_x, D_y, D les ensembles de définitions de x, y et de la courbe générale.

2) Les courbes x et y sont-elles périodiques ?

3) Étudier la parité de x et y.

4) En déduire le domaine d'étude et les transformations géométriques à appliquer ensuite pour obtenir tout le graphe de la courbe.

Exercice 4
Soit la courbe donnée par : $(C_3)\quad \begin{cases} x(t) &= \cos\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t) &= \tan(2t) \end{cases}.$

1) Déterminer D_x, D_y, D les ensembles de définitions de x, y et de la courbe générale.

2) Les courbes x et y sont-elles périodiques ?

3) Étudier la parité de x et y.

4) En déduire le domaine d'étude et les transformations géométriques à appliquer ensuite pour obtenir tout le graphe de la courbe.

Exercice 5
Soit la courbe donnée par : $(C_4)\quad \begin{cases} x(t) &= \cos\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t) &= \tan(2t) \end{cases}.$

1) Déterminer D_x, D_y, D les ensembles de définitions de x, y et de la courbe générale.

2) Les courbes x et y sont-elles périodiques ?

3) Étudier la parité de x et y.

4) En déduire le domaine d'étude et les transformations géométriques à appliquer ensuite pour obtenir tout le graphe de la courbe.

§ 1.2. Étude des variations & Branches infinies

Exercice 6
L'étude d'une courbe paramétrée $\{x(t), y(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ a donné les tableaux de variations suivants :

t	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		t_4		t_5		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

t	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		t_4		t_5		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Représenter cette courbe

Exercice 7
Soit la courbe donnée par : $(C_5)\quad \begin{cases} x(t) &= 3t^2 \\ y(t) &= 2t^3 \end{cases}.$

1) Réduire le domaine de définition.

2) Étudier les variations.

3) Étudier les branches infinies de C_5.

Exercice 8
Soit la courbe donnée par : (C_6) $\begin{cases} x(t) &= \operatorname{ch} t \\ y(t) &= \operatorname{sh} t \end{cases}$.

1) Réduire le domaine de définition.
2) Étudier les variations.
3) Étudier les branches infinies de C_6.

Exercice 9
Soit la courbe donnée par : (C_7) $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{t-1} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t^2-1} \end{cases}$.

1) Donner le domaine de définition.
2) Étudier les branches infinies éventuelles de C_7.

§ 1.3. Étude locale

Exercice 10
On reprend la courbe (C_5) précédente.

1) Déterminer les points singuliers.
2) Donner la nature du point de paramètre $t = 0$.
3) Donner l'équation de la tangente au point $M(t) = (x(t), y(t))$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 11
Soit la courbe donnée par : (C_8) $\begin{cases} x(t) &= (t-1)^3 + 2 \\ y(t) &= 2(t-1)^4 \end{cases}$.

Étudier les éventuels points singuliers.

Exercice 12
Soit la courbe donnée par : (C_9) $\begin{cases} x(t) &= t^2 e^t \\ y(t) &= \cos(3t) \end{cases}$.

Étudier les éventuels points singuliers.

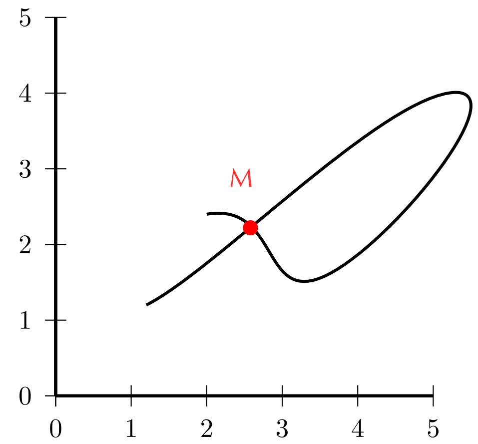
Exercice 13
Soit (C) : $(x, y) : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée où I est un intervalle contenant zero.

1) On suppose que les fonctions x et y admettent les développements limités $1 + t^2 - t^3 + t^5$ et $2 - t^2 + t^3 + 2t^5$ au voisinage de zéro à l'ordre cinq.
Faire l'étude locale en $t = 0$.
2) Tracer la courbe au voisinage dudit point.

§ 1.4. Étude complète

Définition : Soit $(x, y) : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée. On dit que $M(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ est un *point multiple* si l'application $t \longmapsto M(t)$ n'est pas injective, *i.e.*s'il existe $t \neq t'$, $t, t' \in I$ tels que $M(t) = M(t')$.

Graphiquement, cela signifie donc que l'on repasse deux fois en le même point. Par exemple, le point M ci-contre est multiple pour la courbe.



Exercice 14 (Courbe de Lissajous)
Soit la courbe donnée par : $(C_{10})\quad \begin{cases} x(t) &= \sin(2t) \\ y(t) &= \sin(3t) \end{cases}.$

1) Réduire le domaine d'étude.

2) Étudier les variations.

3) Étudier l'existence éventuelle de points singuliers.

4) Étudier l'existence éventuelle de points multiples.

Exercice 15
Soit la courbe donnée par : $(C_{11})\quad \begin{cases} x(t) &= 3\cos(t) + 2\cos(3t) \\ y(t) &= 3\sin(t) - 2\sin(3t) \end{cases}.$

1) Réduire le domaine d'étude.

2) Étudier les variations.

3) Étudier l'existence éventuelle de points singuliers.

4) Tracer la courbe.

2 Courbes en coordonnées polaires

§ 2.1. Réductions de domaine

Exercice 16
Soit la courbe donnée par : $(C_{12})\quad \rho(\theta) = \sin(3\theta)$.

1) Donner le domaine de définition de ρ.

2) Étudier la parité et la périodicité de ρ.

3) En déduire le domaine d'étude et les transformations géométriques à appliquer ensuite pour obtenir tout le graphe de la courbe.

Exercice 17
Soit la courbe donnée par : $(C_{13})\quad \rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$.

1) Donner le domaine de définition de ρ.

2) Étudier la parité et la périodicité de ρ.

3) En déduire le domaine d'étude et les transformations géométriques à appliquer ensuite pour obtenir tout le graphe de la courbe.

Exercice 18
Soit une courbe en coordonnées polaires $\theta \in I \longmapsto \rho(\theta)$, I un intervalle.

1) On suppose que pour tout $\theta \in I$, $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$.
Réduire le domaine d'étude, et donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le reste du graphe.

2) On suppose que pour tout $\theta \in I$, $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$.
Réduire le domaine d'étude, et donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le reste du graphe.

3) On suppose que pour tout $\theta \in I$, $\rho(\pi + \theta) = \rho(\theta)$.
Réduire le domaine d'étude, et donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le reste du graphe.

4) On suppose que pour tout $\theta \in I$, $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$.
Réduire le domaine d'étude, et donner la transformation géométrique permettant d'obtenir le reste du graphe.

§ 2.2. Étude des variations & Branches infinies

Exercice 19

1) Soit la courbe polaire définie par $\rho(\theta) = 1 + \theta - \dfrac{1}{1-\theta}$.

  a. Étudier les éventuelles branches infinies.

  b. Que peut-on dire du point correspondant à $\theta = 0$?

2) Étudier la branche infinie en $\theta = \dfrac{\pi}{2}^+$ de la courbe $\rho(\theta) = \dfrac{\theta}{\cos\theta}$.

3) Étudier la branche infinie en $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ de la courbe $\rho(\theta) = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta - 1}$.

§ 2.3. Étude complète

Exercice 20
Soit une courbe en coordonnées polaires $\theta \in [0, \pi] \longmapsto \rho(\theta)$ telle que ρ soit paire et 2π-périodique. À partir du tableau de valeurs ci-dessous, esquisser un graphe de la courbe.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\rho(\theta)$	2	1.7	1	0.3	0
$\rho'(\theta)$	0	-0.7	-1	-0.7	-0.2

Exercice 21 (Cardioïde)
Soit la courbe donnée par : $(\mathcal{C}_{14}) \quad \rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$.

1) Donner le domaine de définition de ρ et réduire le domaine d'étude.

2) Dresser le tableau de variation de ρ.

3) Déterminer les tangentes en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Exercice 22 (Lemniscate de Bernouilli)
Soit la courbe donnée par : $(\mathcal{C}_{15}) \quad \rho(\theta) = \cos(2\theta)$.

1) Donner le domaine de définition de ρ et réduire le domaine d'étude. On montrera qu'il suffit d'étudier la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, préciser les transformations géométriques permettant de construire toute la courbe.

2) Dresser le tableau de variation de ρ.

3) Calculer $\rho(\theta)$ et $\rho'(\theta)$ pour $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

4) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{15})$.

5) Montrer que l'équation cartésienne de $(\mathcal{C}_{15})$ est donnée par $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

6) Expliciter la représentation paramétrique de ρ. En déduire une représentation paramétrique dont toutes les coordonnées sont rationnelles. ♣ Indication – On pourra effectuer un changement de variable du type $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

3 Étude Métrique

Exercice 23 (Courbe représentative)
Soit $(\mathcal{C}_{16})$ la courbe représentative de la fonction $f : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \ln(\cos x)$.

1) Rappeler la forme paramétrique de $(\mathcal{C}_{16})$.

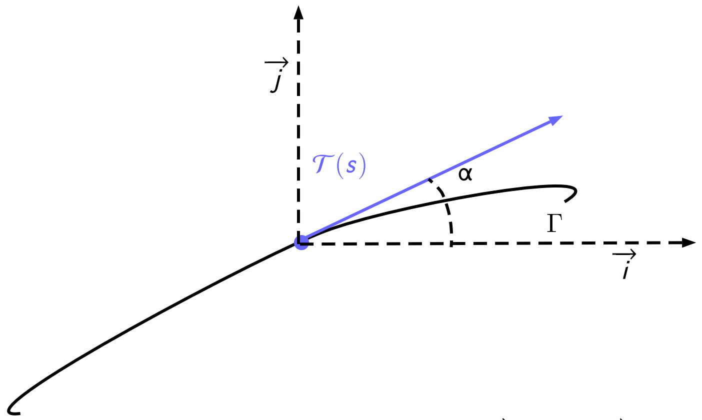
2) Calculer sa longueur.

3) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on note $\mathrm{M}(x)$ le point de la courbe $(\mathcal{C}_{16})$ correspondant au paramètre x.
Expliciter le repère de Frenet normalisé $(\mathrm{M}(x), \overrightarrow{\mathcal{N}}(x), \overrightarrow{\mathcal{T}}(x))$ en x.

4) Déterminer le centre et rayon de courbure en $x = \frac{\pi}{3}$ en utilisant directement les formules du cours.

5) Montrer que la courbure trouvée en **4)** correspond bien à la définition du cours (définition **3.3**).

Exercice 24 (Interprétation Angulaire)
L'objectif de l'exercice est de montrer que la courbure est en fait la dérivée de l'angle α entre le vecteur tangent et le vecteur $\overrightarrow{i}$ du repère.
Soit $\Gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$. On se place dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note s l'abscisse curviligne de la courbe Γ et $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ le vecteur tangent unitaire.



Il existe $\alpha : s(I) \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 tel que $\vec{T} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$, cette propriété est admise.

1) Donner l'expression du paramétrage par abscisse curviligne de Γ.

2) Donner l'expression du vecteur normal unitaire en fonction de α. En déduire une expression de la courbure qui fait intervenir α.

Exercice 25 (En coordonnées cartésiennes)
Soit la courbe donnée par : (C_{17}) $\begin{cases} x(t) &= 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$.

1) Calculer l'abscisse curviligne s de (C_{17}).

2) Calculer la longueur de la courbe.

3) Calculer le rayon de courbure de (C_{17}) pour $t \in \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 26 (En coordonnées cartésiennes)
Soit la courbe donnée par : (C_{18}) $\begin{cases} x(t) &= \arccos(t) \\ y(t) &= \ln t \end{cases}$, $t \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

1) Faire l'étude et le tracé de cette courbe.

2) Calculer le rayon de courbure et centre de courbure de (C_{18}) pour $t = \frac{1}{2}$.

Exercice 27 (En coordonnées polaires)
Soit la courbe donnée par : (C_{19}) $\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta, \theta \in [-\pi, \pi]$.

1) Déterminer le rayon et centre de courbure en tout point $M(\theta)$.

2) Tracer le cercle osculateur pour les angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.