Devoir Surveillé # 1, le Samedi 10 Février 2018

Durée – 1h30

La calculatrice IUT est autorisée. Pour obtenir le barème maximal à chaque question, il est aussi demandé de soigner la rédaction, et de rendre une copie propre. Bon courage !

Exercice 1 (≈ 4 points)

Soit la courbe donnée par $(C_1)\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{(t+1)(t-2)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2(t+2)}{t+1} \end{cases}$.

1) Préciser le domaine de définition de la courbe.

2) Montrer que les branches infinies sont obtenues lorsque $t \to -1$, $t \to 2$, $t \to \pm\infty$ et déterminer leur nature.

►Correction.

1) On a $\mathcal{D}_x = \mathbf{R}\setminus\{-1,2\}$ et $\mathcal{D}_y = \mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Donc elle est définie sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \boxed{\mathbf{R}\setminus\{-1,2\}}$.

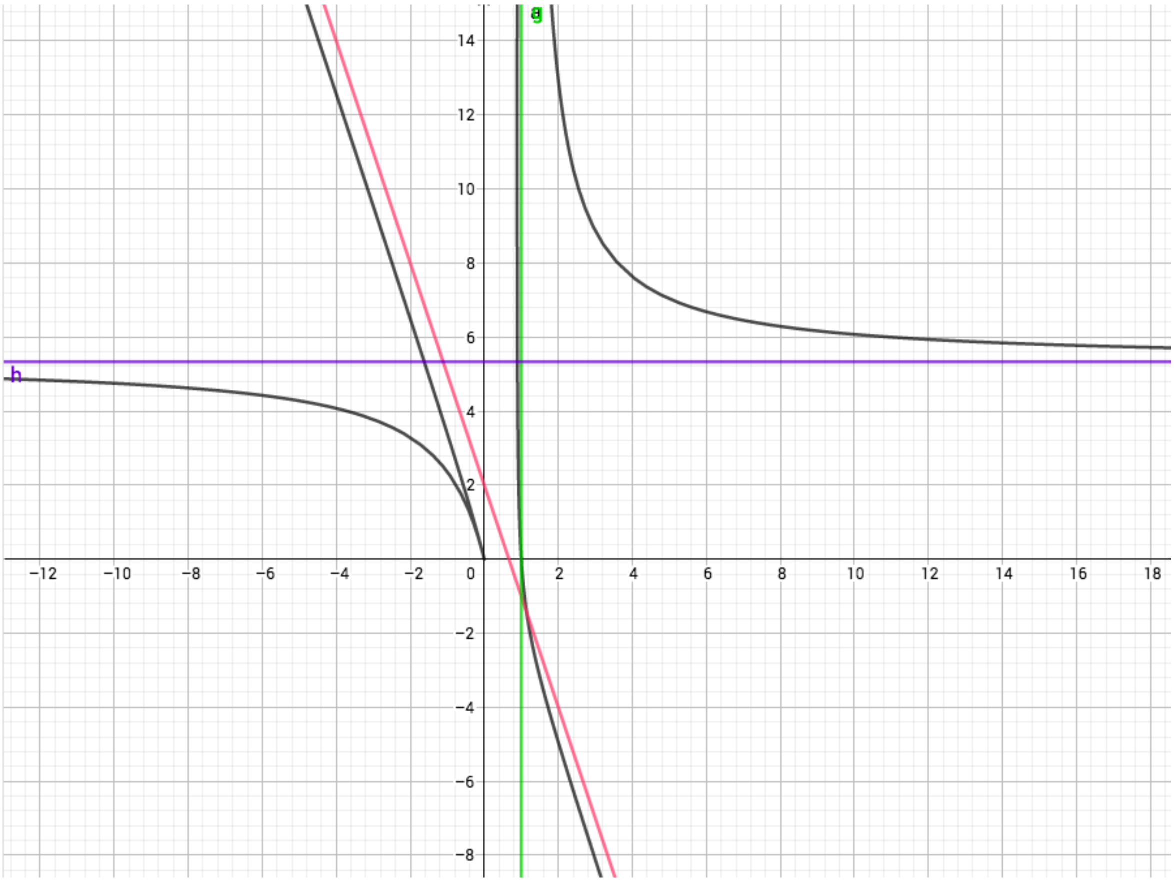
2)

— On a $\lim\limits_{t\to_< 2} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to_> 2} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to_< 2} y(t) = \dfrac{16}{3}$: ce qui signifie qu'il y a une branche infinie lorsque $t \to 2$, et plus précisément une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = \dfrac{16}{3}}$,

— on a $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$: ce qui signifie qu'il y a une branche infinie lorsque $t \to \infty$, et plus précisément une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = 1}$,

— on a $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -\infty$: ce qui signifie qu'il y a une branche infinie lorsque $t \to -\infty$, et plus précisément une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = 1}$,

— on a $\lim\limits_{t\to_< -1} x(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to_> -1} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to_< -1} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to_> -1} y(t) = \infty$: ce qui signifie qu'il y a une branche infinie lorsque $t \to -1$. De plus,
$\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2(t+2)}{t+1} \times \dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2} = t^2 - 4 \longrightarrow_{t\to-1} -3$. Il y a donc peut-être une asymptote oblique de coefficient directeur -3. De plus, $y(t) + 3x(t) = \dfrac{t^2(t+2)}{t+1} + 3\dfrac{t^2}{(t+1)(t-2)} = \dfrac{t^2(t+2)(t-2)}{(t+1)(t-2)} + 3\dfrac{t^2}{(t+1)(t-2)} = \dfrac{t^2(t^2-1)}{(t+1)(t-2)} = \dfrac{t^2(t-1)}{t-2} \to_{t\to-1} \dfrac{2}{3}$.
Finalement la droite d'équation $\boxed{y = -3x + \dfrac{2}{3}}$ est une asymptote oblique lorsque $t \to -1$.



Exercice 2 (≈ 12 points)
Soit la courbe donnée par : (C_2) $\begin{cases} x(t) &= \cos(t) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(t), \\ y(t) &= \sin t \cos t, \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$.

1) En analysant la périodicité et/ou parité des fonctions x et y, montrer qu'il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Faut-il appliquer une transformation géométrique pour obtenir le reste du graphe ? Si oui, préciser laquelle.

2) Étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$. Construire un tableau de variations, mentionner les points d'annulation des dérivées.
♣ Indication – Vous pourrez vous servir de l'égalité $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

3) Montrer que l'unique point singulier sur $[0, \pi]$ est obtenu en $t = \dfrac{\pi}{4}$. Déterminer sa nature.

4) Déterminer l'équation de la tangente au point $(x(0), y(0))$.

5) Tracer soigneusement la courbe complète en mettant en évidence les différents éléments des questions précédentes.

►Correction.

1) Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors $x(-t) = \cos(-t) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(-t) = \cos(t) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(t) = c(t)$ puisque cos est paire. Ensuite, comme sin est impaire et cos est paire, on obtient : $y(-t) = \sin(-t)\cos(-t) = (-1)\sin t \cos t, = -y(t)$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur $\mathbf{R}^+$. Comme le point $M(-t)$ est l'image de $M(t)$ par la transformation $(x, y) \mapsto (x, -y)$, on appliquera ensuite la transformation $\boxed{\mathcal{S}_{(0x)}}$.
Ensuite comme on sait que cos, sin sont 2π-périodiques, il suffit d'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
Combinant les deux conditions, on obtient $[-\pi, \pi] \cap \mathbf{R}^+ = \boxed{[0, \pi]}$ comme intervalle final. On applique ensuite $\boxed{\mathcal{S}_{(0x)}}$ comme mentionné ci-dessus.

2) Soit $t \in [0,\pi]$. Alors $x'(t) = -\sin t + \dfrac{\sqrt{2}}{2} 2\cos(t)\sin(t) = \sin t \left(\sqrt{2}\cos t - 1\right) = \sqrt{2}\sin t \left(\cos t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et
$y'(t) = \sin^2(t) - \cos^2(t) = \cos(2t)$.
Sur $[0,\pi]$, x s'annule donc en $0, \pi$ (les points ou sin s'annule) et $\dfrac{\pi}{4}$.
La fonction y' s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. On en déduit les variations suivantes :

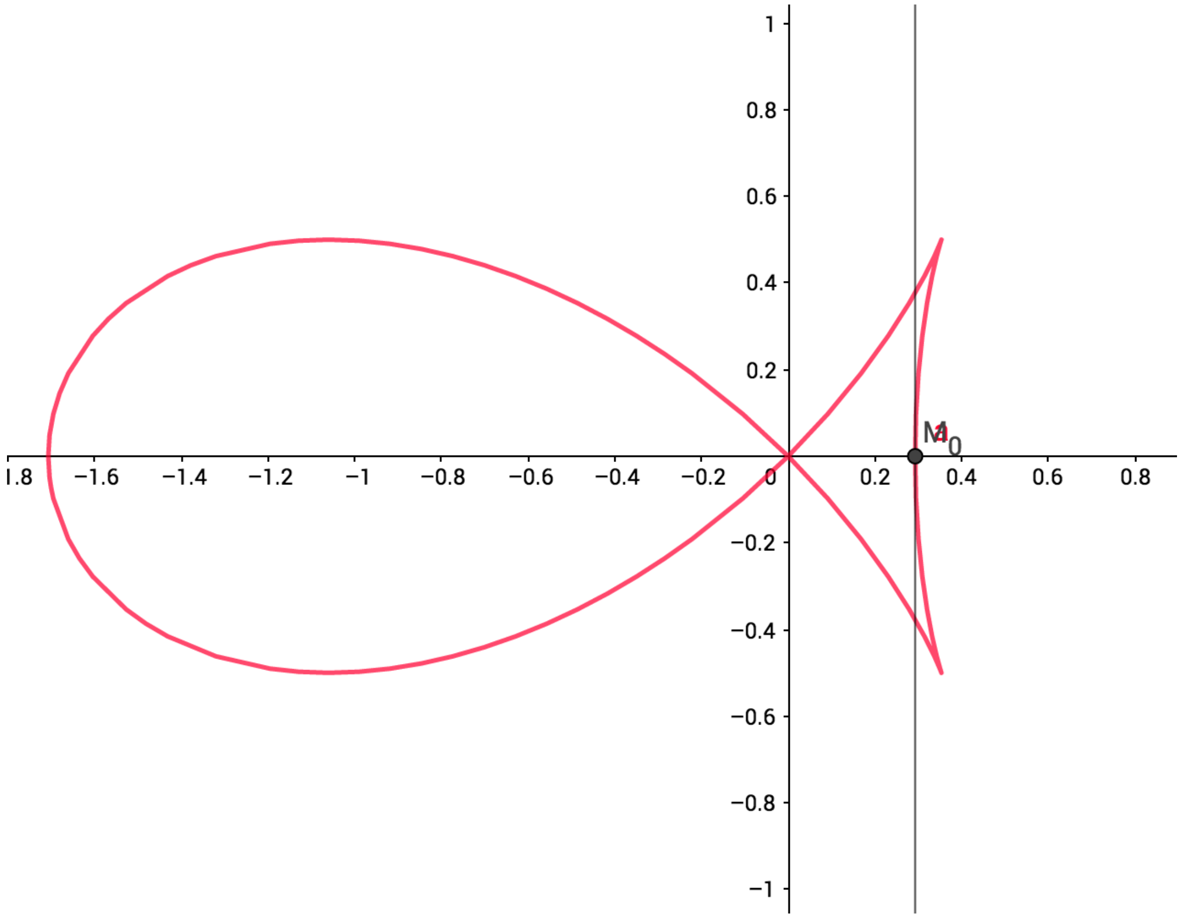
t	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

3) Étude locale de la courbe au point $t = \dfrac{\pi}{4}$.
Comme $t \in [0,\pi] \longmapsto \cos(2t)$ s'annule en $t = \dfrac{\pi}{4}$, et que $x'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, on en déduit que l'unique point singulier est obtenu pour $t = \dfrac{\pi}{4}$.
On a : $x''(t) = \sqrt{2}\cos t \left(\cos t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\cos t\,(-\sin t)$, $y''(t) = -2\sin(2t)$. Donc $x''(\pi/4) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $y''(\pi/4) = -2$. Finalement $\boxed{p = 2}$ puisque $T_2(\pi/4) \neq (0,0)$.
Ensuite, $x'''(t) = -\sqrt{2}\sin t \left(\cos t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\cos t\,(-\sin t) - \sqrt{2}\cos t \sin t - 2\sqrt{2}\cos t \sin t$, $y'''(t) = -4\cos(2t)$. Donc $x'''(\pi/4) = -3\sqrt{2}/2$,
et $y'''(\pi/4) = 0$. Comme $\begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -3\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, on a $\boxed{q = 3}$. On a donc un rebroussement de première espèce.

4) Donner la tangente au point M(0).
Elle a pour équation : $\begin{vmatrix} x'(0) & x - x(0) \\ y'(0) & y - y(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x - (1-\sqrt{2}/2) \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0$. Soit, après calculs : $\boxed{x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$. Elle est verticale.

5) Tracer la courbe complète :



On rappelle le théorème des fonctions implicites vu au précédent semestre.

⋈ Rappel – Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de deux variables continûment différentiable.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2, c \in \mathbf{R}$ tel que : $\quad f(x_0, y_0) = c \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0.$

Alors il existe un domaine $I_1 \times I_2 \subset \mathbf{R}^2$ et $\varphi : I_1 \longrightarrow I_2$, tels que $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$, et pour tous $(x, y) \in I_1 \times I_2$:

$$f(x, y) = c \iff y = \varphi(x).$$

⋈

Exercice 3 (≈ 4 points)

On considère l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ du plan vérifiant : $\quad (\mathcal{E}) \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

1) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y_0 \neq 0$.

a. En appliquant le théorème des fonctions implicites à la fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ en (x_0, y_0), montrer que dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble $(\mathcal{E})$ est une courbe du type $(C_\varphi) \quad y = \varphi(x)$.

b. Montrer que (C_φ) est une courbe paramétrée.

*On aura donc établi avec le théorème des fonctions implicites, que localement l'ensemble $\mathcal{E}$ est une courbe paramétrée. Cette démarche peut être étendue à n'importe quel ensemble de points du type $f(x, y) = c$. Ici, il n'est en fait pas nécessaire d'utiliser ce théorème pour justifier l'existence d'un paramétrage, voir la question **2)**.*

2) Montrer que : $(x, y) \in \mathcal{E} \iff \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \in \mathcal{C}(0, 1)$. En déduire qu'un paramétrage de $(\mathcal{E})$ est donné par : $(\mathcal{E})\ \begin{cases} x(t) = a\cos(t), \\ y(t) = b\sin(t), \end{cases}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. ♣ Indication – On pourra utiliser le paramétrage de $\mathcal{C}(0, 1)$ vu en cours.

3) Esquisser le graphe de $(\mathcal{E})$ après avoir réduit son domaine de définition, calculé les variations et éventuelles tangentes horizontales/verticales.

►Correction.

1) **a.** On a $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \dfrac{2y}{b^2}$. La fonction est bien sûr continûment différentiable. Comme $y_0 \neq 0$, on a $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ et d'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $I_1 \times I_2$ de (x_0, y_0) et une fonction $\varphi : I_1 \to I_2$, telle que $f(x, y) = 1$ si et seulement $y = \varphi(x)$ pour tous (x, y) dans ce voisinage.

b. Comme $(\mathcal{C}_\varphi)$ est une courbe représentative de fonction, c'est une courbe paramétrée. Un paramétrage est donné par : $\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \varphi(t), \end{cases}$ pour $t \in I_1$.

2) On a : $(x, y) \in \mathcal{E} \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \iff \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \in \mathcal{C}(0, 1)$.

Ceci est équivalent à l'existence de $t \in [0, 2\pi]$ tel que $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = (\cos t, \sin t)$ en utilisant le paramétrage du cercle vu en cours.

D'où $x(t) = a\cos t$ et $y(t) = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ est un paramétrage de $(\mathcal{E})$.

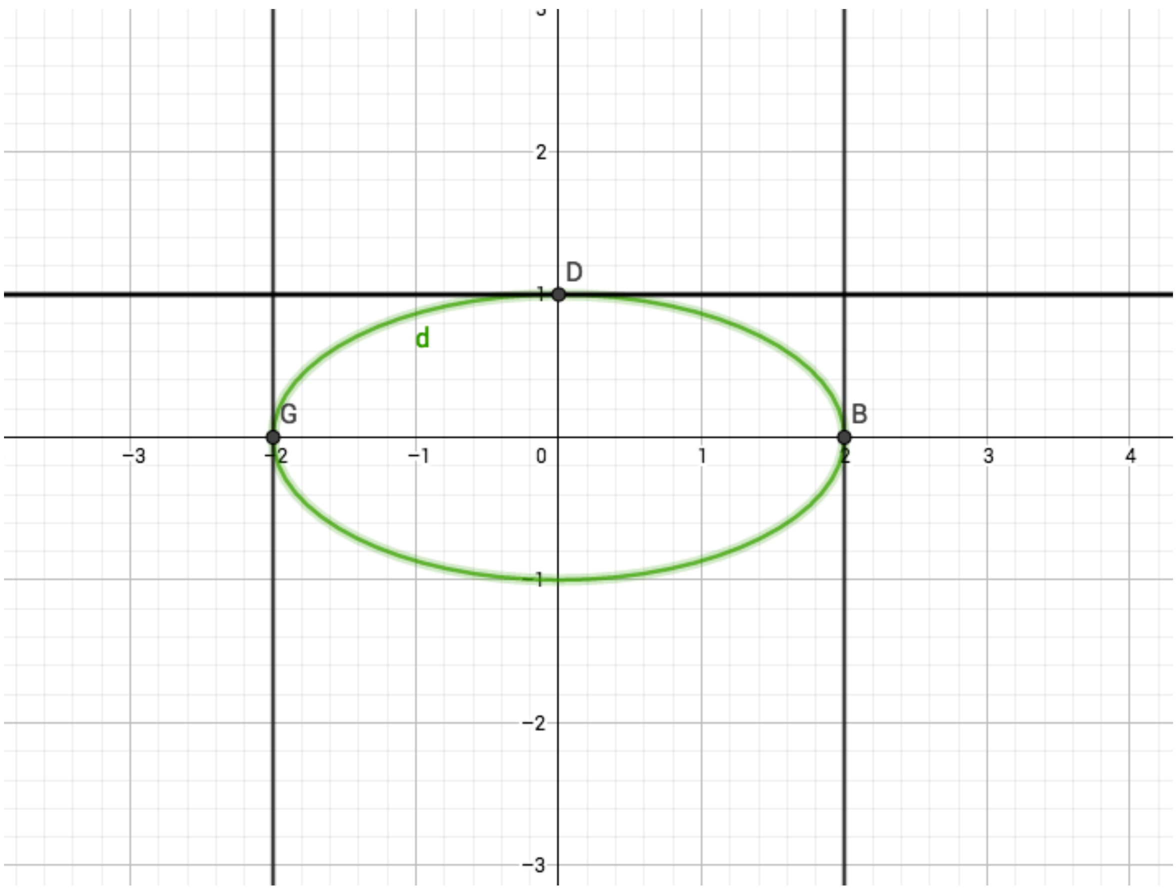
3) Les fonctions x, y sont respectivement paires et impaires, et 2π-périodiques. On peut d'abord restreindre à $[-\pi, \pi]$, puis à $[0, \pi]$ en utilisant la parité/imparité. On appliquera ensuite $\mathcal{S}_{(0x)}$ pour obtenir le reste de la courbe.

On a $x'(t) = -a\sin t$ et $y'(t) = b\cos t$. On en déduit alors aisément les tableaux suivants ainsi que la courbe, qui est donc une ellipse.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	a	↘	0	↘	$-a$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	↗	b	↘	0

Par exemple, voici le graphe pour $b = 1$ et $a = 2$.



Annexe – Formulaire

Équation d'une tangente à une courbe. Si $(\mathcal{C})$ $t \in I \longmapsto (x(t), y(t))$ est une courbe paramétrée alors la tangente en $M(t_0)$, $t_0 \in I$ est dirigée par $(x'(t_0), y'(t_0))$ s'il est non nul, et passe par $M(t_0)$.
Son équation est donc :

$$x'(t_0)(y - y(t_0)) - y'(t_0)(x - x(t_0)) - = 0.$$

À propos des points singuliers. Un point singulier d'une courbe est un point où les deux dérivées sont nulles.
Avec les notations du cours, on a les cas suivants :

— point ordinaire : p impair, q pair,
— point d'inflexion : p impair, q impair,
— point de rebroussement de 1ère espèce : p pair, q impair,
— point de rebroussement de 2ème espèce : p pair, q pair.

Équation du cercle unité. On note $\mathcal{C}(0, 1)$ le cercle unité de $\mathbf{R}^2$, *i.e.*l'ensemble des points du plan tels que

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Un paramétrage est donc donné par $x(t) = ...$, $y(t) = ...$?